

**ΤΑΞΗ: Α' ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ**

**ΜΑΘΗΜΑ: ΑΛΓΕΒΡΑ**

**Ημερομηνία: Κυριακή 17 Απριλίου 2016**

**Διάρκεια Εξέτασης: 2 ώρες**

**ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ**

**ΘΕΜΑ Α**

**A1.** Θεωρία. (Σχολικό βιβλίο, σελίδα 62).

**A2.**  $\alpha \rightarrow$  Λάθος  $\beta \rightarrow$  Σωστό  $\gamma \rightarrow$  Λάθος  $\delta \rightarrow$  Σωστό  $\epsilon \rightarrow$  Σωστό

**ΘΕΜΑ Β**

**B1. i.** Έχουμε  $\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6) = 1 + 24 = 25 > 0$ , άρα η εξίσωση έχει δύο ρίζες άνισες:  $x_{1,2} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{25}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm 5}{2}$ , άρα  $x_1 = -2$ ,  $x_2 = 3$

**ii.** Ισχύει  $(x-1)^2 = |x-1|^2$ . Θέτουμε  $|x-1| = y$  με  $y \geq 0$  οπότε έχουμε την εξίσωση  $y^2 - y - 6 = 0$  με  $y \geq 0$ . Επομένως (από i) είναι  $y = -2$  που απορρίπτεται ή  $y = 3$  που είναι δεκτή.  
Άρα  $|x-1| = 3 \Leftrightarrow (x-1 = 3 \text{ ή } x-1 = -3) \Leftrightarrow x = 4 \text{ ή } x = -2$

**B2. i.** Λύνουμε την εξίσωση  $-x^2 + x + 6 = 0$  η οποία είναι ισοδύναμη με την (i) του ερωτήματος B1. Άρα  $x_1 = -2$ ,  $x_2 = 3$ .

Το πρόσημο του τριωνύμου φαίνεται στον πίνακα που ακολουθεί

|                |           |    |   |           |   |
|----------------|-----------|----|---|-----------|---|
| x              | $-\infty$ | -2 | 3 | $+\infty$ |   |
| $-x^2 + x + 6$ | -         | 0  | + | 0         | - |

Επομένως οι λύσεις της ανίσωσης  $-x^2 + x + 6 < 0$  είναι τα  $x \in (-\infty, -2) \cup (3, +\infty)$

**ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2016**  
**Β' ΦΑΣΗ**

**E\_3.Μλ1Α(α)**

ii. Για να είναι η εξίσωση  $x^2 + 2x + \frac{\lambda^2}{4} = 0$  αδύνατη στο  $\mathbb{R}$  θα πρέπει η

διακρίνουσά της να είναι αρνητική. Δηλαδή  $\Delta < 0 \Leftrightarrow 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot \frac{\lambda^2}{4} < 0 \Leftrightarrow$

$$4 - 4 \cdot \frac{\lambda^2}{4} < 0 \Leftrightarrow 4 - \lambda^2 < 0 \Leftrightarrow \lambda^2 > 4 \Leftrightarrow |\lambda| > 2 \Leftrightarrow \lambda > 2 \text{ ή } \lambda < -2$$

Οι παραπάνω λύσεις προκύπτουν και από τον κανόνα προσήμου τριωνύμου: Ζητάμε τις τιμές του  $\lambda$  για τις οποίες είναι  $4 - \lambda^2 < 0$ . Δηλαδή τις τιμές του  $\lambda$  για τις οποίες το τριώνυμο του πρώτου μέλους είναι ομόσημο του συντελεστή του δευτεροβάθμιου όρου. Σύμφωνα με τον κανόνα προσήμου τριωνύμου, πρέπει ο  $\lambda$  να βρίσκεται εκτός του διαστήματος των ριζών του τριωνύμου  $4 - \lambda^2$ , οι οποίες είναι  $-2$  και  $2$ . Έτσι τελικά πρέπει  $\lambda > 2$  ή  $\lambda < -2$ .

**ΘΕΜΑ Γ**

Γ1. Για να ορίζεται η  $f$  πρέπει

$$3 - |1 - x| \geq 0 \Leftrightarrow |1 - x| \leq 3 \Leftrightarrow -3 \leq 1 - x \leq 3 \Leftrightarrow -4 \leq -x \leq 2 \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 4.$$

Άρα το πεδίο ορισμού της  $f$  είναι το  $A = [-2, 4]$ .

Γ2. Για να ανήκει το σημείο  $M(-1, 1)$  στη γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f$  πρέπει οι συντεταγμένες του να επαληθεύουν τον τύπο της. Δηλαδή πρέπει

$$\begin{aligned} f(-1) = 1 &\Leftrightarrow \sqrt{3 - |1 - (-1)|} + |\kappa^3 + 1| = 1 \Leftrightarrow \sqrt{3 - |2|} + |\kappa^3 + 1| = 1 \Leftrightarrow \\ 1 + |\kappa^3 + 1| &= 1 \Leftrightarrow |\kappa^3 + 1| = 0 \Leftrightarrow \kappa^3 + 1 = 0 \Leftrightarrow \kappa^3 = -1 \Leftrightarrow \kappa = \sqrt[3]{-1} \Leftrightarrow \kappa = -1. \end{aligned}$$

Γ3. Από τη φράση “παίρνουμε τυχαία ένα στοιχείο  $\omega$  του  $\Omega$ ” συμπεραίνουμε ότι όλα τα δυνατά αποτελέσματα είναι ισοπίθανα. Επομένως ισχύει ο κλασικός ορισμός της πιθανότητας. Το πλήθος των δυνατών περιπτώσεων είναι το πλήθος των στοιχείων του  $\Omega$ , δηλαδή  $N(\Omega) = 10$ . Αν θεωρήσουμε  $E$  το ενδεχόμενο «το  $f(\omega)$  έχει νόημα» τότε το πλήθος των ευνοϊκών περιπτώσεων είναι  $N(E)$ . Από τους αριθμούς που βρίσκονται στο  $\Omega$  παρατηρούμε ότι μόνο οι αριθμοί  $1, 2, 3, 4$ , βρίσκονται στο πεδίο ορισμού της  $f$  που είναι το  $A = [-2, 4]$  όπως γνωρίζουμε από το Γ1. Άρα  $E = \{1, 2, 3, 4\}$  με  $N(E) = 4$ . Έτσι έχουμε τελικά σύμφωνα με τον κλασικό ορισμό της πιθανότητας

$$P(E) = \frac{N(E)}{N(\Omega)} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}.$$

**ΘΕΜΑ Δ**

**Δ1.** Έχουμε την εξίσωση  $x^2 - 4x + 2 = 0$ . Η διακρίνουσα είναι  $\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 16 - 8 = 8$ . Αφού  $\Delta > 0$ , η εξίσωση έχει δύο ρίζες άνισες.

**Δ2.** Αρχικά έχουμε

$$f(0) = 0^2 - 4 \cdot 0 + 2 = 2 \text{ και } f(-1) = (-1)^2 - 4(-1) + 2 = 1 + 4 + 2 = 7$$

Άρα

$$\begin{aligned} A &= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7-2} - \sqrt{2}} + \frac{\sqrt{7-2}}{\sqrt{7-2} + \sqrt{2}} = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5} - \sqrt{2}} + \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5} + \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{5} + \sqrt{2}) + \sqrt{5}(\sqrt{5} - \sqrt{2})}{(\sqrt{5} - \sqrt{2})(\sqrt{5} + \sqrt{2})} = \\ &= \frac{\cancel{\sqrt{10}} + \sqrt{4} + \sqrt{25} - \cancel{\sqrt{10}}}{\sqrt{5}^2 - \sqrt{2}^2} = \frac{2+5}{5-2} = \frac{7}{3} \end{aligned}$$

• Από τους τύπους Vieta έχουμε  $S = x_1 + x_2 = -\frac{-4}{1} = 4$  και

$$P = x_1 \cdot x_2 = \frac{2}{1} = 2$$

Έτσι είναι  $B = x_1^3 x_2 + x_1 x_2^3 = x_1 \cdot x_2 (x_1^2 + x_2^2)$ . Όμως από την ταυτότητα

$$(x_1 + x_2)^2 = x_1^2 + 2x_1 x_2 + x_2^2 \text{ προκύπτει } x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2. \text{ Έτσι}$$

$$B = x_1 \cdot x_2 \cdot [(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2] = P(S^2 - 2P) \text{ ή}$$

$$B = 2(4^2 - 2 \cdot 2) = 2(16 - 4) = 2 \cdot 12 = 24$$

• Επίσης είναι,  $\Gamma = \sqrt{x_1^2} \cdot |x_2| = |x_1| \cdot |x_2| = |x_1 x_2| = |P| = |2| = 2$ .

**ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2016**  
Β' ΦΑΣΗ

**Ε\_3.Μλ1Α(α)**

**Δ3. i.** Για  $A = \frac{7}{3}$ ,  $B=24$  και  $\Gamma=2$  είναι

$$(\varepsilon): y = 2x + \frac{24-10}{\frac{7}{3}} \quad \text{ή} \quad y = 2x + \frac{14 \cdot 3}{7} \quad \text{ή} \quad y = 2x + 6.$$

Για  $x=0$  είναι  $y=6$ . Για  $y=0$  είναι  $x=-3$ . Επομένως χαράζουμε την ευθεία που διέρχεται από τα σημεία  $A(0,6)$  και  $B(-3,0)$ .

**ii.** Το τρίγωνο  $BOA$

είναι ορθογώνιο  
με μήκη κάθετων  
πλευρών

$$|OA| = |6| = 6$$

μονάδες και

$$|OB| = |-3| = 3$$

μονάδες.

Επομένως θα έχει  
εμβαδόν

$$(BOA) = \frac{1}{2} |OB| \cdot |OA| = \\ = \frac{1}{2} 3 \cdot 6 = 9$$

τετραγωνικές  
μονάδες.

