ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΙΣ ΔΕΥΤΕΡΟΒΑΘΜΙΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ - ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ

0.00 Να λυθεί η ανίσωση $x^3 < x^2 + x + 2$

0.01 Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2} - x - \frac{1}{x}}$

0.02 Να λυθεί η ανίσωση: $\sqrt{-x} \le x$.

0.03 Να λύσετε στους πραγματικούς την εξίσωση: $4x^2|x| + 3|x| = 2 - 6x^2$

0.04 Να λύσετε στους πραγματικούς την εξίσωση: $(x^2 - 5x + 7)^2 - (x-2)(x-3) = 1$

0.05 Να λυθεί η εξίσωση $x\sqrt{x^2+15} - \sqrt{x}\sqrt[4]{x^2+15} = 2$

0.06 Να λύσετε την εξίσωση: $4 - \frac{3}{x} = \sqrt{4 - \frac{3}{x}}$

0.07 Να λυθεί η εξίσωση: $10 + \sqrt[4]{x^3} = 3x\sqrt{x}$

0.08 Να βρείτε τις ακέραιες τιμές του y ώστε να ισχύει : $y^2 \le 11 - 6\sqrt{2}$

0.09 Να λύσετε την ανίσωση: $|4x-5| \ge (4x-5)^2$

0.10 Να λυθεί η εξίσωση $|x^2 - 3x + 5| = |x^2 + x + 1| + 4|1 - x|$

0.11 Να προσδιορίσετε τις τιμές του $\lambda \in R$ για τις οποίες η εξίσωση $x^2 - \lambda x + \lambda + 3 = 0$ έχει:

Α Δύο ρίζες άνισες θετικές Β Δύο ρίζες ετερόσημες.

0.12 Να βρεθούν οι τιμές της παραμέτρου α ώστε η σχέση $-3 < \frac{x^2 + \alpha x - 2}{x^2 - x + 1} < 2$ να ισχύει για κάθε πραγματικό x.

0.13 Έστω ότι η η εξίσωση $x^2 + 4\lambda x + 2\lambda^2 + 2 = 0$ (1), όπου λ πραγματικός αριθμός και Χ ο άγνωστος, έχει δύο πραγματικές και άνισες λύσεις, τις x_1, x_2

Α Να βρείτε τις τιμές του πραγματικού λ.

Β Να βρείτε τις τιμές του λ, ώστε να ισχύει $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} < \lambda^2 + 1$

Γ Αν η εξίσωση έχει δύο πραγματικές άνισες λύσεις και μία από αυτές είναι ο αριθμός -2, τότε να βρείτε την άλλη λύση και το λ

0.14 Να προσδιορίσετε το $\lambda \in R^*$ ώστε η εξίσωση $x^2 - (\lambda - 3)x + 2\lambda - 4 = 0$ να έχει δύο ρίζες x_1, x_2 για τις οποίες ισχύει $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{1}{\lambda}$

0.15 Να ορισθεί το μ στην εξίσωση: $x^2-\mu x+\mu-1=0$ ούτως, ώστε το τετράγωνο της διαφοράς των ριζών της να είναι μεγαλύτερο του 4 και μικρότερο του 16

0.16 Έστω η εξίσωση $x^2+x-3=0$ η οποία έχει ώς ρίζες τους x_1,x_2 Βρείτε τις τιμές των παραστάσεων $A=x_1^3-4x_2^2+19$ και $B=x_2^3-4x_1^2+19$

0.17 Έστω η εξίσωση $x^2+3x+1=0$ με ρίζες τις α,β. Να αποδείξετε ότι $\left(\frac{\alpha}{\beta+1}\right)^2+\left(\frac{\beta}{\alpha+1}\right)^2=18$

0.18 Αν $\gamma>1$ και $|\beta|\ge 2\gamma$, να αποδείξετε ότι οι ρίζες x_1,x_2 της εξίσωσης $x^2+\beta x+\gamma=0$, ικανοποιούν τη σχέση: $\frac{1}{|x_1|}+\frac{1}{|x_2|}\ge 2$.

0.19 Για ποιες τιμές της παραμέτρου μ, μία ακριβώς ρίζα της εξίσωσης $x^2-2(\mu+1)x+\mu^2=0$ ανήκει στο διάστημα $(0,2)$;

0.20 Έστω α, β, γ πραγματικοί αριθμοί ($\alpha\neq 0$ α διαφορετικό του μηδενός) , τέτοιοι ώστε οι αριθμοί: α, $4\alpha+3\beta+2\gamma$ να έχουν το ίδιο πρόσημο.

Να αποδείξετε ότι η εξίσωση : $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$, δε μπορεί να έχει δύο ρίζες στο διάστημα : (1,2).

0.21 Δίνεται το τριώνυμο $f(x)=\lambda x^2+\mu x+2011$ με $\lambda\neq 0$ όπου λ, μ πραγματικοί αριθμοί.

A) Αν $f(x)\neq 0$ για κάθε x πραγματικό αριθμό να αποδείξετε ότι λ>0

B) Να αποδείξετε ότι $f\left(2011^{2011}\right)>0$

0.22 Αν για κάθε $x\in IR$ ισχύει: $(x-\alpha)(x-\beta)\ge 0$ να δείξετε ότι: $\alpha=\beta$

0.23 Να αποδείξετε ότι για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς α, β ισχύει $3(\alpha+\beta+1)^2+1\ge 3\alpha\cdot\beta$

0.24 Να βρείτε την μεγαλύτερη τιμή του πραγματικού α ώστε η εξίσωση $x^2-2x+\alpha=0$ να έχει τουλάχιστον μια πραγματική ρίζα.

0.25 Δίνεται το τριώνυμο $P(x)=\alpha x^2+\beta x-2001$ με $\alpha\neq 0$.

A) Αν ισχύει ότι $P(x)\neq 0$ για κάθε $x\in R$ να δείξετε ότι $P(2004)<0$.

B) Αν ισχύει ότι $\alpha+\beta>2001$ να δείξετε ότι η εξίσωση $\alpha x^2+\beta x=2001$ έχει πραγματικές ρίζες.

0.26 Δίδεται η συνάρτηση $f(x)=\alpha x^2+\beta x-2$ με $x\in IR$ και $\alpha\neq 0$.

A Αν ισχύει η σχέση $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in IR$ να αποδείξετε ότι $f(100)<0$

B Αν ισχύει η σχέση $\alpha+\beta>2$ να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.

0.27 Να βρείτε ποιες πραγματικές τιμές του λ το τριώνυμο $f(x)=(\lambda-2)x^2+2(\lambda-1)x+\lambda-3$ έχει δύο πραγματικές ρίζες μεγαλύτερες της μονάδας.

0.28 Αν $\alpha,\beta,\gamma\in(0,+\infty)$ να αποδείξετε ότι μια τουλάχιστον από τις παρακάτω εξισώσεις έχει ρίζες πραγματικές , $\alpha x^2+2\beta x+\gamma=0$, $\gamma x^2+2\alpha x+\beta=0$, $\beta x^2+2\gamma x+\alpha=0$

0.29 Αν $\alpha,\beta,\gamma\in R^*$ και ισχύει: $\alpha+\beta^2+2\alpha\beta=29$ και $\beta+\gamma^2+2\beta\gamma=18$ και $\gamma+\alpha^2+2\alpha\gamma=25$, να υπολογιστεί η τιμή του $\alpha+\beta+\gamma$

0.30 Αν $\beta,\gamma\in A=\{1,2,3,4,5\}$, να βρείτε το πλήθος των εξισώσεων $x^2+\beta x+\gamma=0$ που έχουν ρίζες πραγματικές

0.31 Αν $x^2=xy+12y^2$ με $x,y\in R^*$ να βρείτε τις τιμές του $\dfrac{x}{y}$

0.32 Αν $f(x)=x^2-6x+8$, $x\in R$,τότε

A) Να βρείτε το πρόσημο του $f(x)$

B) Να λύσετε τις ανισώσεις

α) $f(|2x-3|)>0$ και β) $f(f(x)+x-2)<0$

0.33 Δίνεται το τριώνυμο $f(x)=x^2-(\lambda+4)x+\lambda+6$, $x\in R$, $\lambda\in R$

A Να βρείτε τις τιμές του $\lambda\in R$ για τις οποίες το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές

B Αν $x_1,x_2\in R$ είναι ρίζες του $f(x)$, να βρείτε:

α) για ποιες τιμές του $\lambda\in R$ ισχύει $x_1^2+x_2^2<20$

β) για ποιες τιμές του $\lambda\in R$ ισχύει $|x_1-x_2|=2$

0.34 A) Να λυθεί η εξίσωση $x^2-(\lambda+1)x+2\lambda-2\lambda^2=0$: (1), $\lambda\in R$

B) Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda\in R$ ισχύει ότι $d(x_1,x_2)<2$ όπου $x_1,x_2\in R$ οι ρίζες της εξίσωσης (1)

0.35 Δίνεται το τριώνυμο $f(x)=x^2+\alpha x+\beta$ όπου $\alpha,\beta\in R$. Αν $x_1,x_2\in R$ είναι οι ρίζες του $f(x)$ και ισχύει $|f(x_1+x_2)-5|+|x_1^2x_2+x_1x_2^2-30|=0$

A Να δείξετε ότι $\alpha=-6,\ \beta=5$

B Να λυθεί η ανίσωση $f(|x-3|-4)<0$

0.36 Δίνονται οι διαφορετικοί ανά δυο πραγματικοί αριθμοί x_1,x_2,x_3. Αν δίνεται ότι:

Η εξίσωση $x^2-3x+\alpha=0$, $(\alpha\in IR)$ έχει ρίζες τους x_1,x_2

Η εξίσωση $x^2-5x+\beta=0$, $(\beta\in IR)$ έχει ρίζες τους x_2,x_3

Η εξίσωση $x^2-4x+\gamma=0$, $(\gamma\in IR)$ έχει ρίζες τους x_1,x_3

Να προσδιορίσετε τους $\alpha,\beta,\gamma\in R$

0.37 Να λυθεί η εξίσωση $(x^2+x+2)^2-6x\cdot(x^2+x+2)+8x^2=0$ στο R

0.38 Για ποιές τιμές του πραγματικού αριθμού α ισχύει $(x^2-2x+\alpha)(x^2-\alpha x+1)(\alpha x^2-2x+1)>0$ για κάθε τιμή του πραγματικού αριθμού x ;