

Τάξη Β' (ομάδα Α)

ΩΡΙΑΙΑ ΓΡΑΠΤΗ ΔΟΚΙΜΑΣΙΑ ΣΤΗΝ ΑΛΓΕΒΡΑ

ΘΕΜΑΤΑ

1.Α. Να λυσετε το παρακατω μη γραμμικο συστημα:

$$\Sigma \begin{cases} x^2 + \psi^2 = 1 \\ -2\psi - x^2 = -2 \end{cases}$$

(μονάδες 30)

B. Να χαρακτηρίσετε σωστές ή λάθος τις παρακάτω προτάσεις:

1. δυο ευθειες του επιπεδου τεμνονται αν και μονο αν το αντιστοιχο γραμμικο συστημα των εξισωσεων τους εχει μοναδικη λυση
2. Ένα γραμμικο συστημα 2×2 εχει μοναδικη λυση αν και μονο αν η οριζουσα D είναι διαφορετικη του 0.
3. σε ένα μη γραμμικο συστημα μια τουλαχιστον εξισωση δεν παριστανει ευθεια.
4. Αν ένα γραμμικο συστημα 2×2 εχει δυο λυσεις τοτε εχει απειρες.
5. για το συστημα

$$\Sigma \begin{cases} a_1x + \beta_1\psi = \gamma_1 \\ \alpha_2x + \beta_2\psi = \gamma_2 \end{cases} \text{ είναι } D_x = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix} \quad (\text{μονάδες } 2 \times 5 = 10)$$

2. Δινονται οι ευθειες \mathcal{E}_1 , \mathcal{E}_2 για τις οποιες γνωριζουμε ότι:

α) η \mathcal{E}_1 εχει εξισωση $x + \psi - 1 = 0$

β) η \mathcal{E}_2 τεμνει τους αξονες του ορθοκανονικου συστηματος συντεταγμενων στα σημεια

$$A(1, 0) \text{ και } B(0, -1)$$

A. Να βρειτε την εξισωση της ευθειας \mathcal{E}_2

(μοναδες 20)

B. Να υπολογισετε τις οριζουσες D , D_x , D_ψ του γραμμικου συστηματος που οριζουν οι εξισωσεις των δυο ευθειων.

(μοναδες 30)

Γ. Να βρειτε εκεινους τους αριθμους X και ψ για τους οποιους ισχυει:

$$|x + \psi - 1| + |x - \psi - 1| = 0$$

(μοναδες 10)

Τάξη Β' (ομάδα Β)

ΩΡΙΑΙΑ ΓΡΑΠΤΗ ΔΟΚΙΜΑΣΙΑ ΣΤΗΝ ΑΛΓΕΒΡΑ

ΘΕΜΑΤΑ

1.Α. Να λύσετε το παρακάτω μη γραμμικό σύστημα:

$$\Sigma \begin{cases} \psi^2 + x^2 = 1 \\ -2x - \psi^2 = -2 \end{cases}$$

(μονάδες 30)

Β. Να χαρακτηρίσετε σωστές ή λάθος τις παρακάτω προτάσεις:

1. δυο ευθειες του επιπεδου τεμνονται αν και μονο αν το αντιστοιχο γραμμικο συστημα των εξισωσεων τους εχει μοναδικη λυση
2. Ένα γραμμικό σύστημα 2×2 έχει μοναδική λύση αν και μόνο αν η οριζούσα D είναι ίση με το 0.
3. σε ένα μη γραμμικό σύστημα μια τουλαχιστον εξισωση δεν παριστανει ευθεια.
4. Αν ένα γραμμικό σύστημα 2×2 έχει δυο λύσεις τότε έχει απειρες.
5. για το σύστημα

$$\Sigma \begin{cases} a_1x + \beta_1\psi = \gamma_1 \\ \alpha_2x + \beta_2\psi = \gamma_2 \end{cases} \text{ είναι } D = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix} \quad (\text{μονάδες } 2 \times 5 = 10)$$

2. Δίνονται οι ευθειες \mathcal{E}_1 , \mathcal{E}_2 για τις οποίες γνωρίζουμε ότι:

α) η \mathcal{E}_1 έχει εξίσωση $x - \psi - 1 = 0$

β) η \mathcal{E}_2 τέμνει τους αξόνες του ορθοκανονικού συστήματος συντεταγμένων στα σημεία

$$A(1,0) \text{ και } B(0,1)$$

Α. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας \mathcal{E}_2

(μονάδες 20)

Β. Να υπολογίσετε τις οριζούσες D , D_x , D_ψ του γραμμικού συστήματος που ορίζουν οι εξισώσεις των δυο ευθειών.

(μονάδες 30)

Γ. Να βρείτε εκείνους τους αριθμούς x και ψ για τους οποίους ισχύει:

$$|x - \psi - 1| + |x + \psi - 1| = 0$$

(μονάδες 10)

ΛΥΣΕΙΣ ΟΜΑΔΑΣ Α

1.A. Με προσθεση κατά μελη λαμβανουμε την εξίσωση: $\psi^2 - 2\psi + 1 = 0$ η οποία δίνει μια ρίζα την $\psi = 1$. Με αντικατασταση στη 1^η εξίσωση του συστήματος εχουμε $x = 0$, οποτε το συστημα εχει μια λυση το ζευγος $(x, \psi) = (0, 1)$

B. Σ-Σ-Σ-Σ-Λ

2.A. Αν $\varepsilon_2 : \psi = \alpha x + \beta$ και με δεδομενο ότι διερχεται από τα σημεια A(1, 0) και B(0, -1) εχω:

$$\begin{cases} x = 1 \\ \psi = 0 \end{cases} \Rightarrow 0 = \alpha + \beta(1)$$

και

$$\begin{cases} x = 0 \\ \psi = -1 \end{cases} \Rightarrow -1 = \beta(2)$$

Το συστημα των (1) και (2) δίνει : $\beta = -1$ και $\alpha = 1$ οποτε:

$$\varepsilon_2 : \psi = x - 1$$

B. B. Το συστημα των εξισώσεων των ευθειων στην κανονικη μορφη είναι:

$$\Sigma \begin{cases} x + \psi = 1 \\ x - \psi = 1 \end{cases} \quad \text{οποτε:}$$

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 1 = -2$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 1 = -2$$

$$D_\psi = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 1 = 0$$

Γ. Ζηταμε ένα αθροισμα μη αρνητικων να είναι ισο με 0, οποτε πρεπει ταυτοχρονα: $x + \psi - 1 = 0$ και $x - \psi - 1 = 0$

Επομενωσ οι ζητουμενοι αριθμοι είναι οι λυση του συστήματος

$$\Sigma \begin{cases} x + \psi = 1 \\ x - \psi = 1 \end{cases} \quad \text{δηλαδη:}$$

$$(x, \psi) = \left(\frac{D_x}{D}, \frac{D_\psi}{D} \right) = (1, 0)$$

ΛΥΣΕΙΣ ΟΜΑΔΑΣ Β

1.A. Με προσθεση κατά μελη λαμβανουμε την εξίσωση: $x^2 - 2x + 1 = 0$ η οποία δίνει μια ρίζα την $x = 1$. Με αντικατασταση στη 1^η εξίσωση του συστήματος εχουμε $\psi = 0$, οποτε το συστημα εχει μια λυση το ζευγος $(x, \psi) = (1, 0)$

B. Σ-Λ-Σ-Σ-Λ

2.A. Αν $\varepsilon_2 : \psi = \alpha x + \beta$ και με δεδομενο ότι διερχεται από τα σημεια A(1, 0) και B(0, 1) εχω:

$$\begin{cases} x = 1 \\ \psi = 0 \end{cases} \Rightarrow 0 = \alpha + \beta(1)$$

και

$$\begin{cases} x = 0 \\ \psi = 1 \end{cases} \Rightarrow 1 = \beta(2)$$

Το συστημα των (1) και (2) δίνει : $\beta = 1$ και $\alpha = -1$ οποτε:

$$\varepsilon_2 : \psi = -x + 1$$

B. B. Το συστημα των εξισώσεων των ευθειων στην κανονικη μορφη είναι:

$$\Sigma \begin{cases} x - \psi = 1 \\ x + \psi = 1 \end{cases} \quad \text{οποτε:}$$

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 1 = 2$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 1 = 2$$

$$D_\psi = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 1 = 0$$

Γ. Ζηταμε ένα αθροισμα μη αρνητικων να είναι ισο με 0, οποτε πρεπει ταυτοχρονα: $x - \psi - 1 = 0$ και $x + \psi - 1 = 0$

Επομενωσ οι ζητουμενοι αριθμοι είναι οι λυση του συστήματος

$$\Sigma \begin{cases} x - \psi = 1 \\ x + \psi = 1 \end{cases} \quad \text{δηλαδη:}$$

$$(x, \psi) = \left(\frac{D_x}{D}, \frac{D_\psi}{D} \right) = (1, 0)$$

Τάξη Β' (ομάδα Α)

ΩΡΙΑΙΑ ΓΡΑΠΤΗ ΔΟΚΙΜΑΣΙΑ ΣΤΗΝ ΑΛΓΕΒΡΑ

ΘΕΜΑΤΑ

1.Α. Να λυσετε το παρακατω μη γραμμικο συστημα:

$$\Sigma \begin{cases} x^2 + \psi^2 = 4 \\ 4\psi + x^2 = 8 \end{cases}$$

(μονάδες 30)

B. Να χαρακτηρίσετε σωστές ή λάθος τις παρακάτω προτάσεις:

1. δυο ευθειες του επιπεδου τεμνονται αν και μονο αν το αντιστοιχο γραμμικο συστημα των εξισωσεων τους εχει μοναδικη λυση
2. Ένα γραμμικο συστημα 2 x 2 εχει μοναδικη λυση αν και μονο αν η οριζουσα D_x είναι διαφορετικη του 0.
3. υπαρχει γραμμικο συστημα 2 x 2 με ακριβως 2012 λυσεις
4. Το συστημα $\Sigma \begin{cases} x + \psi = 6 \\ x\psi = 5 \end{cases}$ είναι μη γραμμικο
5. το συστημα $\Sigma \begin{cases} 2x + 2\psi = 6 \\ x + \psi = 3 \end{cases}$ εχει απειρες λυσεις

(μονάδες 2 X 5 = 10)

2. Δινονται οι ευθειες \mathcal{E}_1 , \mathcal{E}_2 για τις οποιες γνωριζουμε ότι:

α) η \mathcal{E}_1 εχει εξισωση $2x - \psi + 1 = 0$

β) η \mathcal{E}_2 διερχεται από τα σημεια $A(1,1)$ και $B(-1,-1)$

A. Να βρειτε την εξισωση της ευθειας \mathcal{E}_2

(μοναδες 20)

B. Να υπολογισετε τις οριζουσες D , D_x , D_ψ του γραμμικου συστηματος που οριζουν οι εξισωσεις των δυο ευθειων.

(μοναδες 30)

Γ. Να βρειτε εκεινους τους αριθμους X και ψ για τους οποιους ισχυει:

$$(2x - \psi + 1)^2 + |x - \psi| = 0$$

(μοναδες 10)

Τάξη Β' (ομάδα Β)

ΩΡΙΑΙΑ ΓΡΑΠΤΗ ΔΟΚΙΜΑΣΙΑ ΣΤΗΝ ΑΛΓΕΒΡΑ

ΘΕΜΑΤΑ

1.Α. Να λύσετε το παρακάτω μη γραμμικό σύστημα:

$$\Sigma \begin{cases} \psi^2 + x^2 = 4 \\ 4x + \psi^2 = 8 \end{cases}$$

(μονάδες 30)

Β. Να χαρακτηρίσετε σωστές ή λάθος τις παρακάτω προτάσεις:

1. δυο ευθειες του επιπεδου τεμνονται αν και μονο αν το αντιστοιχο γραμμικο συστημα των εξισωσεων τους εχει μοναδικη λυση
2. Ένα γραμμικό σύστημα 2×2 έχει μοναδική λύση αν και μόνο αν η οριζούσα D_{ψ} είναι διαφορετική του 0.
3. υπάρχει γραμμικό σύστημα 2×2 με ακριβώς 2012 λύσεις
4. Το σύστημα $\Sigma \begin{cases} x + \psi = 6 \\ x\psi = 5 \end{cases}$ είναι γραμμικό
5. το σύστημα $\Sigma \begin{cases} 2x + 2\psi = 6 \\ x + \psi = 5 \end{cases}$ είναι αδύνατο

(μονάδες $2 \times 5 = 10$)2. Δίνονται οι ευθειες \mathcal{E}_1 , \mathcal{E}_2 για τις οποίες γνωρίζουμε ότι:

α) η \mathcal{E}_1 έχει εξίσωση $-2x + \psi + 1 = 0$

β) η \mathcal{E}_2 διέρχεται από τα σημεία $A(-2, 2)$ και $B(2, -2)$

Α. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας \mathcal{E}_2

(μονάδες 20)

Β. Να υπολογίσετε τις οριζούσες D , D_x , D_{ψ} του γραμμικού συστήματος που ορίζουν οι εξισώσεις των δυο ευθειών.

(μονάδες 30)

Γ. Να βρείτε εκείνους τους αριθμούς X και Ψ για τους οποίους ισχύει:

$$|-2x + \psi + 1| + (x + \psi)^2 = 0$$

(μονάδες 10)

ΛΥΣΕΙΣ ΟΜΑΔΑΣ Α

- 1.Α. με αφαίρεση κατά μέλη λαμβάνω την εξίσωση : $\psi^2 - 4\psi + 4 = 0$
 η οποία δίνει μια ρίζα την $\psi = 2$
 Με αντικατάσταση στην 1^η εξίσωση λαμβάνω $x = 0$, οπότε το σύστημα έχει μια λύση το ζευγάρι $(x, \psi) = (0, 2)$

B. Σ-Λ-Λ-Σ-Σ

- 2.Α. Αν $\varepsilon_2 : \psi = \alpha x + \beta$ και με δεδομένο ότι διέρχεται από τα σημεία A(1,1) και B(-1,-1) έχω:
- $$\begin{cases} x = 1 \\ \psi = 1 \end{cases} \Rightarrow 1 = \alpha + \beta(1)$$
- και
- $$\begin{cases} x = -1 \\ \psi = -1 \end{cases} \Rightarrow -1 = -\alpha + \beta(2)$$
- Το σύστημα των (1) και (2) δίνει :
 $\beta = 0$ και $\alpha = 1$ οπότε:
 $\varepsilon_2 : \psi = x$ (δηλαδή προκειται για τη διχοτομο του 1^{ου} και 3^{ου} τεταρτημοριου.)

B. Το σύστημα των εξισώσεων των ευθειών στην κανονική μορφή είναι:

$$\Sigma \begin{cases} 2x - \psi = -1 \\ x - \psi = 0 \end{cases} \quad \text{οποτε:}$$

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 + 1 = -1$$

$$D_x = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1 - 0 = 1$$

$$D_\psi = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -0 \end{vmatrix} = 0 + 1 = 1$$

- Γ. Ζητάμε ένα άθροισμα μη αρνητικών να είναι ίσο με 0 , οπότε πρέπει ταυτόχρονα:
 $2x - \psi + 1 = 0$ και $x - \psi = 0$
 Επομένως οι ζητούμενοι αριθμοί είναι οι λύση του συστήματος

$$\Sigma \begin{cases} 2x - \psi = -1 \\ x - \psi = 0 \end{cases} \quad \text{δηλαδή:}$$

$$(x, \psi) = \left(\frac{D_x}{D}, \frac{D_\psi}{D} \right) = (-1, -1)$$

ΛΥΣΕΙΣ ΟΜΑΔΑΣ Β

- 1.Α. με αφαίρεση κατά μέλη λαμβάνω την εξίσωση : $x^2 - 4x + 4 = 0$
 η οποία δίνει μια ρίζα την $x = 2$
 Με αντικατάσταση στην 1^η εξίσωση λαμβάνω $\psi = 0$, οπότε το σύστημα έχει μια λύση το ζευγάρι $(x, \psi) = (2, 0)$

B. Σ-Λ-Λ-Σ-Σ

- 2.Α. Αν $\varepsilon_2 : \psi = \alpha x + \beta$ και με δεδομένο ότι διέρχεται από τα σημεία A(-2, 2) και B(2, -2) έχω:
- $$\begin{cases} x = -2 \\ \psi = 2 \end{cases} \Rightarrow 2 = -2\alpha + \beta(1)$$
- και
- $$\begin{cases} x = 2 \\ \psi = -2 \end{cases} \Rightarrow -2 = 2\alpha + \beta(2)$$
- Το σύστημα των (1) και (2) δίνει :
 $\beta = 0$ και $\alpha = -1$ οπότε:
 $\varepsilon_2 : \psi = -x$ (δηλαδή προκειται για τη διχοτομο του 2^{ου} και 4^{ου} τεταρτημοριου.)

B. Το σύστημα των εξισώσεων των ευθειών στην κανονική μορφή είναι:

$$\Sigma \begin{cases} -2x + \psi = -1 \\ x + \psi = 0 \end{cases} \quad \text{οποτε:}$$

$$D = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 - 1 = -3$$

$$D_x = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 - 0 = -1$$

$$D_\psi = \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 1 = 1$$

- Γ. Ζητάμε ένα άθροισμα μη αρνητικών να είναι ίσο με 0 , οπότε πρέπει ταυτόχρονα:
 $-2x + \psi + 1 = 0$ και $x + \psi = 0$

Επομένως οι ζητούμενοι αριθμοί είναι οι λύση του συστήματος

$$\Sigma \begin{cases} -2x + \psi = -1 \\ x + \psi = 0 \end{cases} \quad \text{δηλαδή:}$$

$$(x, \psi) = \left(\frac{D_x}{D}, \frac{D_\psi}{D} \right) = \left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3} \right)$$