Β Λυκείου
Άλγεβρα

4 ΓΛΧ

2013-2014

Μ. Παπαγρηγοράκης
Χανιά

[Άλγεβρα]

13.09

1 ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

1.01 Δίνεται το σύστημα: $\begin{cases} \lambda x - y = \lambda - 1 \\ x + 2\lambda y = \lambda \end{cases}$, $\lambda \in R$. Να υπολογίσετε τις τιμές του λ ώστε για τη λύση (x,y) του συστήματος να ισχύει $x - y = 0$

1.02 Να λύσετε το σύστημα:

$7|x+2| + |3-y| = 31$

$3|x+2| - 4|3-y| = 0$

1.03 Δίνεται το (Σ): $\begin{cases} (\mu-2)x + 5y = 5 \\ x + (\mu+2)y = 5 \end{cases}$, $\mu \in R$

Α) Για ποιες τιμές του μ έχει άπειρες λύσεις

Β) Αν το σύστημα έχει μοναδική λύση (x_o, y_o), να βρείτε τη λύση αυτή.

Δ) Να υπολογίσετε τις τιμές του πραγματικού αριθμού μ ώστε για τη λύση του συστήματος (x_o, y_o), του Β) ερωτήματος, να ισχύει:

$2x_o + y_o > 5$

1.04 Έστω το σύστημα :

$\begin{cases} (\lambda-1)x + y = 2 \\ x + (\lambda-1)y = 2 \end{cases}$, $\lambda \in R$. Στην περίπτωση που το (Σ) έχει μοναδική λύση (χο,y0) και ισχύει $x_0^4 + y_0^2 = 2$ να βρεθεί το λ στο R.

1.05 Δίνεται η συνάρτηση :

$f(x) = \begin{cases} 1 - x & \text{αν } x < 0 \\ 2x + \lambda^2 - 3 & \text{αν } x \geq 0 \end{cases}$ με $\lambda \in R$

Α) Να βρεθούν ο λ ώστε $f(0) = 1$.

Για τη μεγαλύτερη τιμή του λ που βρήκατε

Γ) να βρεθούν τα $f(-2)$, $f(3,5)$,

Δ) Να λύσετε το σύστημα : $\begin{cases} f(-2)x + 4y = 12 \\ 6x + f(3,5)y = 10 \end{cases}$

1.06 Δίνεται ένα σύστημα (Σ) 2 γραμμικών εξισώσεων με 2 αγνώστους x και ψ και D , Dx , Dψ οι ορίζουσες του συστήματος οι οποίες ικανοποιούν το παρακάτω σύστημα :

Σ1: $D.Dx + D\psi = 0$

$Dx + D.D\psi = 0$

Α) Να λύσετε το Σ1 , με αγνώστους τους Dx , Dψ

Β) Να λύσετε το (Σ) .

1.07 Δίνεται το σύστημα $\begin{cases} x + 2y = -6 \\ 3x + y = \lambda \end{cases}$

Αποδείξτε ότι έχει μοναδική λύση (x_0, y_0) και βρείτε το λ ώστε να ισχύει $x_0 - y_0 < 0$

1.08 Δίνεται το σύστημα $\begin{cases} \lambda x + y = \lambda^2 \\ x + \lambda y = 1 \end{cases}$ (Σ_1) και τα τριώνυμα

$f(x) = x^2 + 3x - \lambda$, $g(x) = -x^2 - \lambda x + 3$.

Α. Να βρεθεί το λ ώστε το σύστημα να έχει μοναδική λύση.

Β. Εάν η μοναδική λύση του Σ_1 είναι (x_0, y_0) και ισχύει $-x_0 + 3y_0 + 3 = 0$, να λυθεί η ανίσωση $f(x) \geq g(x)$.

Γ. Βρείτε τη λύση του συστήματος $|D - \lambda_1| + |D_x - \lambda_2| + |D_x - D_y| = 0$ όπου λ_1 και λ_2 είναι οι τιμές για τις οποίες το (Σ_1) είναι αδύνατο και έχει άπειρες λύσεις αντίστοιχα

2 ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ

2.01 Να μελετήσετε τη μονοτονία των συναρτήσεων $f(x)=x^2-5x$, $x\in[3,+\infty)$
$g(x)=-2x+3$ $h(x)=x+\sqrt{x-2}$

2.02 Να μελετήσετε τη μονοτονία των συναρτήσεων $f(x)=x(4-x)$, $x\in(-\infty,2]$
$g(x)=2-\sqrt{3x-1}$ $t(x)=2-\sqrt{3-x}$

2.03 Να μελετήσετε τη μονοτονία των συναρτήσεων
$h(x)=\frac{1}{x^2}-1$ και $g(x)=\frac{1-x}{x}$, $x<0$

2.04 Να αποδείξετε ότι η $f(x)=\frac{x}{1+|x|}$ είναι γνησίως αύξουσα στο R

2.05 Να μελετηθεί η μονοτονία της συνάρτησης $f(x)=(\lambda^2-1)x+3$, $\lambda\in R$.

2.06 Μια συνάρτηση f είναι γνήσια μονότονη στο R και διέρχεται από τα σημεία $(1,2)$ και $(3,1)$. Να αποδείξετε τη μονοτονία της.

2.07 Για τη συνάρτηση f ισχύει ότι $2f^5(x)+f(x)=3x$ για κάθε $x\in R$.
A) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνήσια αύξουσα
B) Να λυθεί η ανίσωση $f(x^2+x-1)<1$

2.08 Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση κάθε γνησίως μονότονης συνάρτησης τέμνει σε ένα το πολύ σημείο τον άξονα $x'x$.

2.09 Οι συναρτήσεις f και g είναι ορισμένες στο R, είναι γνήσια μονότονες και έχουν διαφορετικό είδος μονοτονίας. Να αποδείξετε ότι οι γραφικές τους παραστάσεις έχουν το πολύ ένα κοινό σημείο.

2.10 Να βρεθούν οι τιμές του $\lambda\in R$ ώστε η συνάρτηση $f(x)=(\lambda^2-4)x+3$ να είναι γνησίως αύξουσα.

2.11 Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f με $f(x)=\frac{x}{1+|x|}$ είναι γνησίως αύξουσα

2.12 Αν η συνάρτηση $f:R\to R$ είναι γνησίως φθίνουσα και $f(x)>0$ για κάθε $x\in R$, να δείξετε ότι η $g(x)=\frac{f^2(x)-3}{3f(x)}$ είναι γνησίως φθίνουσα στο R.

2.13 Έστω συνάρτηση $f:R\to R$ με την ιδιότητα: $f(x+y)=f(x)+f(y)$, $\forall x,y\in R$. Δίνεται ακόμα ότι ισχύει πρόταση: «Αν $x>0$ τότε $f(x)>0$».
Να αποδείξετε ότι:
A) η f είναι περιττή
B) η f είναι γνησίως αύξουσα.
Γ) Να λύσετε την ανίσωση
$f(4x^2+2005)+f(4x^2-2005)<2f(8x-4)$

2.14 Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα και ισχύει $f(f(x))=x$ για κάθε $x\in R$. Να δείξετε ότι $f(x)=x$, $x\in R$

2.15 Δίνεται ότι η συνάρτηση f είναι γνήσια αύξουσα στο R. Να λύσετε την εξίσωση
$f(\sqrt{x})+f(x^2)=f(x)+f(x^3)$

2.16 Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη στο R με σύνολο τιμών το R ώστε να ισχύει
$f(x)+f^3(x)=x+1$ για κάθε $x\in R$
Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα

2.17 Να λύσετε τις ανισώσεις:
Α) $2-x-x^{13}>0$
Β) $x^{15}+x^3+x-1>0$
Γ) $x^{11}+2x^7+3x^5+5x^3+7x<18$

2.18 Αν $f(x)=x^7+x-1$, να λύσετε τις ανισώσεις $f\left(x^2+x\right)<f(2)$ και $f(x^2+1)<f(2x-2)$

2.19 Έστω συνάρτηση $f:A\to R$.
Α) Για κάθε $x_1,x_2\in A$ με $x_1,\neq x_2$ ορίζουμε $\lambda=\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}$. Να δείξετε ότι:
α) η f είναι γν. αύξουσα αν και μόνο αν $\lambda>0$.
β) η f είναι γν. φθίνουσα αν και μόνο αν $\lambda<0$
Β) Αν η συνάρτηση $f(x)=(1-\alpha)x+2$ είναι γνήσια αύξουσα, να βρείτε το $\alpha\in R$
Γ) Αν $A=R$ και για κάθε $x_1,x_2\in R$ με $x_1,\neq x_2$ ισχύει $\left|f(x_1)-f(x_2)\right|<2\left|x_1-x_2\right|$, να αποδείξετε ότι η $g(x)=f(x)-2x$ είναι γνησίως φθίνουσα στο R και ότι η $h(x)=f(x)+2x$ είναι γνησίως αύξουσα στο R.

2.20 Οι συναρτήσεις f και g είναι γνήσια αυξουσες έχουν πεδίο ορισμού το R και ισχύει $f(x)>0$ και $g(x)<0$ για κάθε $x\in R$.
Α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $\dfrac{f}{g}$ είναι γνήσια μονότονη.
Β) Να λύσετε την ανίσωση
$f\left(x^2\right)g(x)-f(x)g\left(x^2\right)>0$

2.21 Αν $f(x)=x^7+x^5+x$, να λύσετε την ανίσωση $f(2x^2-x+3)<f(3x+x^2)$

2.22 Αν $f:R\to R$ περιττή και γνησίως φθίνουσα στο R με $f(f(x))=x$ για κάθε $x\in R$, να δείξετε ότι $f(x)=-x$, $x\in R$

2.23 Έστω συνάρτηση f, ορισμένη στο R, που είναι γνήσια μονότονη και η γραφική της παράσταση διέρχεται από τα σημεία $(1,3)$ και $(2,0)$
Α) Να αποδείξετε ότι είναι γνήσια φθίνουσα
Β) Να λύσετε την ανίσωση $f(x)>3$
Γ) Να λύσετε την ανίσωση $f(x)<0$
Δ) Να βρείτε τα σημεία όπου η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $x'x$

2.24 Έστω συνάρτηση f, ορισμένη στο R, που είναι γνήσια μονότονη και η γραφική της παράσταση διέρχεται από τα σημεία $(0,1)$ και $(-1,0)$
Α) Να αποδείξετε ότι είναι γνήσια αύξουσα
Β) Να λύσετε την ανίσωση $f(x)>1$
Γ) Να λύσετε την ανίσωση $f(x)<0$
Δ) Να βρείτε τα σημεία όπου η γραφική παράσταση της f τέμνει τους άξονες

2.25 Έστω συνάρτηση f, ορισμένη στο R, που είναι γνήσια μονότονη και η γραφική της παράσταση διέρχεται από τα σημεία $(-1,-1)$ και $(1,2)$
Α) Να αποδείξετε ότι είναι γνήσια αύξουσα
Β) Να λύσετε την ανίσωση $f(x)>-1$
Γ) Να λύσετε την ανίσωση $f(x)<2$
Δ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=2$
Ε) Πόσες ρίζες μπορεί να έχει η εξίσωση $f(x)=2014$

ΑΚΡΟΤΑΤΑ

2.26 Να μελετηθούν ως προς τα ακρότατα οι συναρτήσεις

Α) $f(x) = -2(x+1)^2 + 3$

Β) $f(x) = 1 - \sqrt{2x+3}$

Γ) $f(x) = x^4 + x^2 - 1$

Δ) $f(x) = -|x-5| + 3$

2.27 Να μελετηθούν ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα οι συναρτήσεις

Α) $f(x) = x^2 + 3$ στο $[-2,-1]$

Β) $f(x) = 2\sqrt{3-x^2} + 3$ στο $\left[\sqrt{2},\sqrt{3}\right]$

Γ) $f(x) = \sqrt{7+\sqrt{6-x}}$ στο $[2,5]$

2.28 Έστω η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{x^2+2}{\sqrt{x^2+1}}$ $x \in R$.

Να αποδείξετε ότι η ελάχιστη τιμή της f είναι το 2

2.29 Να προσδιοριστεί ο κ ώστε όταν η συνάρτηση $f(x) = (3\kappa+1)x^2$ παρουσιάζει ελάχιστο, η συνάρτηση $g(x) = (3-|\kappa+2|)x^2$ να παρουσιάζει για την ίδια τιμή του x μέγιστο

2.30 Έστω η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{x^2+2}{\sqrt{x^2+1}}$, $x \in R$.

Να αποδείξετε ότι η ελάχιστη τιμή της f είναι το 2

2.31 Έστω η $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$, $x \geq 0$. Να δείξετε ότι:

Α) $f(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$, $x \geq 0$

Β) $f(x) \leq 1$, $x \geq 0$

Γ) η μέγιστη τιμή της f είναι το 1

ΑΡΤΙΕΣ ΠΕΡΙΤΤΕΣ

2.32 Για κάθε μια από τις συναρτήσεις εξετάστε ποια είναι άρτια ή περιττή.

Α) $f(x)=\dfrac{2x}{x^2+5}$

Β) $f(x)=\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{(x-1)^2}$

2.33 Να βρείτε ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι περιττές ή άρτιες:

Α) $f(x)=x^2\cdot|x-1|$

Β) $f(x)=\dfrac{x^3-x}{x^2-1}+\dfrac{x^3}{x^2+8}$

Γ) $f(x)=|x+1|^5+|x-1|^5+2$

2.34 Να βρείτε ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι περιττές ή άρτιες:

Α) $f:(-1,2]\to R$ με $f(x)=x^3+x$

Β) $\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+1}$

Γ) $f(x)=x^3-x|x|$

2.35 Να βρείτε ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι περιττές ή άρτιες

Α) $f(x)=\begin{cases}-2x+7 & x\le -1\\ -2x-7 & x\ge 1\end{cases}$

Β) $f(x)=\begin{cases}-3x+4 & x<0\\ 3x+4 & x\ge 0\end{cases}$

2.36 Αν η συνάρτηση $f(x)$ είναι περιττή με πεδίο ορισμού A, να αποδείξετε ότι η $g(x)=|f(x)|$ είναι άρτια

2.37 Να αποδείξετε ότι όταν μια συνάρτηση είναι είναι άρτια και περιττή, τότε είναι η μηδενική συνάρτηση

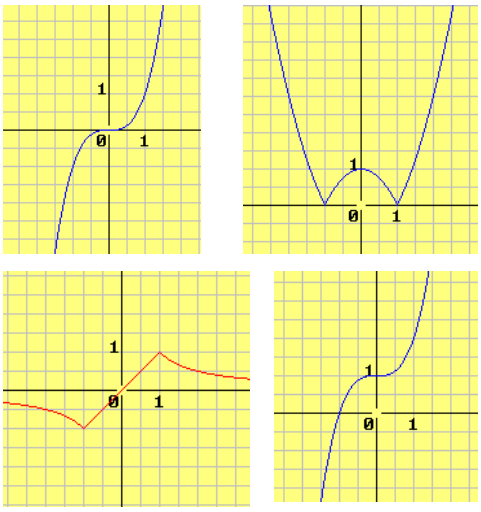
2.38 Δίνεται συνάρτηση $f:R\to R$ με την ιδιότητα για κάθε $x,y\in R$ ισχύει $f(x+y)=f(x)+f(y)$. Δείξτε ότι:

Α) $f(0)=0$ Β) η f είναι περιττή

2.39 Έστω συνάρτηση f με $f(x)=(\lambda-1)x+3\lambda-1$. Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda\in R$ η f είναι

Α) άρτια Β) περιττή

2.40 Ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι άρτιες και ποιες περιττές;

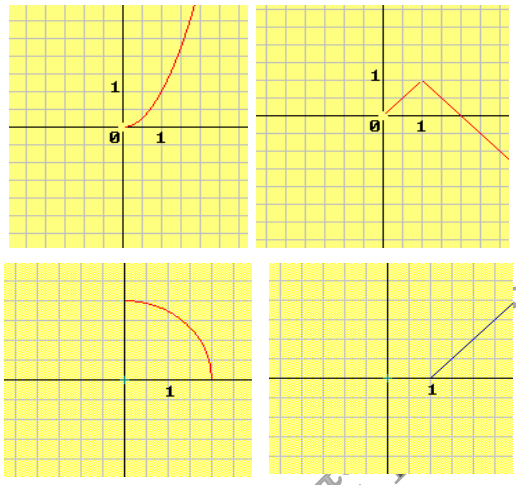


2.41 Δίνεται η συνάρτηση f για την οποία ισχύει ότι $f(2)=4$. Να βρεθεί το $f(-2)$ αν γνωρίζετε ότι :

Α) η f είναι άρτια

Β) η f είναι περιττή

2.42 Να συμπληρώσετε τις παρακάτω γραμμές ώστε να παριστάνουν γραφικές παραστάσεις άρτιας ή περιττής συνάρτησης



3 ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

3.01 Σε ποιο τεταρτημόριο βρίσκεται το σημείο M αν $x\hat{O}M = \omega$ και $ημω \cdot συνω > 0$

3.02 Αν $5π < x < \frac{11π}{2}$ να αποδείξετε ότι $εφx - ημx > συνx - σφx$.

3.03 Να υπολογίσετε τις παραστάσεις :

Α) $ημ90^o + ημ180^o + ημ270^o + ημ360^o$

Β) $2εφ^2 180^o - 5(1 - συν^2 90^o)$

Γ) $\frac{εφ60^\circ - εφ30^\circ}{εφ45^\circ + εφ30^\circ + εφ60^\circ}$

Ανισότητες – Μέγιστα Ελάχιστα

3.04 Να βρείτε την μέγιστη και την ελάχιστη τιμή των παραστάσεων :

$A=2ημx - 5$ $B=-4συνx$ $Γ = ημx + 4συνy$

Να βρείτε για ποιες τιμές του $κ \in R$ υπάρχει γωνία $ω$ ώστε να ισχύει: $εφω = \frac{3κ}{κ-2}$ και $σφω = \frac{κ}{2-κ}$

3.05 Δείξτε ότι $-\sqrt{2} \le ημx + συνx \le \sqrt{2}$

Να βρείτε για ποιες τιμές του $κ \in R$ υπάρχει γωνία $ω$ ώστε να ισχύει: $εφω = \frac{3κ}{κ-2}$ και $σφω = \frac{κ}{2-κ}$

3.06 Να εξηγήσετε γιατί δεν υπάρχει γωνία x τέτοια ώστε να ισχύει:

Α) $συν^2x < 3συνx - 2$

Β) $ημx < \frac{1}{\sqrt{2}-2}$

Να βρεθούν οι άλλοι τριγωνομετρικοί αριθμοί

3.07 Αν είναι $συνω = -\frac{12}{13}$ και $90 < ω < 180$ να υπολογίσετε την παράσταση

$A = 2ημω - \frac{5}{εφω} + συνω$

3.08 Αν $16συν^2ω - 5 = 0$ και $90^o < ω < 180^o$, να υπολογίσετε τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς.

3.09 Αν $4ημ^2ω = 1$ και $0^o < ω < 180^o$, να υπολογίσετε τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς.

3.10 Αν $0 < ω < 90$ και $εφω = \frac{3}{4}$ να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $A = \frac{3ημω + 2συνω}{4ημω - 9συνω}$

3.11 Αν $17συνω + 8 = 0$ και $90^o < ω < 180^o$ να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης

$A = \frac{ημω - συνω}{εφω}$

Βασικές Ταυτότητες

3.12 Να αποδείξετε ότι:

$$(2x\sigma\upsilon\nu\theta\cdot\eta\mu\theta)^2+x^2(\sigma\upsilon\nu^2\theta-\eta\mu^2\theta)^2=x^2$$

3.13 Να αποδείξετε ότι:

$$(x\eta\mu\omega\sigma\upsilon\nu\varphi)^2+(x\eta\mu\omega\eta\mu\varphi)^2+(x\sigma\upsilon\nu\omega)^2=x^2$$

3.14 Να αποδείξετε ότι:

$$\eta\mu^3\theta\cdot\sigma\upsilon\nu\theta-\eta\mu^5\theta\cdot\sigma\upsilon\nu\theta=\eta\mu^3\theta\cdot\sigma\upsilon\nu^3\theta$$

3.15 Να αποδείξετε ότι:

$$\varepsilon\varphi\omega=\frac{1}{\eta\mu\omega\cdot\sigma\upsilon\nu\omega}-\frac{1}{\varepsilon\varphi\omega}$$

3.16 Να αποδείξετε ότι:

$$\eta\mu^4x-\sigma\upsilon\nu^4x=1-2\sigma\upsilon\nu^2x=2\eta\mu^2x-1$$

3.17 Να αποδείξετε ότι:

$$\frac{\eta\mu\omega+\sigma\upsilon\nu\omega}{\eta\mu\omega-\sigma\upsilon\nu\omega}=\frac{\varepsilon\varphi\omega+1}{\varepsilon\varphi\omega-1}$$

3.18 Να αποδείξετε ότι:

$$\frac{\sigma\upsilon\nu^2\omega-\eta\mu^2\omega}{\eta\mu\omega\cdot\sigma\upsilon\nu\omega}=\frac{1-\varepsilon\varphi^2\omega}{\varepsilon\varphi\omega}$$

3.19 Να αποδείξετε ότι

$$\sqrt{2\varepsilon\varphi x+\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2x}}=1+\varepsilon\varphi x,\ \text{αν}\ 0<x<\frac{\pi}{2}$$

3.20 Αποδείξτε ότι $\dfrac{\varepsilon\varphi^2x-1}{\varepsilon\varphi^2x+1}=\eta\mu^4x-\sigma\upsilon\nu^4x$

3.21 Να αποδείξετε ότι

$$\left(1+\frac{\sigma\upsilon\nu x-1}{\eta\mu x}\right)\left(1+\frac{\eta\mu x+1}{\sigma\upsilon\nu x}\right)=2$$

3.22 Να αποδείξετε ότι

$$\frac{1+\eta\mu\alpha}{1+\sigma\upsilon\nu\alpha}\cdot\frac{1+\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu\alpha}}{1+\dfrac{1}{\eta\mu\alpha}}=\varepsilon\varphi\alpha$$

3.23 Να αποδείξετε ότι

$$\left(\frac{1}{\eta\mu\alpha}-\eta\mu\alpha\right)\left(\frac{1}{\sigma\upsilon\nu\alpha}-\sigma\upsilon\nu\alpha\right)(\varepsilon\varphi\alpha+\sigma\varphi\alpha)=1$$

3.24 Να αποδείξετε ότι:

$$\frac{1-\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x}{1-\eta\mu x}=\frac{1+\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x}{\sigma\upsilon\nu x}$$

3.25 Να αποδείξετε ότι

$$\frac{\eta\mu^3\omega+\eta\mu\omega\cdot\sigma\upsilon\nu^2\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega}=\varepsilon\varphi\omega$$

3.26 Να αποδείξετε ότι:

$$\frac{\varepsilon\varphi^4x+\eta\mu^2x}{\sigma\varphi^4x+\sigma\upsilon\nu^2x}=\varepsilon\varphi^6x$$

3.27 Να αποδείξετε ότι

$$\frac{1+\varepsilon\varphi^7x}{1+\sigma\varphi^7x}=\left(\frac{1+\varepsilon\varphi x}{1+\sigma\varphi x}\right)^7$$

3.28 Να αποδείξετε ότι:

$$\sigma\upsilon\nu^2\alpha+\sigma\upsilon\nu^2\beta+2\eta\mu\alpha\cdot\eta\mu\beta\le 2$$

3.29 Να αποδείξετε ότι

$$\sigma\upsilon\nu^2\alpha+\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha}\ge 2$$

Να αποδείξετε ότι $\sqrt{\dfrac{\dfrac{1}{\eta\mu\theta}-\sigma\varphi\theta}{\dfrac{1}{\eta\mu\theta}+\sigma\varphi\theta}}=\left|\dfrac{\eta\mu\theta}{1+\sigma\upsilon\nu\theta}\right|$

Αναγωγή στο 1ο Τεταρτημόριο

3.30 Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των γωνιών 3510°, -11π, $\frac{11\pi}{2}$, $-\frac{35\pi}{6}$

$\frac{2\kappa\pi}{3}$, $\frac{1000\pi}{3}$, $-\frac{100\pi}{6}$, με $\kappa \in Z$

3.31 Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

A) $\sigma\upsilon\nu\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+\eta\mu\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=0$

3.32 Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$\frac{\varepsilon\varphi\left(\frac{3\pi}{4}\right)\cdot\sigma\varphi\left(\frac{2\pi}{3}\right)\cdot\eta\mu\left(\frac{7\pi}{6}\right)\cdot\sigma\upsilon\nu\left(\frac{11\pi}{6}\right)}{\eta\mu\left(-\frac{\pi}{4}\right)\cdot\varepsilon\varphi\left(\frac{2\pi}{3}\right)\cdot\sigma\upsilon\nu\left(\frac{7\pi}{6}\right)\cdot\eta\mu\left(\frac{11\pi}{6}\right)}$$

3.33 Να αποδείξετε ότι:

A) $\eta\mu\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\sigma\upsilon\nu x=0$

B) $\eta\mu\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{3}-x\right)=0$

3.34 Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ να αποδείξετε ότι : $\varepsilon\varphi(A+B)=-\varepsilon\varphi\Gamma$

3.35 Να αποδείξετε ότι

$$\eta\mu^4\frac{\pi}{8}-\sigma\upsilon\nu^2\frac{3\pi}{8}=-\eta\mu^2\frac{\pi}{8}\cdot\sigma\upsilon\nu^2\frac{\pi}{8}$$

3.36 Να υπολογίσετε την τιμή του γινομένου:

$\sigma\upsilon\nu 0^o\cdot\sigma\upsilon\nu 1^o\cdot\sigma\upsilon\nu 2^o\cdots\sigma\upsilon\nu 2006^o$

Να δείξετε ότι $0<\dfrac{\sigma\varphi(\pi+\theta)-\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)}{\sigma\varphi(\pi+\theta)-\varepsilon\varphi\left(\frac{3\pi}{2}+\theta\right)}<2$

Αν $0<\theta<\frac{\pi}{2}$, να αποδείξετε ότι

$$\sigma\upsilon\nu\left(\frac{3\pi}{2}+\theta\right)\cdot\varepsilon\varphi(\pi+\theta)>2\left[1-\eta\mu\left(\frac{5\pi}{2}-\theta\right)\right]$$

τριγωνομετρικες συναρτησεις

3.37 Να βρείτε τα ακρότατα και την περίοδο της συνάρτησης $f(t)=2\eta\mu\left(\frac{t\pi}{2}\right)$.

3.38 A) Να συγκρίνετε τους αριθμούς $\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{12}$ και $\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{11}$

B) Αν $\frac{3\pi}{4}<\alpha<\beta<\frac{7\pi}{4}$ να συγκρίνετε τις τιμές $[0,\pi]$ και $\eta\mu\left(\beta-\frac{\pi}{4}\right)$

3.39 Αν $3\cdot\eta\mu\theta+\sqrt{3}\cdot\sigma\upsilon\nu\theta=0$, $t\in[0,4\pi]$. Να βρείτε

A) Την περίοδο και το πλάτος της συνάρτησης

B) Το $t\in[0,4\pi]$ ώστε $f(t)=0$.

3.40 Δίνεται περιοδική συνάρτηση f με περίοδο $T>0$, και και $A_f=R$. Στο διάστημα $[0,T]$ η συνάρτηση παρουσιάζει μέγιστη τιμή το 2004 για το μοναδικό $x=\frac{\pi}{4}$ και στο διάστημα $[2T,3T]$ η συνάρτηση παρουσιάζει μέγιστη τιμή για $x=\frac{9\pi}{4}$.

A. Είναι σωστό ή λάθος ότι η μέγιστη τιμή της συνάρτησης είναι το 2004;

B. Αν $f(x)=\alpha\eta\mu(\omega x)$ να βρείτε το α και το ω και να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της συνάρτησης στο διάστημα $[0,3T]$.

Εξισώσεις

Να λύσετε τις εξισώσεις :

Α) $ημ(x-π) = -συν(x-3π)$

Β) $συν\left(x-\frac{π}{4}\right)+ημ\left(\frac{π}{4}-x\right)=0$

Γ) $σφ\left(\frac{π}{3}-x\right)=εφx$

3.41 Να λύσετε τις εξισώσεις :

Α) $ημ\left(x+20^o\right)-συν\left(x+50^o\right)=0$

Β) $ημ\left(x+\frac{π}{4}\right)+συνx=0$

Γ) $ημ\left(x+\frac{π}{4}\right)+συν\left(\frac{π}{3}-x\right)=0$

3.42 Να λύσετε τις εξισώσεις:

Α) $5ημ^2x+συν^2x=2$ στο $[-π,π]$

Β) $εφx\cdot ημx+1=εφx+ημx$

Γ) $εφ2x\cdot σφ5x=1$ στο $[0,π]$

Δ) $\frac{1+ημx}{συνx}+\frac{συνx}{1+ημx}=4$

3.43 Να λύσετε τις εξισώσεις:

Α) $ημ^2x+ημx=0$

Β) $1+ημx=συν^2x$

3.44 Να λύσετε τις εξισώσεις:

Α) $2ημx\cdot εφx=3$

Β) $εφ^4x-4εφ^2x+3=0$

3.45 Να λύσετε τις εξισώσεις:

Α) $εφx=3σφx$

Β) $εφx+σφx=-2$

ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ

3.51 Να λύσετε τις ανισώσεις:

Α) $2ημx<1$ Β) $-2συνx-1>0$

3.46 Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων $f(x)=\frac{2ημx-1}{συνx+1}$, $g(x)=\frac{1}{εφx+1}$, $h(x)=\frac{1}{2συνx-1}$

3.47 Να λυθούν οι εξισώσεις στο $[0,π]$

Α) $\left(4ημ^4x-1\right)\cdot\left(1-|ημx|\right)=0$

Β) $2\cdot ημx\cdot συνx=\sqrt{2}\cdot συνx$

Γ) $3\cdot ημθ+\sqrt{3}\cdot συνθ=0$

3.48 Να λύσετε τις εξισώσεις

Α) $ημ(συνx)=0$

Β) $ημ|x|=1$

Γ) $|ημx|+|συνx|=0$

Δ) $ημ(π\cdot συν2x)=1$

3.49 Να βρείτε τις κοινές λύσεις των εξισώσεων:

Α) $ημ2x=1$ και $συνx=1$

Β) $εφ3x=1$ και $εφ4x=\sqrt{3}$

3.50 Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις

Α) $ημx=-\sqrt{3}$ Β) $συνx=e$

Γ) $ημx=π$ Δ) $συνx=2π$

Ε) $ημx=κπ+\frac{π}{2}$, $κ\in Z$

3.52 Να λύσετε τις ανισώσεις:

Α) $σφx-1\geq 0$ Β) $εφ2x\leq 1$

Τριγωνομετρικοί Αριθμοί α+β

3.53 Να αποδείξετε ότι:
$\sigma\upsilon\nu\alpha + \sigma\upsilon\nu(120+\alpha) + \sigma\upsilon\nu(240+\alpha) = 0$

3.54 Να αποδείξετε ότι:
$(\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x)\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{4}+x\right) = \sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x$

3.55 Να αποδείξετε ότι η παράσταση $\sigma\upsilon\nu^2 x - 2\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu x\sigma\upsilon\nu(\alpha+x) + \sigma\upsilon\nu^2(\alpha+x)$ είναι ανεξάρτητη του x.

3.56 Να αποδείξετε ότι:

A) $\varepsilon\varphi(45^o - \omega) = \frac{\sigma\upsilon\nu\omega - \eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega + \eta\mu\omega}$

B) $\frac{\eta\mu(45^\circ + \alpha) - \sigma\upsilon\nu(45^\circ + \alpha)}{\eta\mu(45^\circ + \alpha) + \sigma\upsilon\nu(45^\circ + \alpha)} = \varepsilon\varphi\alpha$

3.57 Να δείξετε ότι $\varepsilon\varphi^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right) = \frac{1+\eta\mu\theta}{1-\eta\mu\theta}$

3.58 Να αποδείξετε ότι:

A) $\varepsilon\varphi(\alpha+\beta)\varepsilon\varphi(\alpha-\beta) = \frac{\varepsilon\varphi^2\alpha - \varepsilon\varphi^2\beta}{1 - \varepsilon\varphi^2\alpha\,\varepsilon\varphi^2\beta}$

B) $\frac{\varepsilon\varphi^2 2\alpha - \varepsilon\varphi^2\alpha}{1 - \varepsilon\varphi^2 2\alpha\varepsilon\varphi^2\alpha} = \varepsilon\varphi\alpha\cdot\varepsilon\varphi 3\alpha$

3.59 Δείξτε ότι αν $\sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta) = \sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta$ τότε $\eta\mu^2(\alpha+\beta) = (\eta\mu\alpha + \eta\mu\beta)^2$

3.60 Να αποδείξετε ότι:

A) $\frac{2\eta\mu(\alpha+\beta)}{\sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta)+\sigma\upsilon\nu(\alpha-\beta)} = \varepsilon\varphi\alpha + \varepsilon\varphi\beta$

B) $\frac{\eta\mu(\alpha+\beta)}{\eta\mu(\alpha-\beta)} = \frac{\varepsilon\varphi\alpha + \varepsilon\varphi\beta}{\varepsilon\varphi\alpha - \varepsilon\varphi\beta}$

3.61 Να αποδείξετε ότι αν $\eta\mu(\beta-\alpha) = \sigma\upsilon\nu(\beta-\alpha)$, τότε $\varepsilon\varphi\left(\beta - \frac{\pi}{4}\right) = \varepsilon\varphi\alpha$

3.62 Αν $\alpha+\beta+\gamma = 90^o$ να αποδειχθεί ότι:

A) $\varepsilon\varphi\alpha\cdot\varepsilon\varphi\beta + \varepsilon\varphi\beta\cdot\varepsilon\varphi\gamma + \varepsilon\varphi\gamma\cdot\varepsilon\varphi\alpha = 1$

B) $\sigma\varphi\alpha + \sigma\varphi\beta + \sigma\varphi\gamma = \sigma\varphi\alpha\cdot\sigma\varphi\beta\cdot\sigma\varphi\gamma$

3.63 Αν $\alpha+\beta = \gamma$ να αποδείξετε ότι:
$\varepsilon\varphi\gamma - \varepsilon\varphi\alpha - \varepsilon\varphi\beta = \varepsilon\varphi\alpha\cdot\varepsilon\varphi\beta\cdot\varepsilon\varphi\gamma$

3.64 Για τις γωνίες α,β ισχύει $\alpha - \beta = \frac{\pi}{4}$ Να αποδείξετε ότι $(1+\varepsilon\varphi\alpha)\cdot(1-\varepsilon\varphi\beta) = 2$

3.65 Αν $\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu y = \frac{1}{2}$ και $\sigma\upsilon\nu x + \eta\mu y = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ να βρείτε το $\eta\mu(x+y)$

3.66 Αν $\eta\mu x + \eta\mu y = \frac{1}{2}$ και $\sigma\upsilon\nu x + \sigma\upsilon\nu y = \frac{\sqrt{2}}{2}$, να βρείτε το $\sigma\upsilon\nu(x-y)$

3.67 Αν $0 < \omega$, $x < \frac{\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{2} < y < 0$, $\varepsilon\varphi\omega = \frac{2}{5}$, $\varepsilon\varphi x = \frac{3}{2}$ και $\varepsilon\varphi y = -\frac{15}{23}$, τότε $x + y + \omega = \frac{\pi}{4}$

3.68 Αν για τις γωνίες τριγώνου ΑΒΓ ισχύουν: $\varepsilon\varphi A = \frac{1}{2}, \varepsilon\varphi B = \frac{1}{3}$, να αποδείξετε ότι:

A) $\varepsilon\varphi(A+B) = 1$

B) $\hat{\Gamma} = 135^o$

3.69 Να βρεθεί γωνία x με $0 < x < 2\pi$ ώστε να ισχύει $\eta\mu x\sigma\upsilon\nu 122^0 + \sigma\upsilon\nu x\sigma\upsilon\nu 328^0 = \frac{\sqrt{3}\sigma\upsilon\nu 2^0 + \sigma\upsilon\nu 92^0}{2}$

3.70 Αν ισχύουν $\alpha+\beta+\gamma = 180^o$, $\sigma\varphi\frac{\alpha}{2} + \sigma\varphi\frac{\beta}{2} = 2003\sigma\varphi\frac{\gamma}{2}$ και $\gamma \neq (2\kappa+1)\pi$ και να αποδείξετε ότι: $\sigma\varphi\frac{\alpha}{2}\sigma\varphi\frac{\beta}{2} = 2004$

3.71 Αν η εξίσωση $x^2-8x+9=0$, έχει ρίζες τους αριθμούς εφα και εφβ, δείξτε ότι $\varepsilon\varphi(\alpha+\beta)=-1$

3.72 Να αποδείξετε ότι αν σε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει ότι $\eta\mu A\cdot\sigma\upsilon\nu B+\eta\mu B\cdot\sigma\upsilon\nu A=1$ τότε είναι ορθογώνιο.

3.73 Να λύσετε την εξίσωση
$\sigma\upsilon\nu(\sigma\upsilon\nu x)\cdot\sigma\upsilon\nu(\eta\mu x)=\eta\mu(\sigma\upsilon\nu x)\cdot\eta\mu(\eta\mu x)+1$

3.74 Να αποδείξετε ότι αν σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει ότι $\dfrac{\eta\mu\Gamma}{\sigma\upsilon\nu(B-\Gamma)+\sigma\upsilon\nu A}=\sigma\varphi B$ τότε $B=60^o$

Τριγωνομετρικοί αριθμοί 2α

3.75 Να αποδείξετε ότι:

Α)
$$(\eta\mu\alpha-\eta\mu\beta)^2+(\sigma\upsilon\nu\alpha+\sigma\upsilon\nu\beta)^2=4\sigma\upsilon\nu^2\frac{\alpha+\beta}{2}$$

Β) $\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)-\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=2\varepsilon\varphi2\alpha$

Γ) $\dfrac{1+\sigma\upsilon\nu2x+\eta\mu2x}{1-\sigma\upsilon\nu2x+\eta\mu2x}=\sigma\varphi x$

3.76 Να αποδείξετε ότι :

Α) $\dfrac{1+\eta\mu\alpha-\sigma\upsilon\nu\alpha}{1+\eta\mu\alpha+\sigma\upsilon\nu\alpha}=\varepsilon\varphi\dfrac{\alpha}{2}$

Β) $\dfrac{\eta\mu2\alpha}{1+\sigma\upsilon\nu2\alpha}\cdot\dfrac{\sigma\upsilon\nu\alpha}{1+\sigma\upsilon\nu\alpha}=\varepsilon\varphi\dfrac{\alpha}{2}$

3.77 Να αποδείξετε ότι :

Α) $\dfrac{\eta\mu\frac{x}{2}+\eta\mu x}{1+\sigma\upsilon\nu\frac{x}{2}+\sigma\upsilon\nu x}=\varepsilon\varphi\dfrac{x}{2}$

Β) $\dfrac{1+\sigma\upsilon\nu\alpha+\sigma\upsilon\nu\alpha/2}{\eta\mu\alpha+\eta\mu\alpha/2}=\sigma\varphi\alpha/2$

3.78 Να αποδείξετε ότι:

Α) $\eta\mu^4\theta+\sigma\upsilon\nu^4\theta=\dfrac{3+\sigma\upsilon\nu4\theta}{4}$

Β) $\dfrac{\sigma\varphi\alpha+1}{\sigma\varphi\alpha-1}=\dfrac{\sigma\upsilon\nu2\alpha}{1-\eta\mu2\alpha}$

3.79 Αν σε μη αμβλυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει ότι $2\eta\mu B\eta\mu\frac{A}{2}=\eta\mu A$, να δειχτεί ότι είναι ισοσκελές

3.80 Να αποδείξετε ότι:

Α) $\dfrac{4\sigma\varphi\alpha\,(\sigma\varphi^2\alpha-1)}{(1+\sigma\varphi^2\alpha)^2}=\eta\mu4\alpha$

Β) $\dfrac{\eta\mu3\alpha}{\eta\mu\alpha}-\dfrac{\sigma\upsilon\nu3\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha}=2$

Γ) Αν $0<\alpha<\frac{\pi}{6}$, τότε
$2\sigma\upsilon\nu2\alpha-1=\sqrt{3+2\sigma\upsilon\nu4\alpha-4\sigma\upsilon\nu2\alpha}$

3.81 Να αποδείξετε ότι

Α) $\eta\mu^4\frac{\pi}{8}+\eta\mu^4\frac{3\pi}{8}+\eta\mu^4\frac{5\pi}{8}+\eta\mu^4\frac{7\pi}{8}=\frac{3}{2}$

Β) $16(\sigma\upsilon\nu20)(\sigma\upsilon\nu40)(\sigma\upsilon\nu60)(\sigma\upsilon\nu80)=1$

Γ) $\sigma\upsilon\nu\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu2\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu4\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu8\alpha=\dfrac{\eta\mu16\alpha}{16\cdot\eta\mu\alpha}$.

Δ) $\varepsilon\varphi^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)=\dfrac{1+\eta\mu\theta}{1-\eta\mu\theta}$

3.82 Για τη γωνία α είναι γνωστό ότι $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ και ότι $9\sigma\upsilon\nu2\alpha-6\sigma\upsilon\nu\alpha+5=0$. Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας 2α .

3.83 Αν σε μη αμβλυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει ότι $2\eta\mu B\eta\mu\frac{A}{2}=\eta\mu A$, να δειχτεί ότι είναι ισοσκελές

3.84 Αν σε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει η ισότητα: $\eta\mu A\eta\mu B+\sigma\upsilon\nu A\sigma\upsilon\nu(A+\Gamma)=0$, να αποδείξετε ότι είναι ορθογώνιο.

Τριγωνομετρικές Εξισώσεις

3.85 Να λύσετε τις εξισώσεις :

Α) $2\eta\mu^2 x = 3(1-\sigma\upsilon\nu x)$

Β) $\eta\mu 2x = 2\varepsilon\varphi x$

Γ) $\eta\mu 2x - \eta\mu x = \sigma\upsilon\nu 2x - \sigma\upsilon\nu x + 1$

Δ) $\sqrt{3}\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x = 2$

3.86 Να λύσετε τις εξισώσεις:

Α) $\sigma\upsilon\nu x = 2\eta\mu\frac{x}{2} + 1$

Β) $\sigma\upsilon\nu 4x + 2\sigma\upsilon\nu 2x = 0$

Γ) $2\eta\mu x = \eta\mu\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ στο $[2\pi, 5\pi]$

3.87 Να λύσετε τις εξισώσεις:

Α) $\eta\mu^2\frac{x}{2} - \frac{1}{2}\eta\mu 2x = \frac{1}{2} - \sigma\upsilon\nu x$ στο $[0,\pi]$

Β) $\sigma\upsilon\nu 2x \cdot \eta\mu^2 x = -1$ στο $[0,2\pi]$.

Γ) $3\varepsilon\varphi^2 x - 2\sqrt{3}\varepsilon\varphi x + 1 = 0$ αν $x \in [-3\pi, 2\pi]$

3.88 Να λύσετε την εξίσωση

$\eta\mu^{2004}\left(3x - \frac{\pi}{2}\right) + \sigma\upsilon\nu^{2004}\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 0$ στο $(0,2\pi)$.

3.89 Να λύσετε τις εξισώσεις:

Α) $2\sigma\upsilon\nu^2 x + 8 = 17\eta\mu^2 x$

Β) $4\eta\mu^3 x + 8\sigma\upsilon\nu^2 x + \eta\mu x = 5$

Γ) $|2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x + 1| + |3 - 2(2\sigma\upsilon\nu^2 x - 1)| = \eta\mu 2x + 3$

3.90 Αν $\varepsilon\varphi 64^o = 2$ να λυθεί η εξίσωση :

$\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x + 3\sigma\upsilon\nu^2 x = 1$

3.91 Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων $f(x) = 2x - \eta\mu 3x$ και $g(x) = \sigma\upsilon\nu 3x + 2x$ στο διάστημα $(0,2\pi)$.

Γενικές

3.92 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \kappa + \lambda\sigma\upsilon\nu 4x$, $\kappa, \lambda \in R$ που έχει μέγιστο το 7 και είναι $f\left(\frac{\pi}{8}\right) = 2$.

Α) Να υπολογιστούν τα κ, λ

Β) Να βρείτε το ελάχιστο και τη περίοδο της f.

Γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 10\sigma\upsilon\nu 2x - 3$

3.93 Αν $f(x) = 1 + \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x$ με $x \in (0,2\pi)$ τότε:

Α. Να δείξετε ότι $f(x) = 2\sigma\upsilon\nu\frac{x}{2}\left(\eta\mu\frac{x}{2} + \sigma\upsilon\nu\frac{x}{2}\right)$ για κάθε $x \in (0,2\pi)$

Β. Να βρείτε τις τιμές του $x \in (0,2\pi)$ για τις οποίες ισχύει $f(x) \neq 0$

Γ. Για τις τιμές του x που βρήκατε στο β ερώτημα να αποδείξετε ότι: $\frac{f(\pi - x)}{f(x)}\sigma\varphi\frac{x}{2} = 1$

3.94 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sigma\upsilon\nu^3 x \cdot \eta\mu x - \eta\mu^3 x \cdot \sigma\upsilon\nu x$ με $x \in R$.

Α) Να αποδείξετε ότι: $f(x) = \frac{1}{4}\eta\mu 4x$

Β) Να λύσετε την εξίσωση

$f(x) + \varepsilon\varphi\frac{\pi}{3} \cdot f\left(\frac{\pi}{8} - x\right) = \frac{1}{4}$

Γ) Να βρείτε την μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης: $g(x) = 8 \cdot f(x) - 1$.

3.95 Δίνονται οι παραστάσεις:

$A = \frac{-x + \eta\mu\alpha - x\sigma\upsilon\nu\alpha}{1 - x\eta\mu\alpha - \sigma\upsilon\nu\alpha}$ και $B = \frac{1 - \sigma\upsilon\nu 2\alpha + x\varepsilon\varphi^2\alpha}{1 + x + \sigma\upsilon\nu 2\alpha}$

Α) Να δείξετε ότι οι είναι ανεξάρτητες του x.

Β) Αν $\alpha = \frac{\pi}{3}$, να αποδείξετε ότι

$A + B = 3 + \sqrt{3}$

3.96 Έστω η συνάρτηση

$$f(x)=\frac{-\varepsilon\varphi^2\frac{x}{2}+2\varepsilon\varphi\frac{x}{2}+1}{1+\varepsilon\varphi^2\frac{x}{2}}$$

Α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f

Β. Να αποδείξετε ότι $f(x)=\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x$

Γ. Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=-1$

Δ. Η εξίσωση $f(x)=-1$ και η εξίσωση $\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x=-1$ είναι ισοδύναμες;

3.97 Δίνεται η $g(x)=\sqrt{2}\eta\mu\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)-3$

Α) Να βρεθεί η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή της

Β) Για ποιά x έχουμε την μέγιστη τιμή της

Γ) Να λυθεί η εξίσωση: $g(x)-g\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}$

3.98 Αν $f(x)=(\kappa-\lambda)\sigma\upsilon\nu\left[(\kappa+3\lambda)x\right]$ και $g(x)=(2\kappa-3\lambda+2)\sigma\upsilon\nu\left[(2\kappa+\lambda+5)x\right]$, όπου κ,λ θετικοί αριθμοί τότε να βρείτε τους κ,λ ώστε οι συναρτήσεις f και g να έχουν την ίδια μέγιστη τιμή, και η περίοδος της f να είναι διπλάσια της περιόδου της g

3.99 Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\left(\eta\mu^4x+\sigma\upsilon\nu^4x\right)\cdot(\varepsilon\varphi x+\sigma\varphi x)^2$.

Α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της

Β) Να αποδείξετε ότι $f(x)=\varepsilon\varphi^2x+\sigma\varphi^2x$.

Γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=2$.

3.100 Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu 2x+\beta$, $x\in R$ και $\alpha,\beta\in R$ διέρχεται από τα σημεία $A(\pi,1)$ και $B\left(\frac{\pi}{2},3\right)$.

Α) Να υπολογίσετε τους πραγματικούς α, β.

Β) Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή καθώς και την περίοδο της f.

Γ) Να λύσετε την εξίσωση $2\cdot f\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)=3$

3.101 Δίνεται το γραμμικό σύστημα (Σ) με αγνώστους x,y. $(\Sigma)\begin{cases}\eta\mu\theta\cdot x-\sigma\upsilon\nu\theta\cdot y=1\\ \sigma\upsilon\nu\theta\cdot x+\eta\mu\theta\cdot y=1\end{cases}$, $\theta\in R$

Α) Να δείξετε ότι το σύστημα έχει μοναδική λύση (x_0,y_0), την οποία και να βρείτε.

Β) Να λυθεί η ανίσωση: $3x-x^2\le x_0^2+y_0^2$

3.102 Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο: $f(x)=\sqrt{1+\sigma\upsilon\nu x}+\sqrt{1-\sigma\upsilon\nu x}$

Α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

Β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι άρτια.

Γ) Να αποδείξετε ότι η f είναι περιοδική, με περίοδο $T=\pi$.

Δ) Να βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες.

3.103 Τα ετήσια έξοδα μιας επιχείρησης σε χιλιάδες ευρώ δίνονται από τη συνάρτηση $E(t)=300+25\eta\mu\frac{\pi t}{6}$ όπου t ο χρόνος σε έτη. Η επιχείρηση λειτουργεί από την αρχή του 1991 έως και το τέλος του έτους 2002

Α) Ποια έτη τα έξοδα φτάνουν τα 312500 ευρώ

Β) Ποιο έτος έχουμε το μέγιστο ποσό εξόδων;

4 ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ

Έννοια του πολυωνύμου - πράξεις

4.01 Να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο $P(x)=(\kappa-2)x^2+(2\lambda+6)x+\kappa+\lambda-3$ δεν μπορεί να είναι το μηδενικό για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς κ και λ.

4.02 Να βρεθεί για ποιες τιμές των $\kappa, \lambda, \mu \in R$ είναι ίσα τα πολυώνυμα:
$P(x)=\lambda x^2-(\lambda-\kappa)x+\mu-2\lambda$ και
$Q(x)=(\mu-\lambda)x^2+4x+\kappa+\lambda$.

4.03 Να προσδιοριστεί ο $\alpha \in R$ ώστε το πολυώνυμο $P(x)=9x^3-3x^2+8x+27$ να παίρνει τη μορφή $\alpha(x^3+x)-3x^2+(x-3)(x^2+3x+9)$.

4.04 Να βρεθεί πολυώνυμο του οποίου το τετράγωνο να ισούται με το
$P(x)=x^4+2x^3-3x^2-4x+4$

4.05 Δίνονται τα πολυώνυμα $P(x)=2x^2-1$, $\Pi(x)=3x-1$, και $\Phi(x)=3\alpha x^2+2\beta x+\gamma-\alpha$, να βρείτε τα α, β, γ ώστε $P(\Pi(x-1))=\Phi(x+1)$ για κάθε $x \in R$

4.06 Να βρεθεί πολυώνυμο $P(x)$ για το οποίο ισχύει $(2x-1)P(x)=2x^3+5x^2+11x-7$, $x \in R$

4.07 Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=x^2+2x+5$. Να βρεθεί ο πραγματικός αριθμός α αν ισχύει $P(\alpha-1)=13$

4.08 Να προσδιορίσετε τα $A, B, \alpha, \beta, \gamma \in R$ ώστε

A) $$\frac{2x}{(x+1)(x-2)}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-2}$$

B) $$\frac{2x^2+10x-3}{(x+1)(x^2-9)}=\frac{\alpha}{x+1}+\frac{\beta}{x+3}+\frac{\gamma}{x-3}$$

4.09 Προσδιορίστε τα A, B ώστε:
$$\frac{1}{(2\nu-1)(2\nu+1)}=\frac{A}{2\nu+1}+\frac{B}{2\nu-1}$$ για κάθε τιμή του φυσικού αριθμού ν. Να υπολογίστε το
$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\ldots+\frac{1}{(2\nu-1)(2\nu+1)}$$

4.10 Να βρείτε για το βαθμό κάθενός από τα πολυώνυμα για κάθε λ ή α με $\lambda, \alpha \in R$

A) $P(x)=(1-\lambda^2)x^3+(\lambda+1)x^2+x-3$.

B) $P(x)=(\alpha^3-3\alpha^2+2\alpha)x^3+(\alpha^2-\alpha)x+1-\alpha$

Διαίρεση Πολυωνύμων

4.11 Αν το υπόλοιπο της διαίρεσης του πολυωνύμου $P(x)=x^{2000}+\alpha x^{1999}+\ldots+\alpha x^2+\alpha x+\alpha$ δια $x-1$ είναι 2001, να υπολογίσετε το α.

4.12 Να αποδείξετε ότι το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)=\lambda^2x^2+(2\lambda^2-3\lambda+1)x-3(2\lambda+1)$ με το $(x+2)$ είναι ανεξάρτητο του λ.

4.13 Για το πολυώνυμο $P(x)$ ισχύει ότι $P(0)=P(1)=4$. Δείξτε ότι $P(x)=x(x-1)\pi(x)+4$

4.14 Αν το υπόλοιπο της διαίρεσης ενός πολυωνύμου $P(x)$ δια του $x+2$ είναι 5 και το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $x-1$ είναι 2, να βρεθεί το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ δια του $(x+2)(x-1)$

4.15 Δίνονται τα πολυώνυμα $\Phi(x)=x^3-2\lambda x+1$ και $P(x)=\lambda x^2+3(\lambda-1)x+3$. Βρείτε το $\lambda\in R$ ώστε οι διαιρέσεις $P(x):(2x-1)$ και $\Phi(x):x+1$ να δίνουν το ίδιο υπόλοιπο.

4.16 Να βρείτε τα $\alpha,\beta\in R$ αν το πολυώνυμο $P(x)=2x^3+\alpha x^2-13x+\beta$ διαιρείται με x^2-x-6

4.17 Αν το πολυώνυμο $f(x)=x^3+\alpha x^2+\beta x+4$ διαιρείται ακριβώς με το $x-2$ και εάν επιπλέον $f(1)=8$, να προσδιοριστούν τα α,β.

4.18 Έστω $P(x)=3x^3+\alpha x^2+\beta x+6$. Βρείτε τα $\alpha,\beta\in R$ αν το -2 είναι ρίζα του $P(x)$, και το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ δια $(x-1)$ ισούται με -9.

4.19 Να βρεθούν τα $\alpha,\beta\in R$, αν το πολυώνυμο $P(x)=\alpha x^4+\beta x^3-18x^2+15x-5$ διαιρούμενο με το $g(x)=x^2-3x+2$ δίνει υπόλοιπο $\upsilon(x)=4x+7$.

4.20 Να προσδιορίσετε τους πραγματικούς αριθμούς κ,λ ώστε το πολυώνυμο $P(x)=x^4+1$, αν διαιρεθεί με το $x^2+\kappa x+\lambda$ να αφήνει υπόλοιπο 0.

4.21 Να βρεθούν οι πραγματικοί αριθμοί κ,λ ώστε το πολυώνυμο $P(x)=x^3-\kappa x^2+(\lambda-1)x+5$ να έχει παράγοντα το $(x-1)(x+2)$.

4.22 Αν τα υπόλοιπα των διαιρέσεων $P(x):(x-1)$ και $P(x):(x+1)$ είναι αντίστοιχα 3 και 1 να βρεθεί το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x):(x-1)(x+1)$

4.23 Αν το πολυώνυμο $P(x)$ έχει παράγοντα το $x-5$ ναδείξετε οτι το $P(2x-3)$ έχει παράγοντα το $x-4$

4.24 Έστω πολυώνυμο $P(x)$ με σταθερό όρο 1. Το $P(x)$ διαιρούμενο με το $x-\alpha$ δίνει πηλίκο x^2-3x+4 και διαιρούμενο με το $x-\beta$ δίνει πηλίκο x^2-4x+2. Να βρείτε το $P(x)$ και τα α,β.

4.25 Να βρείτε τα $\alpha,\beta\in R$ αν το πολυώνυμο $P(x)=x^3-x^2-(3+\alpha)x+\beta+10$ έχει για παράγοντα το $(x-2)^2$

4.26 Το πολυώνυμο $P(x)$ διαιρούμενο με $x-2$ και $x+3$ δίνει υπόλοιπο 10 και 5 αντίστοιχα. Να βρεθεί το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με $(x-2)(x+3)$

4.27 Αν το πολυώνυμο $P(x)=(\nu+1)x^\nu-\nu x^{\nu+1}+\alpha$ διαιρείται με το $x-1$, τότε αποδείξτε ότι διαιρείται και με το $(x-1)^2$.

4.28 Δίνονται τα πολυώνυμα $P(x)=2x^2-3\lambda x+5$ και $\Phi(x)=3x^3+(\lambda-1)x+3$, $\lambda\in R$. Αν υ_1,υ_2 είναι τα υπόλοιπα των διαιρέσεων $P(x):(x-2)$ και $\Phi(x):(x+1)$ αντίστοιχα να βρεθεί το λ ώστε: Α) $\upsilon_1=\upsilon_2$ Β) $\upsilon_1=2\upsilon_2-1$ Γ) $\upsilon_1+\upsilon_2=0$

4.29 Αν ρ είναι ρίζα του $P(2x-1)$ να αποδείξετε ότι ο $\rho-1$ είναι ρίζα του πολυωνύμου $P(2x+1)$

4.30 Πολυώνυμο $P(x)$ διαιρούμενο δια του $(2x+1)(x-1)(x-3)$ δίνει υπόλοιπο $Y(x)=4x^2+3x+2$. Ποιο υπόλοιπο προκύπτει αν διαιρεθεί δια $2x+1$, δια $x-1$ και δια $x-3$ αντίστοιχα στην κάθε περίπτωση

4.31 Αν το πολυώνυμο $P(x)=x^2+(\alpha-1)x+2\alpha$ έχει ρίζα το -1 να αποδείξτε ότι το ίδιο ισχύει και για το $K(x)=x^3+4x^2+(\alpha^2-1)x$. Το αντίστροφο ισχύει;

4.32 Ένα πολυώνυμο $P(x)$ διαιρούμενο με $x-3$ δίνει πηλίκο $\pi_1(x)$ και διαιρούμενο με $x-4$ δίνει πηλίκο $\pi_2(x)$. Να αποδείξετε ότι: $\pi_1(4)=\pi_2(3)$

4.33 Δίνεται η εξίσωση $x^5+x^4+\kappa x+\lambda=0$. Να προσδιοριστούν οι κ,λ ώστε το πολυώνυμο να έχει ρίζα το -1 με πολλαπλότητα 2 (διπλή ρίζα). Μετά να βρεθούν και οι άλλες ρίζες της εξίσωσης.

4.34 Να βρεθούν οι πραγματικοί αριθμοί α και β έτσι ώστε η εξίσωση $x^5-\alpha x^3+\beta x^2+x-1$ να έχει το ανώτερο δυνατό πλήθος ακεραίων ριζών.

4.35 Να βρεθούν οι πραγματικοί αριθμοί α,β ώστε το $(x+1)^2$ να είναι παράγοντας του πολυωνύμου : $P(x)=x^3-\alpha x^2+(\alpha+\beta)x-1$

4.36 Να βρεθούν τα πολυώνυμα $f(x),g(x)$ αν

A) $f(x+1)=x^2-2x+3$ B) $g(3x+1)=9x^2-6x+1$

4.37 Δίνεται πολυώνυμο $P(x)$ που ικανοποιεί τη συνθήκη: $P(x^2+1)=[P(x)]^2+1$. Αν $P(0)=1$ και $P(2)=2$, να βρείτε τα $P(1)$, $P(5)$ και $P(26)$.

4.38 Έστω πολυώνυμο $\Phi(x)$ για το οποίο ισχύει ότι $\Phi(x)=\Phi(4x+3)$. Να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο $P(x)=\Phi(x)-\Phi(1)$ διαιρείται με το $2x+1$

4.39 Αν το πολυώνυμο $P(x)$ έχει την ιδιότητα: $P(x)=P(1-x)$ και $P(0)\neq 0$, να δείξετε ότι το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x):(x-x^2)$ είναι σταθερός αριθμός.

4.40 Δίνονται τα πολυώνυμα $P(x)=x^3-1$ και $Q(x)=x^2+\alpha x+\beta$. Να βρείτε τους $\alpha,\beta\in R$ ώστε το $P(x)$ να διαιρείται ακριβώς με το $Q(x)$.

4.41 Δίνονται τα πολυώνυμα $P(x)=x^3-2x^2+x+4\lambda$, $Q(x)=\lambda\cdot x^4-2x^3+x+2$ με $\lambda\in R$. Να βρεθεί το λ ώστε το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x):(x-1)$ να είναι τριπλάσιο από το υπόλοιπο της διαίρεσης $Q(x):(x+1)$.

4.42 Αν ισχύει $P(1-2x)=3\cdot P(x)+8$ και $P(1)=\kappa$ για ένα πολυώνυμο $P(x)$, να βρεθεί η τιμή του $\kappa\in R$ ώστε $P(-5)=23$.

4.43 Αν η πολυωνυμική εξίσωση $x^3+\alpha x+\beta=0$ έχει παράγοντα το $(x-\lambda)^2$, να δείξετε ότι $\frac{\alpha^3}{27}+\frac{\beta^2}{4}=0$

4.44 A) Να βρεθεί πολυώνυμο 3ου βαθμού ώστε να ισχύουν ότι $P(0)=0$ και $P(x)-P(x-1)=x^2$ για κάθε $x\in R$

B) Να υπολογίσετε το $S=1^2+2^2+...+\nu^2$

Πολυωνυμικές Εξισώσεις - Εξισώσεις που ανάγονται σε πολυωνυμικές

4.45 Να λύσετε τις εξισώσεις:

Α) $\left(x^2+3x-2\right)^6-9\left(x^2+3x-2\right)^3+8=0$

Β) $(x+2)^8-3(x+2)^4-4=0$

4.46 Να αποδείξετε ότι για κάθε $\kappa,\lambda\in Z$ οι παρακάτω εξισώσεις δεν έχουν ακέραιες ρίζες:

Α) $5x^{2\nu}+9\kappa x-1=0$

Β) $8\lambda x^{2\nu}-2(\kappa-1)x+1=0$

4.47 Να λύσετε τις ανισώσεις

Α) $x^3-2x^2-x+2>0$ Β) $x^3+3x\geq 5x^2-9$

4.48 Να λύσετε τις ανισώσεις

Α) $\sqrt{3x+7}<\sqrt{x+3}$ Β) $x-1\geq\sqrt{x+5}$

4.49 Να λύσετε τις ανισώσεις

α) $\dfrac{x^3+2x-4}{x-2}<1$ β) $\dfrac{x^2}{x+1}-\dfrac{4}{x-1}\leq\dfrac{2}{x^2-1}$

4.50 Να λύσετε τις εξισώσεις

Α) $\sqrt{x-8}=x-10$

Β) $\sqrt{2+\sqrt{x-5}}=\sqrt{13-x}$

Γ) $x^2+2x-7+\sqrt{x^2+2x+8}=5$

4.51 Να λύσετε τις εξισώσεις

Α) $\sqrt{x-1}-1=\dfrac{2}{\sqrt{x-1}}$ Β) $\dfrac{4-\sqrt{x}}{2}=\dfrac{\sqrt{4x+20}}{4+\sqrt{x}}$

Συνδυαστικές Πολυώνυμα με Τριγωνομετρία

4.52 Αν το πολυώνυμο

$P(x)=\left(2\eta\mu^2\alpha-3\eta\mu\alpha+1\right)x^3+(2\eta\mu\alpha-1)x^2-2x+4$

είναι 2ου βαθμού, να βρεθεί το $\alpha\in(0,\pi)$.

4.53 Αν το πολυώνυμο

$P(x)=(\sigma\upsilon\nu\alpha)x^3+(\eta\mu^2\alpha)x^2-3x+2$ έχει παράγοντα το $(x-\sigma\upsilon\nu\alpha)$, βρείτε το $\alpha\in(-\pi,\pi)$.

4.54 Βρείτε τις τιμές του $\alpha\in R$, ώστε το πολυώνυμο $P(x)=x^4\eta\mu3\alpha+x^2\eta\mu2\alpha+x\eta\mu\alpha$, διαιρείται ακριβώς με το $x-1$.

4.55 Να βρείτε το $\alpha\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ αν το $x+1$ είναι παράγοντας του

$P(x)=x^4-\left(3\eta\mu\alpha-4\eta\mu^3\alpha\right)x^3+2x^2\eta\mu2\alpha-x\eta\mu\alpha-1$

.

4.56 Να βρεθεί το ω με $0^o\leq\omega\leq360^o$ ώστε να ισχύει $3\eta\mu^3\omega+5\eta\mu^2\omega-4\eta\mu\omega-4=0$.

4.57 Να λυθεί η εξίσωση $3\sigma\upsilon\nu x-\sqrt[3]{\sigma\upsilon\nu x}=2$ αν $x\in\left(2\kappa\pi-\dfrac{\pi}{2},2\kappa\pi+\dfrac{\pi}{2}\right)$ με $\kappa\in Z$

4.58 Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $(2\eta\mu x-1)^4+6(\eta\mu x-1)^2-7=0$

β) $2\eta\mu^3x+5\eta\mu^2x+5\eta\mu x+2=0$

γ) $2\sigma\upsilon\nu^4x-5\sigma\upsilon\nu^3x+5\sigma\upsilon\nu x-2=0$

4.59 Έστω $f(x)=1-\sigma\upsilon\nu x$ και το πολυώνυμο $P(f(x))=f^3(x)-(1+f(x))^2$. Να βρεθούν για ποιες τιμές του x μηδενίζεται το πολυώνυμο.

4.60 Δίνεται το πολυώνυμο

$P(x)=\kappa x^3+\lambda x^2+x-1$ το οποίο έχει παράγοντα το πολυώνυμο x^2-1.

Α) Να βρεθούν οι πραγματικοί αριθμοί κ,λ

Β) Να λυθεί η εξίσωση $P(x)=0$

Γ) Να λυθεί η ως προς x η ανίσωση:

$\eta\mu\alpha\cdot P(x)\leq P(x)$, με $0<\alpha<\pi$

Γενικές Ασκήσεις στα Πολυώνυμα

4.61 Έστω το πολυώνυμο $P(x)=x^3-(\kappa+2)x^2+(\kappa-1)x+3\kappa-1$, $\kappa\in R$ για το οποίο είναι γνωστό ότι έχει παράγοντα το $(x+1)$.

Α. Να βρίτε την τιμή του κ.

Β. Να λυθεί η εξίσωση $P(x)=0$.

4.62 Το πολυώνυμο $P(x)=x^3+\alpha x^2+11x+\beta$ διαιρούμενο δια $(x-1)(x-2)$ δίνει πηλίκο $\Pi(x)$ και αφήνει υπόλοιπο $\upsilon(x)=4$

Α Να υπολογιστούν τα $\alpha,\beta\in R$.

Β Να βρεθεί το $\Pi(x)$.

Γ Να λυθεί η ανίσωση $P(x)\le 4$

4.63 Δίνεται τι πολυώνυμο $P(x)=\kappa\cdot x^4-x^3-\left(\kappa^3+1\right)\cdot x^2+\kappa^2\cdot x+4$.

α) Να βρεθεί το κ, ώστε το $P(x)$ να έχει παράγοντα το $x-1$.

β) Για την τιμή του κ που βρήκατε, να λύσετε την ανίσωση $P(x)>0$

4.64 Έστω το πολυώνυμο $P(x)=(\alpha-1)x^4+\alpha x^3+3x^2+(1-\alpha)x+\beta$

Α. Να διερευνηθεί ο βαθμός του $P(x)$ για τις διάφορες τιμές του $\alpha\in R$

Β. Στην περίπτωση που είναι τρίτου βαθμού, βρείτε την τιμή του $\beta\in R$ ώστε το -1 να είναι ρίζα του $P(x)$ και να λύσετε την εξίσωση $P(x)=0$.

4.65 Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=x^3-2x^2+\kappa x+1$, όπου $\kappa\in R$.

Α) Για $\kappa=-3$, να βρείτε το πηλίκο και το υπόλοιπο της διαίρεσης του πολυωνύμου $P(x)$ με το πολυώνυμο $(x-3)$.

Β) Να βρείτε τις τιμές του κ ώστε το $P(x)$ να έχει μία τουλάχιστον ακέραια ρίζα.

Γ) Για $\kappa=0$, να λύσετε την εξίσωση $P(x)=0$.

4.66 Δίνονται τα πολυώνυμα:
$P(x)=(\kappa-3)x^3+(\kappa+\lambda)x^2+(31-\lambda)x+24$,
$Q(x)=x^3+9x^2+26x+24$ όπου $\kappa,\lambda\in R$

Α. Να βρείτε για ποιες τιμές των κ,λ τα πολυώνυμα $P(x)$, $Q(x)$ είναι ίσα.

Β. Να αποδείξετε ότι ο αριθμός -2 είναι ρίζα του πολυωνύμου $Q(x)$.

Γ. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $Q(x)=0$ δεν έχει θετική ρίζα.

4.67 Έστω το πολυώνυμο $P(x)=2x^2-\alpha x+\alpha$, όπου α πραγματικός αριθμός.

Α) Να αποδείξετε ότι το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x):(x-\alpha+1)$ είναι $\upsilon=(\alpha-1)^2+1$

Β) Να βρείτε την τιμή του α ώστε αυτό το υπόλοιπο να είναι το μικρότερο δυνατό.

4.68 Δίνεται το πολυώνυμο: $P(x)=x^3-(\kappa+1)x^2+(\kappa-1)x+2$, $\kappa\in R$, για το οποίο ισχύει ότι $P(2)=0$.

Α) Να αποδείξετε ότι $\kappa=2$.

Β) Να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης του $P(x)$ με το πολυώνυμο $x+3$.

Γ) Να λύσετε την εξίσωση $P(x)=x-2$

4.69 Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=\alpha x^3+\beta x+2$, όπου $\alpha,\beta\in R$

Α) Να αποδείξετε ότι $P(2004)+P(-2004)=4$

Β) Να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης του πολυωνύμου $P(x)$ με το πολυώνυμο $Q(x)=x$

Γ) Να αποδείξετε ότι το υπόλοιπο της διαίρεσης του πολυωνύμου $P(x)$ με το πολυώνυμο $x-1$ είναι $\upsilon=\alpha+\beta+2$.

Δ) Αν $\alpha=1$ και το πολυώνυμο $P(x)$ έχει ρίζα τον αριθμό 1, τότε να υπολογίσετε το β και να λύσετε την εξίσωση $P(x)=0$

5 ΕΚΘΕΤΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

5.01 Να βρείτε τις τιμές του $\alpha \in R$ ώστε οι παρακάτω συναρτήσεις να ορίζονται για κάθε $x \in R$

Α) $f(x)=\left(\frac{1-\alpha}{\alpha+2}\right)^x$. Β) $f(x)=\left(\frac{2\alpha-1}{1+\alpha}\right)^x$.

5.02 Έστω η συνάρτηση $f(x)=\left(1-\kappa^2\right)^x$.

Α) Για ποιες τιμές του κ η f ορίζεται στο R;

Β) Να εξετάσετε αν υπάρχουν τιμές του κ για τις οποίες η f είναι γνησίως αύξουσα.

Γ) Να βρείτε το κ ώστε η γραφική παράσταση της $f(x)$ να περνάει από το σημείο $P\left(1,\frac{1}{2}\right)$.

Δ) Να βρείτε τις τιμές του κ ώστε η γραφική παράσταση της f να περνάει από το σημείο $(2,1)$

5.03 Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\left(\frac{\alpha+1}{3-\alpha}\right)^x$ με πεδίο ορισμού το R. Να βρείτε τις τιμές του $a \in R$ για τις οποίες η συνάρτηση:

Α) είναι γνησίως αύξουσα

Β) είναι σταθερή.

5.04 Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\left(\frac{2\lambda+1}{\lambda-1}\right)^x$

Α) Για ποιές τιμές του λ ορίζεται, $\forall x \in R$

Β) Να υπολογίσετε τις τιμές του λ για τις οποίες ισχύει $f(1)+f(2)+f(3)=3f(0)$.

Γ) Αν για κάθε $x<0$ ισχύει $f(x)>1$ να βρείτε τις τιμές του λ.

5.05 Αν $f(x)=e^x$ τότε να αποδείξετε ότι:

Για κάθε $x, y \in R$ ισχύουν:

Α) $f(x+y)=f(x)\cdot f(y)$

Β) $f(x)=f(y)\cdot f(x-y)$.

Γ) $[f(x)]^v=f(vx)$ για κάθε $x \in R$, $v \in N^*$

Δ) $\frac{f(x)+f(y)}{2}>f\left(\frac{x+y}{2}\right)$ με $x \neq y$

Εξισώσεις

5.06 Να λύσετε τις εξισώσεις

Α $2^{x^2-5x+6}=1$

Β) $4^{3x}=2^4\cdot 16^{\frac{x}{2}}$

Γ) $\left(\frac{1}{3}\right)^x=27$

Δ) $\left(\frac{5}{3}\right)^{x+1}\left(\frac{9}{25}\right)^{x^2+2x-11}=\left(\frac{5}{3}\right)^9$

5.07 Να λύσετε τις εξισώσεις

Α) $9^x-2\cdot 3^x-3=0$

Β) $5\cdot 2^x=2^{x+3}-3\sqrt{2}$

5.08 Να λύσετε τις εξισώσεις

Α) $3^{\frac{2}{x}}-4\cdot 3^{\frac{1}{x}}+3=0$

Β) $3^{x+1}-28+9\cdot 3^{-x}=0$

Γ) $4^x-3^{x-\frac{1}{2}}=3^{x+\frac{1}{2}}-2^{2x-1}$

Δ) $2^x-5\sqrt{2^x}+4=0$.

5.09 Να λύσετε τις εξισώσεις:

Α) $e^{2x}+e=e^x+e^{x+1}$

Β) $7^{3x+2}+4^{x+2}=7^{3x+4}+4^{x+3}$

5.10 Να λύσετε τις εξισώσεις:

Α) $2^{2x-1}+3^x+4^{x+1}-9^{\frac{x}{2}+1}=0$

Β) $\sqrt[x]{64^{2x-1}}=\sqrt{16^{2x-1}}$

Γ) $9^x+6^x=2\cdot 4^x$

5.11 Να λύσετε τις εξισώσεις:

Α) $\left(3^x-2\right)^2+3^x\left(3^x-1\right)=7$

Β) $3\cdot 2^{2x}=2\left(4^x+1\right)\left(1-4^x\right)$.

Γ) $5^{x^2+1}+25^{x^2}=6$

5.12 Να λύσετε τις εξισώσεις:

Α) $2^x + 6x - 40 = 0$ Β) $7\left(11+6\sqrt{2}\right)^x = 3-\sqrt{2}$

5.13 Να λύσεις τις εξισώσεις:

Α) $9^x + 1 = 2\cdot 3^x\cdot \sigma\upsilon\nu x$

Β) $2^x + 2^{-x} = 2|\sigma\upsilon\nu x|$

Γ) $x^2\left(2^{|x-3|+4} - 2^{x+1}\right) = 2^{|x-3|+2} - 2^{x-1}$

Ανισώσεις

5.14 Να λύσετε τις ανισώσεις

Α) $3^{x^2-7x+6} < 1$ Β) $3^{2-|x|} > 1$

Γ) $(0,5)^{5x-x^2-1} < 0,125$ Δ) $9^{\frac{1}{x}} \le \sqrt{3^x}$

Ε) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-2x} < \left(\frac{1}{4}\right)^{x+\frac{5}{2}}$ ΣΤ) $\left(\frac{4}{5}\right)^{2x^2-x+1} \ge 1$

5.15 Να λύσετε τις ανισώσεις

Α) $4^x - 6\cdot 2^x + 8 < 0$

Β) $3^{x+\frac{1}{2}} + 3^{x-\frac{1}{2}} \ge 4^{x+\frac{1}{2}} - 2^{2x-1}$

Γ) $e^{2x} + e \ge e^x + e^{x+1}$

5.16 Να λύσετε τις ανισώσεις:

Α) $e^x + 3 \ge 3e^x + e^{2x}$

Β) $27^x + 12^x - 2\cdot 8^x > 0$

Γ) $9^{x+1} - 108\cdot 3^x + 243 > 0$

Δ) $4^{\eta\mu^2 x} + 4^{\sigma\upsilon\nu 2x} \le 5$

5.17 Να λύσετε την ανίσωση $\frac{e^{2x}-e^x}{e^x - e} < -1$

5.18 Να λύσετε τις ανισώσεις:

Α) $\frac{e^x-1}{e^x+1} > \frac{1}{2}$ Β) $\frac{2e^x-3}{e^x-1} > 2$

Συστήματα

5.19 Να λύσετε τα συστήματα:

Α) $\begin{cases} 4^x\cdot 2^{y-2} = 32 \\ 3^{x+2}\cdot 3^{y-4} = 27 \end{cases}$ Β) $\begin{cases} 2^x.3^y = 54 \\ 3^x.2^y = 24 \end{cases}$

Γ) $\begin{cases} 3^{x-y} - 4^{x-2y+1} = -13 \\ 2\cdot 3^{x-y} + 3\cdot 4^{x-2y} = 18 \end{cases}$ Δ) $\begin{cases} 3^{\frac{x-y}{2}} - 3^{\frac{x-y}{4}} = 6 \\ 2^{\frac{x+y}{3}} - 2^{\frac{x+y}{6}} = 2 \end{cases}$

5.20 Να λύσετε τα συστήματα:

Α) $\begin{cases} 3.2^x - 2^{x+y} + 2 = 0 \\ 5.2^{x+1} - 2^{x+y-1} - 16 = 0 \end{cases}$ Β) $\begin{cases} 3^x - 2^{y+3} = 15 \\ 2^y - 3^{x-3} = 3 \end{cases}$

Προβλήματα

5.21 Σ' ένα ασθενή με υψηλό πυρετό χορηγείται ένα αντιπυρετικό φάρμακο. Η θερμοκρασία $\Theta(t)$ του ασθενούς t ώρες μετά την λήψη του φαρμάκου δίνεται από τον τύπο $\Theta(t) = 36 + 4\left(\frac{1}{2}\right)^t$ βαθμοί Κελσίου.

Α) Να βρείτε πόσο πυρετό είχε ο ασθενής τη στιγμή που του χορηγήθηκε το φάρμακο.

Β) Να βρείτε σε πόσες ώρες η θερμοκρασία του ασθενούς θα πάρει την τιμή 36.5^o C

Γ) Αν η επίδραση του αντιπυρετικού διαρκεί 4 ώρες πόση θα είναι η θερμοκρασία του ασθενούς μόλις σταματήσει η επίδρασή του

5.22 Μελετώντας την ανάπτυξη ενός είδους βακτηριδίων παρατηρήθηκε ότι 2 ώρες μετά την έναρξη της παρατήρησης τα βακτηρίδια ήταν 400 ενώ 4 ώρες μετά την έναρξη της παρατήρησης ήταν 3200. Αν ο αριθμός των βακτηριδίων είναι $P(t) = P_o\cdot 2^{ct}$, όπου $P(t)$ ο αριθμός των βακτηριδίων σε χρόνο t, P_o ο αρχικός αριθμός και c σταθερά τότε:

Α) Να βρείτε τη σταθερά c και τον αρχικό αριθμό των βακτηριδίων.

Γ) Σε πόσα λεπτά ο αρχικός αριθμός των βακτηριδίων είχε διπλασιαστεί;

6 ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

6.01 Να αποδείξετε τις παρακάτω ισότητες :

Α) $3\log 2+\log 5-\log 4=1$

Β) $\frac{1}{2}\log 25+\frac{1}{3}\log 8+\frac{1}{5}\log 32=1+\log 2$

Γ) $\log\frac{11}{3}-2\log\sqrt{\frac{7}{44}}+\log\frac{21}{121}=2\log 2$

6.02 Να αποδείξετε τις παρακάτω ισότητες

Α) $\frac{\log 2+\log 3}{\log 3,6+1}=\frac{1}{2}$

Β) $\log\left(\eta\mu\frac{\pi}{6}\right)=-\log 2$

Γ) $\log\left(\eta\mu\frac{\pi}{6}\right)\cdot\log\left(\eta\mu\frac{\pi}{3}\right)\cdot\log\left(\eta\mu\frac{\pi}{2}\right)=0$

6.03 Να υπολογίσετε την παράσταση:

$\ln\frac{1}{e}-\ln\sqrt{e}+\ln(\ln e)-\ln 2^{\log_2 e}+\ln(\log_2 4)$

6.04 Να αποδείξετε ότι

$(\log 5)^3+(\log 20)^3+\log 8\log 0,25=2$

6.05 Αν α,β,γ διάφοροι μεταξύ τους θετικοί αριθμοί, και ισχύει: $\frac{\log\alpha}{\beta-\gamma}=\frac{\log\beta}{\gamma-\alpha}=\frac{\log\gamma}{\alpha-\beta}$ να αποδείξετε ότι $\alpha^{\alpha}\cdot\beta^{\beta}\cdot\gamma^{\gamma}=1$.

6.06 Να αποδείξετε ότι

Α) $\log(1-\frac{1}{2})+\log(1-\frac{1}{3})+\ldots+\log(1-\frac{1}{100})=-2$

Β) Αν $0<\alpha,\beta,\gamma\neq 1$ τότε $\alpha^{\log\frac{\beta}{\gamma}}\cdot\beta^{\log\frac{\gamma}{\alpha}}\cdot\gamma^{\log\frac{\alpha}{\beta}}=1$

6.07 Αν $x>0$, $y>0$ και $x^2+y^2=7xy$, να αποδείξετε ότι: $\log_\alpha\frac{x+y}{3}=\frac{1}{2}(\log_\alpha x+\log_\alpha y)$

Εξισώσεις

6.08 Να λύσετε τις εξισώσεις:

Α) $\log(4x-1)=2\log 2+\log(x^2-1)$

Β) $\frac{1}{2}\log(x+2)+\log\sqrt{x-3}=1+\log\sqrt{3}$

6.09 Να λύσετε τις εξισώσεις :

Α) $x+\log(1+2^x)=x\log 5+\log 6$

Β) $\log_2(3^{2x-2}+7)=2+\log_2(3^{x-1}+1)$

Γ) $x(\log 10-\log 5)=\log(4^x-12)$

6.10 Να λύσετε τις εξισώσεις

Α) $\log(3^x+2.5^x)-x\log 5=\log 39-\log 15$

Β) $3^{2x}+9^x=11\cdot 4^{x-1}+4^{x+1}$

Γ) $2^{2x-1}+3^x+4^{x+\frac{1}{2}}-9^{\frac{x}{2}+1}=0$

6.11 Να λύσετε τις εξισώσεις:

Α) $\log(\log(2x^2+x-11)=0$

Β) $\log(3^x+2)=2x\log 3$

6.12 Να λύσετε τις εξισώσεις:

Α) $\log(2^x+2\cdot 3^x)+\log 81=x\log 3+\log 243$

Β) $2^{\log x}+2^{5-\log x}=12$

Γ) $27^{\frac{x+2}{3}}+3^{2x+2}=810$

6.13 Να λύσετε τις εξισώσεις:

Α)

$(\log_2 x)^4-5(\log_2 x)^3+5(\log_2 x)^2+5\log_2 x=6$

Β) $\ln(\sigma\upsilon\nu x)=0$

Γ) $\log_x 1000=(\log_x 10)^2+2$

Δ) $2\cdot(\log_x 8)^2+\log_x 64+\log_x 8=9$

6.14 Να λυθούν οι εξισώσεις:

Α) $\frac{1}{2}\log x - \log 4 = \log(x+1) - 1$

Β) $\log(1-2x^2) + \log(1-x) = -\log 4$

6.15 Α) Να υπολογίσετε τον αριθμό $5^{2\log_5 10 - 3}$

Β) Να αποδείξετε ότι: $3^{\log x} = x^{\log 3}$ και $x^{\log 5} = 5^{\log x}$

Γ) Να λύσετε τις εξισώσεις

α) $3^{\log x} = 54 - x^{\log 3}$ και

β) $5^{2\log x} = 5 + 4\cdot x^{\log 5}$

6.16 Να υπολογίσετε τον αριθμό $100^{\log\sqrt{3}}$ και να λύσετε την εξίσωση

$3^{2\log x} - 2\cdot 3^{\log x} - 100^{\log\sqrt{3}} = 0$

6.17 Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \frac{\sqrt{1-\ln x}}{\ln x}$.

Α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της,

Β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = \sqrt{2}$.

6.18 Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων

Α) $f(x) = \sqrt{1-x} + \ln x$

Β) $f(x) = \frac{1}{x-1} + \ln 2x$

Γ) $f(x) = \frac{1}{\ln x} + \frac{1}{e^x}$

Δ) $f(x) = \sqrt{1-\ln x}$

6.19 Να λύσετε τις εξισώσεις:

Α) $2\cdot 4^{x^3}\cdot 16^{x^2-x} = 8$

Β) $\log_{x+2}\left(17x^2 - 6x + 8\right) = 3$

Ανισώσεις

6.20 Να βρεθεί το πρόσημο των αριθμών:

$\log_4 3$, $\log_{\frac{2}{5}}\left(\frac{4}{5}\right)$, $\log_{\frac{2}{3}} 5$, $\log_3 \frac{1}{4}$.

6.21 Να συγκριθούν οι αριθμοί:

Α) $\log_{\frac{2}{5}} 6$, $\log_{\frac{2}{5}} 11$

Β) $\log_6 4$, $\log_5 4$.

Γ) $\log(1-4x)$ και $2\log(x-2)$.

6.22 Να λύσετε τις ανισώσεις:

Α) $-2\left(\frac{1}{5}\right)^{2x} + 3\left(\frac{1}{5}\right)^{x} - 1 \le 0$

Β) $\log^2 x \ge \log x + 2$

Γ) $5\cdot 25^x - 2\cdot 5^{x+1} - 5^x + 2 > 0$

6.23 Να λυθούν οι ανισώσεις:

Α) $\ln^2 x - \ln\frac{1}{x} - 2 > 0$.

Β) $\ln(\ln(x+3)) > 0$.

6.24 Να αποδειχτεί ότι: $2 < 4\log_3 2 < 3$.

6.25 Να λύσετε τις ανισώσεις:

Α) $\ln^2 x - 5\ln x + 6 > 0$

Β) $\ln^2 x > \ln x$

Γ) $(\log x^3)^2 - 2\log x^2 - 5 < 0$

Δ) $\log(x^2 - 4) > \log 3|x|$.

6.26 Να λυθούν οι ανισώσεις:

Α) $[\log(2x-1)]^2 - \log(2x-1) - 2 \le 0$

Β) $\log[\log(\log x)] \ge 0$.

6.27 Έστω $\alpha, \beta > 0$, ώστε $(\log\beta)^2 = \log\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2$.

Να αποδείξετε ότι: α) $\beta \ge \alpha$. β) $\alpha \le \sqrt{10}$

Συστήματα

6.28 Να λύσετε τα συστήματα :

A) $\begin{cases} y^{\log x} = 100 \\ \log(xy) = 3 \end{cases}$

B) $\begin{cases} \log x + \log y = 1 \\ 9^{x-2y}.3^{y} = 81 \end{cases}$

6.29 Να λύσετε το σύστημα $\begin{cases} x^2 + y^2 = 425 \\ \log x + \log y = 2 \end{cases}$

6.30 Να βρείτε δύο θετικούς αριθμούς που οι φυσικοί τους λογάριθμοι έχουν άθροισμα 2 και γινόμενο -8.

6.31 A) Να δείξετε ότι $x^{\log y} = y^{\log x}$ με $x, y > 0$

B) Να λύσετε το σύστημα: $\begin{cases} x^{\log y} + y^{\log x} = 20 \\ \log\sqrt{x \cdot y} = 1 \end{cases}$

Γ) Αν οι λύσεις του (ii) είναι ρίζες της εξίσωσης: $\log\left[\log\left(x^2 + x\log\theta - 110\right)\right] = 0$ να βρείτε το $\theta \in R_+^*$

6.32 Αν οι ρίζες τις εξίσωσης $\log\left[\log\left(x^2 + x\log\theta + 110\right)\right] = 0$ αποτελούν λύση του συστήματος: $\left\{\begin{matrix} y^{\log z} + z^{\log y} = 20 \\ \log\sqrt{yz} = 1 \end{matrix}\right\}$ να αποδείξετε ότι $\theta = 10^{-20}$

Α.Β.

6.33 Να αποδειχθεί ότι για κάθε $0 < \alpha, \beta \neq 1$ ισχύει: $\left[\log_\alpha(\alpha\beta)\right]^{-1} + \left[\log_\beta(\alpha\beta)\right]^{-1} = 1$

6.34 Να αποδειχτεί ότι:

$\log_{\alpha\beta}\theta = \left(\dfrac{1}{\log_\alpha\theta} + \dfrac{1}{\log_\beta\theta}\right)^{-1}$, με $0 < \alpha, \beta \neq 1$, $\theta > 0$.

6.35 Αν $\log_\beta x = \alpha$ και $0 < \alpha, \beta, x \neq 1$, να αποδείξετε ότι:

A) $\log_{\frac{1}{\beta}} x = -\alpha$ B) $\log_{\alpha\beta} x = \dfrac{\log_\alpha x}{1 + \log_\alpha \beta}$.

6.36 Αν $0 < \alpha, \beta \neq 1$, να αποδειχτεί ότι:

$\log_\alpha\left(\dfrac{1}{\beta^{10}}\right) \cdot \log_\beta \alpha^{10} + 100 = 0$.

6.37 Αν $0 < x \neq 1$ και $0 < \alpha, \beta \neq 1$ και ισχύει: $\dfrac{1}{\log_3 x} + \dfrac{1}{\log_\alpha x} + \dfrac{1}{\log_\beta x} = 0$ να δείξετε ότι $\alpha \cdot \beta = \dfrac{1}{3}$.

6.38 Αν οι αριθμοί α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου με $0 < \alpha, \beta, \gamma, \theta \neq 1$, να αποδειχτεί ότι: $\dfrac{2}{\log_\beta\theta} = \dfrac{1}{\log_\alpha\theta} + \dfrac{1}{\log_\gamma\theta}$.

6.39 Αν $\log_{\alpha^2}\alpha = x, \log_{\alpha^3}\alpha^2 = \psi, \log_{\alpha^4}\alpha^3 = \omega$ με $0 < \alpha \neq 1$, να αποδειχτεί ότι:

$x + \psi + \omega = x\psi\omega + \dfrac{20}{12}$.

6.40 Αν $0 < \alpha \neq 1$ και $x = \log_{\sqrt{\alpha}}\alpha$, $y = \log_\alpha \alpha^2$, $z = \log_{\alpha^2}\alpha^4$, να αποδειχτεί ότι: $x + y + z + 2 = xyz$.

Συνδιαστικές με τριγωνομετρία

6.41 Αν $x \in \left(0\,,\,\frac{\pi}{2}\right)$ να αποδείξετε ότι:

$\ln(\eta\mu 2x) - \ln 2 = \ln(\eta\mu x) + \ln(\sigma\upsilon\nu x)$

6.42 Να λύσετε τις εξισώσεις

Α) $2^{\sigma\upsilon\nu x} + 2\cdot 2^{-\sigma\upsilon\nu x} = 3$ στο $[0,2\pi]$

Β) $e^{3\ln x} = 7\cdot e^{\ln x} + 6$

6.43 Να λύσετε την εξίσωση

$\log(\eta\mu^2 x) + \log(\sigma\upsilon\nu^2 x) = -4\log 2$, $x \in \left(0,\frac{\pi}{2}\right)$

6.44 Να λύσετε την εξίσωση

$4^{\eta\mu x+1} - 9\cdot 2^{\eta\mu x} + 2 = 0$

6.45 Να λύσετε την εξίσωση

$\sqrt{6}\cdot 10^{\log(\eta\mu x)} + \sqrt{2}\cdot e^{\ln(\sigma\upsilon\nu x)} = 2$ στο $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$

6.46 Να λύσετε στο $[0,\pi]$ την εξίσωση:

$\sigma\upsilon\nu x + e^{-x} = 2$

6.47 Να λύσετε τις ανισώσεις:

Α) $(4x)^{\log 2+\log\sqrt{x}} > 100$

Β) $\left(\frac{1}{2}\right)^{(\log x)^2 - 3\log x + 2} > 1$

Συνδυαστικές με πολυώνυμα

6.48 Να βρείτε το $\alpha \in R$, ώστε το πολυώνυμο $P(x) = 4^{\alpha}x^3 - 2^{\alpha+1}x^2 - 9x + 1$ να έχει παράγοντα το $x-1$

6.49 Δίνεται ότι το πολυώνυμο

$P(x) = (2\ln\kappa - 1)x^4 + x^3 + (e-1)x^2 - ex + 1 + 2\eta\mu\theta$

με $\theta \in (0,2\pi)$, $\kappa \in (0,+\infty)$ είναι τρίτου βαθμού και έχει παράγοντα το $x-1$

Α) Να βρείτε τα κ και θ

Β) Να λύσετε την ανίσωση $P(x) < 0$

Γ) Να βρείτε τα διαστήματα που η γραφική παράσταση της $f(x) = e^{3x} + (e-1)e^{2x} - e^{x+1}$ βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$.

6.50 Έστω ότι το πολυώνυμο

$P(x) = (\ln\alpha)x^3 + (2-\ln\alpha)x^2 + \alpha^{\ln\beta}x + 1$ έχει θετικούς ακέραιους συντελεστές και αρνητική ακέραια ρίζα. Τότε

Α) Να βρείτε τα $\alpha,\beta \in R$

Β) Για $\alpha = e$, $\beta = 1$ να βρείτε τα διαστήματα που η γραφ. παράσταση της συνάρτησης $f(x) = P(e^x)$ βρίσκεται κάτω από τη γρ παράσταση της $g(x) = e^x + 3$

Εκθετικές- Λογαριθμικές

6.51 Να λυθούν οι εξισώσεις:

Α) $\log(4^x+26)=1+\log(2^x+1)$.

Β) $x+\log(1+2^x)=\log 6+x\log 5$.

Γ) $2+\log 15-\log 3=\log(23^x-29)$

6.52 Να λυθούν οι εξισώσεις:

Α) $e\cdot x^{\ln x}-x^3\cdot\sqrt[3]{x}=0$

Β) $\frac{1}{2}\log(x+24)=1-\log\sqrt{x+3}$.

Γ) $e^{2x}-3e^x+2=0$

6.53 Να βρείτε τις τιμές του $\theta\in R$ ώστε η εξίσωση $x^2-x\log\theta+3\log\theta-8=0$ να έχει δύο ίσες ρίζες.

6.54 Να λύσετε τα συστήματα:

Α) $\begin{cases}|\log x-2|<1\\ \dfrac{\sqrt{\log x-1}}{12-x}>0\end{cases}$

Β) $\begin{cases}3^x\cdot 3^{2\psi}=243\\ \log x-2\log\psi=\log 3\end{cases}$.

6.55 Να λυθούν οι ανισώσεις:

Α) $(\log x^3)^2-2\log x^2-5<0$

Β) $\log(x^2-4)>\log 3|x|$.

6.56 Να λύσετε τα συστήματα

Α) $\begin{cases}x^{\log y}+y^{\log x}=20\\ \log\sqrt{xy}=1\end{cases}$ Β) $\begin{cases}x^y=y^x\\ x=y^2\end{cases}$

6.57 Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $\varphi(x)=\ln(x-2)+\left(x+\frac{1}{x}\right)^x+\sqrt{\ln\frac{x^2+1}{2}}$

6.58 Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων

Α) $f(x)=\ln(e^{2x}-4e^x+3)$

Β) $g(x)=\sqrt{\ln(\ln(x^2-(2+e)x+3e))}$.

Γ) $f(x)=\sqrt{-2\left(\frac{1}{7}\right)^{2x}+3\left(\frac{1}{7}\right)^x-1}$

6.59 Δίνεται η $f(x)=\log|\log(x-3)|$. Να βρείτε:

Α) Το πεδίο ορισμού της.

Β) Για ποιές τιμές του x η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $x'x$.

Γ) Τις ακέραιες τιμές του x για τις οποίες ισχύει $f(x)>0$.

6.60 Έστω η συνάρτηση $f(x)=\ln\left(e^x-1\right)$.

Α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της

Β) Να βρείτε τα διαστήματα του x που η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$

Γ) Να συγκρίνετε τους $f(\ln 2)$ και $f(1)$

Δ) Να λύσετε την εξίσωση $f(2x)-f(x)=f(1)$

6.61 Δίδεται η συνάρτηση με τύπο $f(x)=5^{\ln x}-3^{\ln x-1}+5^{\ln x-1}-3^{\ln x+1}$.

Α Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

Β Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=0$.

6.62 Έστω οι συναρτήσεις

$f(x)=\log(\alpha\cdot 2^{x+1})-\log(6)$, $g(x)=\log(x\cdot 2^x)$, $x>0$

Αν οι C_f, C_g τέμνονται στο σημείο Μ με τετμημένη $x_0=1$

Α) Να αποδείξετε ότι $\alpha=3$

Β) Να συγκρίνετε τους αριθμούς $f(3)$ και $g(3)$

Γ) Να λύσετε την εξίσωση

$g(x)+\ln 10=f(x)+(\log e)^{-1}$

Δ) Να παραστήσετε την f στο επίπεδο

6.63 Έστω η συνάρτηση $f(x)=\ln\left(e^x-3^{x-1}\right)$

Α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της

Β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=x-2\ln 2$

Γ) Να λύσετε την ανίσωση $f(x)<x$

6.64 Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{2\log x+1}{2\log x-1}$

Α) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της f

Β) Να λυθεί η εξίσωση $f(x)+f\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{10}{3}$

6.65 Να βρείτε:

Α) τα σημεία τομής με τους άξονες της γραφικής παράστασης της $f(x)=\log(x+1)-2$

Β) Το $\kappa\in R$ ώστε το σημείο $P\left(-\dfrac{9}{10},\kappa\right)$ να ανήκει στη γραφική της παράσταση.

6.66 Δίνεται η $f(x)=10+\dfrac{\log(\log x)}{\log e}$. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της και να υπολογίσετε το x ώστε να ισχύει $f(y^x)-f(y)=2$.

6.67 Έστω η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{\ln(3x-11)}{\ln(x-5)}$.

Α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

Β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=2$.

Γ) Αν $g(x)=1$ με $x>6$, να λύσετε την ανίσωση $f(x)>g(x)$.

6.68 Δίνεται η συνάρτηση $f:R\to R$ η οποία είναι γνησίως φθίνουσα και η συνάρτηση $g(x)=f(x)+e^{-x},\ x\in R$

Α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g είναι γνησίως μονότονη στο R

Β) Να λυθεί η ανίσωση $f(\ln x)-f(1)<\dfrac{1}{e}-\dfrac{1}{x}$

6.69 Να λυθεί η ανίσωση $\dfrac{\ln(1-\ln x)}{2^{\ln x}-2^{\log x}}\geq 0$

(mathematica.gr)

6.70 Να λυθεί η ανίσωση $\dfrac{3\,6^x-18^x}{\ln(x+1)}\geq 0$

(mathematica.gr)

6.71 Να λυθεί η ανίσωση $\dfrac{e^x-2^x}{\ln x+1}\geq 0$

(mathematica.gr)

6.72 Να λυθεί η ανίσωση $\dfrac{\ln(x+1)+\ln 2x}{2-4^{\log x}}\leq 0$

(mathematica.gr)

6.73 Να λυθεί η ανίσωση $\dfrac{e^{2x+1}-e^{x-1}}{\ln(x+1)-1}\leq 0$

(mathematica.gr)