Β Λυκείου

Άλγεβρα

2020-2021

Μίλτος Παπαγρηγοράκης
Χανιά

354
Ταξινομημένες ασκήσεις για λύση

Άλγεβρα

Ταξη: Β Γενικού Λυκείου
Άλγεβρα
Έκδοση 20.08

Μίλτος Παπαγρηγοράκης
Μαθηματικός M.Ed.
Χανιά 2020

Ιστοσελίδα: http://users.sch.gr/mipapagr
mail : papagrigorakism@gmail.com

1 ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

1.01 Δίνεται το σύστημα: $\begin{cases} \lambda x - y = \lambda - 1 \\ x + 2\lambda y = \lambda \end{cases}$, $\lambda \in R$. Να υπολογίσετε τις τιμές του λ ώστε για τη λύση (x,y) του συστήματος να ισχύει $x - y = 0$

1.02 Λύστε το σύστημα: $\begin{matrix} 7|x+2|+|3-y|=31 \\ 3|x+2|-4|3-y|=0 \end{matrix}$

1.03 Δίνεται το (Σ): $\begin{cases} (\mu-2)x+5y = 5 \\ x+(\mu+2)y = 5 \end{cases}$, $\mu \in R$

Αν το σύστημα έχει μοναδική λύση (x_o, y_o), υπολογίσετε το $\mu \in R$ ώστε να ισχύει: $2x_o + y_o > 5$

1.04 Έστω ότι το σύστημα : $\begin{cases} (\lambda-1)x+y=2 \\ x+(\lambda-1)y=2 \end{cases}$, $\lambda \in R$ έχει μοναδική λύση (x_0, y_0) και ισχύει $x_0^4 + y_0^2 = 2$. Να βρεθεί ο $\lambda \in R$.

1.05 Δίνεται η συνάρτηση :

$f(x) = \begin{cases} 1-x & \text{αν} \quad x<0 \\ 2x+\lambda^2-3 & \text{αν} \quad x \geq 0 \end{cases}$ με $\lambda \in R$

Α) Να βρεθούν ο λ ώστε $f(0)=1$.

Για τη μεγαλύτερη τιμή του λ που βρήκατε

Β) να βρεθούν τα $f(-2)$, $f(3,5)$,

Γ) Να λύσετε το σύστημα : $\begin{cases} f(-2)x+4y=12 \\ 6x+f(3,5)y=10 \end{cases}$

1.06 Δίνεται ένα γραμμικό σύστημα (Σ) δύο γραμμικών εξισώσεων με αγνώστους x, y που έχει μοναδική λύση, ενώ ακόμα ισχύουν ότι:

$\begin{cases} 2D_x + 3D_y = -D \\ -4D_x + 7D_y = -11D \end{cases}$. Να βρεθεί η λύση του (Σ)

1.07 Για ποιες τιμές των x και y η εξίσωση $x-2y+1+\lambda(x-y)=0$ αληθεύει για κάθε $\lambda \in R$

1.08 Δίνεται το (Σ) $\left.\begin{matrix} \lambda x + y = \lambda^2 \\ x + \lambda y = 1 \end{matrix}\right\}$ (Σ_1) και τα τριώνυμα $f(x) = x^2 + 3x - \lambda$, $g(x) = -x^2 - \lambda x + 3$.

Α. Εάν η το Σ έχει μοναδική λύση (x_0, y_0) για την οποία ισχύει ότι $-x_0 + 3y_0 + 3 = 0$, να λυθεί η ανίσωση $f(x) \geq g(x)$.

Γ. Βρείτε τη λύση του συστήματος $|D-\lambda_1| + |D_x - \lambda_2| + |D_x - D_y| = 0$ όπου λ_1 και λ_2 είναι οι τιμές για τις οποίες το (Σ_1) είναι αδύνατο και έχει άπειρες λύσεις αντίστοιχα

1.09 Για τις ορίζουσες ενός γραμμικού συστήματος δύο εξισώσεων με αγνώστους x, y ισχύει: $D^2 + D_x^2 + D_y^2 = 4D + 2D_x - 5$. Να βρεθούν τα x, y.

1.10 Δίνεται το γραμμικό 2x2 σύστημα με ορίζουσες D, D_x, D_y .Αν το σύστημα έχει μοναδική λύση και ισχύει:

$D_x^2 + D_y^2 = D(2D_x - 4D_y - 5D)$ τότε να βρείτε την λύση αυτή.

1.11 Σε ένα σύστημα δύο γραμμικών εξισώσεων με αγνώστους x, y ισχύει:

$D_x^2 + D_y^2 = 2D_xD_y$ και $D \neq 0$. Αν $x + y = 6$, να βρεθούν τα x, y.

1.12 Να βρεθούν οι $\alpha, \beta \in R$ για να είναι ρίζες της εξίσωσης $x^2 + \alpha x + \beta = 0$ ίσες με α και β

1.13 Να λύσετε το σύστημα $\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ x + y = 3 \end{cases}$

2 ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ

2.01 Να μελετήσετε τη μονοτονία των συναρτήσεων $f(x)=x(4-x)$, $x\in(-\infty,2]$

$g(x)=2-\sqrt{3x-1}$ $\quad t(x)=2-\sqrt{3-x}$

2.02 Να μελετήστε τη μονοτονία των συναρτήσεων

$h(x)=\dfrac{1}{x^2}-1$ και $g(x)=\dfrac{1-x}{x}$, $x<0$

2.03 Να αποδείξετε ότι η $f(x)=\dfrac{x}{1+|x|}$ είναι γνησίως αύξουσα στο R

2.04 Να μελετηθεί η μονοτονία της συνάρτησης $f(x)=(\lambda^2-1)x+3$, $\lambda\in R$.

2.05 Μια συνάρτηση f είναι γνήσια μονότονη στο R και διέρχεται από τα σημεία $(1,2)$ και $(3,1)$. Να αποδείξετε τη μονοτονία της.

2.06 Για τη συνάρτηση f ισχύει ότι $2f^5(x)+f(x)=3x$ για κάθε $x\in R$.

A) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνήσια αύξουσα

B) Να λυθεί η ανίσωση $f\left(x^2+x-1\right)<1$

2.07 Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση κάθε γνησίως μονότονης συνάρτησης τέμνει σε ένα το πολύ σημείο τον άξονα $x'x$.

2.08 Οι συναρτήσεις f και g είναι ορισμένες στο R, είναι γνήσια μονότονες και έχουν διαφορετικό είδος μονοτονίας. Να αποδείξετε ότι οι γραφικές τους παραστάσεις έχουν το πολύ ένα κοινό σημείο.

2.09 Αν η συνάρτηση $f:R\to R$ είναι γνησίως φθίνουσα και $f(x)>0$ για κάθε $x\in R$, δείξτε ότι η $g(x)=\dfrac{f^2(x)-3}{3f(x)}$ είναι γνησίως φθίνουσα στο R

2.10 Έστω συνάρτηση $f:R\to R$ με την ιδιότητα: $f(x+y)=f(x)+f(y)$, $\forall x,y\in R$.
Δίνεται ακόμα ότι ισχύει η ισοδυναμία: «$x>0 \Leftrightarrow f(x)>0$». Να αποδείξετε ότι:

A) η f είναι περιττή

B) η f είναι γνησίως αύξουσα.

Γ) Να λύσετε την ανίσωση
$f\left(4x^2+2005\right)+f\left(4x^2-2005\right)<2f(8x-4)$

2.11 Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα και ισχύει $f(f(x))=x$ για κάθε $x\in R$ Να δείξετε ότι $f(x)=x$, $x\in R$

2.12 Δίνεται ότι η συνάρτηση f είναι γνήσια αύξουσα στο R. Να λύσετε την εξίσωση
$f\left(\sqrt{x}\right)+f\left(x^2\right)=f(x)+f\left(x^3\right)$

2.13 Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη στο R με σύνολο τιμών το R ώστε να ισχύει
$f(x)+f^3(x)=x+1$ για κάθε $x\in R$
Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα

2.14 Να λύσετε τις ανισώσεις:

A) $2-x-x^{13}>0$

B) $x^{11}+2x^7+3x^5+5x^3+7x<18$

Γ) $x^3+(x-1)^5-\dfrac{2}{x}>8$ στο $(0,+\infty)$

2.15 Αν $f(x)=x^7+x-1$, να λύσετε τις ανισώσεις $f\left(x^2+x\right)<f(2)$ και $f(x^2+1)<f(2x-2)$

2.16 Έστω συνάρτηση $f:A \to R$.

A) Για κάθε $x_1, x_2 \in A$ με $x_1, \neq x_2$ ορίζουμε $\lambda = \frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1 - x_2}$. Να δείξετε ότι:

α) η f είναι γν. αύξουσα αν και μόνο αν $\lambda > 0$.

β) η f είναι γν. φθίνουσα αν και μόνο αν $\lambda < 0$

Β) Αν $A = R$ και για κάθε $x_1, x_2 \in R$ με $x_1, \neq x_2$ ισχύει $|f(x_1)-f(x_2)| < 2|x_1 - x_2|$, να αποδείξετε ότι η $g(x) = f(x) - 2x$ είναι γνησίως φθίνουσα στο R και ότι η $h(x) = f(x) + 2x$ είναι γνησίως αύξουσα στο R.

Γ) Αν η συνάρτηση $k(x) = (\lambda^2 - 4)x + 3$ είναι γνήσια αύξουσα στο R, να βρεθεί ο $\lambda \in R$.

2.17 Δίνεται η συνάρτηση $f:R \to R$ με $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$, $x \in R$

A) Αποδείξτε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα

B) Να λυθεί η ανίσωση

$8x^3 - 12x^2 + 6x > (1-x)^3 - 3(1-x)^2 + 3(1-x)$

2.18 Η συνάρτηση f είναι γνήσια φθίνουσα στο R και η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο $(-1,1)$. Να λύσετε τις ανισώσεις

$f(3-x) < 1$ και $f(x^2 - x) < 1$

2.19 Οι συναρτήσεις f και g είναι γνήσια αυξουσες έχουν πεδίο ορισμού το R και ισχύει $f(x) > 0$ και $g(x) < 0$ για κάθε $x \in R$.

A) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $\frac{f}{g}$ είναι γνήσια μονότονη.

B) Να λύσετε την ανίσωση

$f(x^2)g(x) - f(x)g(x^2) > 0$

2.20 Να βρείτε το πρόσημο της συνάρτησης f που είναι γνήσια αύξουσα στο R και ισχύει ότι $f(-3) = 0$

2.21 Αν $f(x) = x^7 + x^5 + x$, να λύσετε την ανίσωση $f(2x^2 - x + 3) < f(3x + x^2)$

2.22 Αν $f:R \to R$ περιττή και γνησίως φθίνουσα στο R με $f(f(x)) = x$ για κάθε $x \in R$, να δείξετε ότι $f(x) = -x$, $x \in R$

2.23 Έστω συνάρτηση f, ορισμένη στο R, γνήσια μονότονη και η γραφική της παράσταση διέρχεται από τα σημεία $(1,3)$ και $(2,0)$

A) Να αποδείξετε ότι είναι γνήσια φθίνουσα

B) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) > 3$

Γ) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) < 0$

Δ) Να βρείτε τα σημεία όπου η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $x'x$

2.24 Έστω συνάρτηση $f:R \to R$ γνησίως μονότονη με $f(5) = 9$ και $f(2) = 3$. Να αποδείξετε τη μονοτονία της f και να λύσετε την ανίσωση

$f(x^2 - 8x - 4) < 9$

2.25 Έστω οι συναρτήσεις f, g ορισμένες στο $[\alpha,\beta]$ με σύνολο τιμών το $[\alpha,\beta]$ ώστε $g(x) < f(x)$, για κάθε $x \in [\alpha,\beta]$. Αν η συνάρτηση f είναι γνήσια αύξουσα, να αποδείξετε ότι

$g(g(x)) < f(f(x))$, $\forall x \in [\alpha,\beta]$.

2.26 * Έστω συνάρτηση $f:(0,+\infty) \to R$ με την ιδιότητα $f(\alpha) - f(\beta) = f\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)$ για κάθε $\alpha, \beta \neq 0$ Αν επιπλέον ισχύει ότι «$x > 1 \Leftrightarrow f(x) > 0$»

A) αποδείξτε ότι η f είναι γνήσια αύξουσα

B) Να λύσετε την εξίσωση

$f(x) + f(x^2 + 3) = f(x^2 + 1) + f(x + 1)$

ΑΚΡΟΤΑΤΑ

2.27 Να μελετηθούν ως προς τα ακρότατα οι συναρτήσεις

Α) $f(x)=-2(x+1)^2+3$

Β) $f(x)=1-\sqrt{2x+3}$

Γ) $f(x)=x^4+x^2-1$

Δ) $f(x)=-|x-5|+3$

2.28 Να μελετηθούν ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα οι συναρτήσεις

Α) $f(x)=x^2+3$ στο $[-2,-1]$

Β) $f(x)=2\sqrt{3-x^2}+3$ στο $\left[\sqrt{2},\sqrt{3}\right]$

Γ) $f(x)=\sqrt{7+\sqrt{6-x}}$ στο $[2,5]$

2.29 Να αποδειχτεί ότι η συνάρτηση $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$, $x<0$ έχει μέγιστο το -2

2.30 Να αποδειχτεί ότι η συνάρτηση $f(x)=x^2-4x+3$ έχει ελάχιστο το -1

2.31 Να αποδειχτεί ότι η συνάρτηση $f(x)=-x^2+6x-8$ έχει μέγιστο 1

2.32 Έστω η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x^2+2}{\sqrt{x^2+1}}$ $x\in R$. Αποδείξτε ότι η ελάχιστη τιμή της f είναι το 2

2.33 Αν $f(x)=3^x+3^{-x}$, $x\in R$. Να δείξετε ότι:

Α) $f(0)=2$,

Β) $f(x)\geq 2$, $x\in R$

Γ) Η ελάχιστη τιμή της f είναι το 2

2.34 Έστω η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x^2+2}{\sqrt{x^2+1}}$, $x\in R$. Αποδείξτε ότι η ελάχιστη τιμή της f είναι το 2

2.35 Έστω η συνάρτηση $f(x)=x^2+\dfrac{4}{x^2}$, $x\in R$. Αποδείξτε ότι η ελάχιστη τιμή της f είναι το 4

2.36 Έστω η $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$, $x\geq 0$. Να δείξετε ότι:

Α) $f(x)=\sqrt{x+1}-\sqrt{x}$, $x\geq 0$

Β) $f(x)\leq 1$, $x\geq 0$

Γ) η μέγιστη τιμή της f είναι το 1

2.37 Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f:R\to R$ διέρχεται από τα σημεία $A(0,2)$, $B(1,3)$ και ισχύει $|2f(x)-5|\leq 1$ για κάθε $x\in R$, αποδείξτε ότι έχει μέγιστη και ελάχιστη τιμή

2.38 Έστω συνάρτηση $f:R\to R$ για την οποία ισχύει $-1\leq f(x)\leq 2$ για κάθε $x\in R$. Αν $2f(2)+3f(5)=4$ και $-f(2)+f(5)=3$, να βρείτε τα ακρότατα της f

2.39 Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x^2+x-2}{x^2+x+1}$

Α) Να αποδείξετε ότι η f έχει ελάχιστο το -3

Β) Να λυθεί η εξίσωση

$$f\left(x^3-\frac{3}{2}\right)+f\left(x^4-3x+\frac{3}{2}\right)+6=0$$

Γ) Να βρείτε τους $\alpha,\beta\in R$ ώστε να ισχύει $f(\alpha-\beta-1)+f(2\alpha+\beta+1)+6=0$

2.40 Έστω $f:R\to R$ συνάρτηση με $f(0)=1$

Α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=\dfrac{2f(x)}{1+f^2(x)}$ έχει μέγιστη τιμή το 1.

Β) Να βρείτε το μέγιστο της συνάρτησης $\Phi(x)=\dfrac{2\cdot 3^x}{1+3^{2x}}+9$

ΑΡΤΙΕΣ ΠΕΡΙΤΤΕΣ

2.41 Να βρείτε ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι περιττές και ποιες άρτιες:

Α) $f(x)=x\,|x|$

Β) $f(x)=x\sqrt[3]{(2-x)^2}+x\sqrt[3]{(2+x)^2}$

2.42 Να βρείτε ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι περιττές και ποιες άρτιες:

Α) $f:(-1,2]\to R$ με $f(x)=x^3+x$

Β) $\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+1}$

Γ) $f(x)=x^3-x|x|$

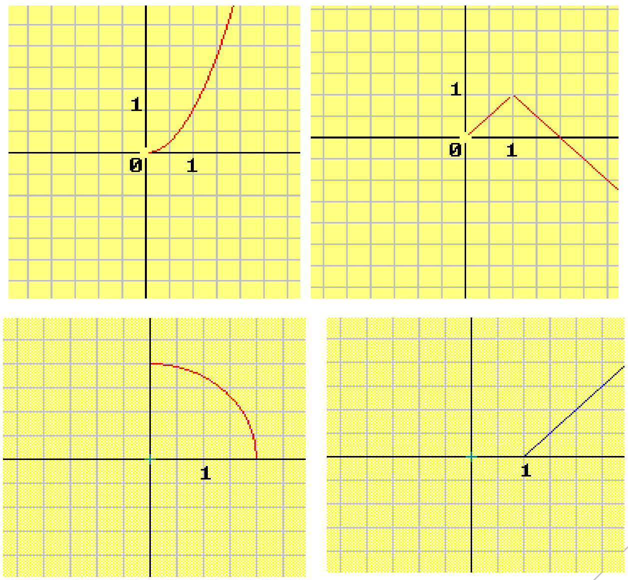
2.43 Να βρείτε ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι περιττές και ποιες άρτιες:

$f(x)=\begin{cases}1-x & x\geq 0\\ 1+x & x<0\end{cases}$ $\qquad g(x)=\begin{cases}-3x+4 & x<0\\ 3x+4 & x\geq 0\end{cases}$

2.44 Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το R. Να αποδείξετε ότι η $g(x)=\frac{1}{2}\left[f(x)+f(-x)\right]$ είναι άρτια.

2.45 Αν η συνάρτηση $f(x)$ είναι περιττή με πεδίο ορισμού A, δείξτε ότι η $g(x)=|f(x)|$ είναι άρτια

2.46 Να συμπληρώσετε τις παρακάτω γραμμές ώστε να παριστάνουν γραφικές παραστάσεις: α) άρτιας συνάρτησης και β) περιττής συνάρτησης



2.47 Δίνεται συνάρτηση $f:R\to R$ ώστε να ισχύει $f(x+y)=f(x)+f(y)$ για κάθε $x,y\in R$. Δείξτε ότι η f είναι περιττή

2.48 Δύο συναρτήσεις $f,g:R\to R$ έχουν τις ιδιότητες: $f^2(x)=f(x)f(-x)$ και $g^2(x)=-g(x)g(-x)$ για κάθε $x\in R$. Να αποδείξετε ότι η f είναι άρτια και η g περιττή.

2.49 Δίνεται η συνάρτηση f για την οποία ισχύει ότι $f(2)=4$. Να βρεθεί το $f(-2)$ αν γνωρίζετε ότι :

Α) η f είναι άρτια

Β) η f είναι περιττή

ΓΡΑΦΙΚΕΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ

2.50 Να παραστήσετε γραφικά τις συναρτήσεις:

Α) $g(x)=2-|x-2|$ $\qquad$ Β) $k(x)=2-(x-1)^2$

Γ) $f(x)=x^2-4x+3$ $\qquad$ Δ) $m(x)=x^2-6x+3$

2.51 Να παρασταθούν γραφικά οι συναρτήσεις

$f(x)=\begin{cases}-x+1 & x\leq -1\\ 3x^2 & x>-1\end{cases},\quad g(x)=\begin{cases}|x| & x<1\\ -x^2 & x\geq 1\end{cases}$

2.52 Να παραστήστε γραφικά τις συναρτήσεις:

Α) $f(x)=x|x|-2|x|$.

Β) $f(x)=x\sqrt{x^2}$

Γ) $f(x)=\dfrac{|x+1|-|x-1|}{|x+1|+|x-1|}$

2.53 Έστω η συνάρτηση $f(x)=2|x-1|+2|x-2|$.

Α) Να γραφεί ο τύπος της συνάρτησης χωρίς απόλυτα .

Β) να παρασταθεί γραφικά.

Γ) να μελετηθεί ως προς την μονοτονία.

Δ) Να βρεθεί η ελάχιστη τιμή της

2.54 Η συνάρτηση f είναι περιττή στο R. Να αποδείξετε ότι $f(0)=0$

3 ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

3.01 Σε ποιο τεταρτημόριο βρίσκεται το σημείο Μ αν $xOM = \omega$ και $\eta\mu\omega \cdot \sigma\upsilon\nu\omega > 0$

3.02 Αν $5\pi < x < \frac{11\pi}{2}$ να αποδείξετε ότι $\varepsilon\varphi x - \eta\mu x > \sigma\upsilon\nu x - \sigma\varphi x$.

3.03 Να υπολογίσετε τις παραστάσεις :

Α) $\eta\mu 90^o + \eta\mu 180^o + \eta\mu 270^o + \eta\mu 360^o$

Β) $2\varepsilon\varphi^2 180^o - 5(1 - \sigma\upsilon\nu^2 90^o)$

Γ) $\dfrac{\varepsilon\varphi 60^\circ - \varepsilon\varphi 30^\circ}{\varepsilon\varphi 45^\circ + \varepsilon\varphi 30^\circ + \varepsilon\varphi 60^\circ}$

Ανισότητες – Μέγιστα Ελάχιστα

3.04 Να βρείτε την μέγιστη και την ελάχιστη τιμή των παραστάσεων :

$A = 2\eta\mu x - 5$ $B = -4\sigma\upsilon\nu x$ $\Gamma = \eta\mu x + 4\sigma\upsilon\nu y$

3.05 Να βρείτε για ποιες τιμές του $\kappa \in R$ υπάρχει γωνία ω ώστε να ισχύει: $\varepsilon\varphi\omega = \frac{3\kappa}{\kappa - 2}$ και $\sigma\varphi\omega = \frac{\kappa}{2 - \kappa}$

3.06 Να βρείτε για ποιες τιμές του $\kappa \in R$ υπάρχει γωνία ω ώστε να ισχύει: $\varepsilon\varphi\omega = \frac{3\kappa}{\kappa - 2}$ και $\sigma\varphi\omega = \frac{\kappa}{2 - \kappa}$

3.07 Να αποδείξετε ότι $\eta\mu^2 x - \alpha\eta\mu x + \alpha + 3 > 0,\ x \in R, \alpha > 2$

3.08 Δείξτε ότι α) $-\sqrt{2} \le \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x \le \sqrt{2}$

β) $\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x \le \frac{1}{2}$

γ) $|\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x| \le \sqrt{2}$

δ) $\eta\mu^4 x + \sigma\upsilon\nu^4 x \ge \frac{1}{2}$

3.09 Να εξηγήσετε γιατί δεν υπάρχει γωνία x τέτοια ώστε να ισχύει:

Α) $\sigma\upsilon\nu^2 x < 3\sigma\upsilon\nu x - 2$

Β) $\eta\mu x < \frac{1}{\sqrt{2} - 2}$

3.10 Να αποδείξετε ότι:

Α) $\sigma\upsilon\nu^2\alpha + \sigma\upsilon\nu^2\beta + 2\eta\mu\alpha \cdot \eta\mu\beta \le 2$

Β) $\sigma\upsilon\nu^2\alpha + \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha} \ge 2$

Γ) $\varepsilon\varphi^2\alpha + \sigma\varphi^2\alpha \ge 2$

Να βρεθούν οι άλλοι τριγωνομετρικοί αριθμοί

3.11 Αν είναι $\sigma\upsilon\nu\omega = -\frac{12}{13}$ και $90 < \omega < 180$, υπολογίστε την παράσταση $2\eta\mu\omega - \frac{5}{\varepsilon\varphi\omega} + \sigma\upsilon\nu\omega$

3.12 Αν $16\sigma\upsilon\nu^2\omega - 5 = 0$ και $90^o < \omega < 180^o$, υπολογίστε τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς

3.13 Αν $0 < \omega < 90$ και $\varepsilon\varphi\omega = \frac{3}{4}$ να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $A = \dfrac{3\eta\mu\omega + 2\sigma\upsilon\nu\omega}{4\eta\mu\omega - 9\sigma\upsilon\nu\omega}$

3.14 Αν $17\sigma\upsilon\nu\omega + 8 = 0$ και $90^o < \omega < 180^o$ να υπολογίσετε την παράσταση $A = \dfrac{\eta\mu\omega - \sigma\upsilon\nu\omega}{\varepsilon\varphi\omega}$

Βασικές Ταυτότητες

3.15 Να αποδείξετε ότι:

$$(2x\text{συν}\theta\cdot\text{ημ}\theta)^2+x^2(\text{συν}^2\theta-\text{ημ}^2\theta)^2=x^2$$

3.16 Να αποδείξετε ότι:

$$(x\text{ημωσυνφ})^2+(x\text{ημωημφ})^2+(x\text{συνω})^2=x^2$$

3.17 Να αποδείξετε ότι:

$$\text{ημ}^3\theta\cdot\text{συν}\theta-\text{ημ}^5\theta\cdot\text{συν}\theta=\text{ημ}^3\theta\cdot\text{συν}^3\theta$$

3.18 Αποδείξτε ότι $\text{εφω}=\dfrac{1}{\text{ημω}\cdot\text{συνω}}-\dfrac{1}{\text{εφω}}$

3.19 Να αποδείξετε ότι:

$$\text{ημ}^4x-\text{συν}^4x=1-2\text{συν}^2x=2\text{ημ}^2x-1$$

3.20 Αποδείξτε ότι: $\dfrac{\text{ημω}+\text{συνω}}{\text{ημω}-\text{συνω}}=\dfrac{\text{εφω}+1}{\text{εφω}-1}$

3.21 Αποδείξτε ότι: $\dfrac{\text{συν}^2\omega-\text{ημ}^2\omega}{\text{ημω}\cdot\text{συνω}}=\dfrac{1-\text{εφ}^2\omega}{\text{εφω}}$

3.22 Να αποδείξετε ότι $\sqrt{2\text{εφ}x+\dfrac{1}{\text{συν}^2x}}=1+\text{εφ}x$, αν $0<x<\dfrac{\pi}{2}$

3.23 Αποδείξτε ότι $\dfrac{\text{εφ}^2x-1}{\text{εφ}^2x+1}=\text{ημ}^4x-\text{συν}^4x$

3.24 Δείξτε ότι $\left(1+\dfrac{\text{συν}x-1}{\text{ημ}x}\right)\left(1+\dfrac{\text{ημ}x+1}{\text{συν}x}\right)=2$

3.25 Αποδείξτε ότι $\dfrac{1+\text{ημα}}{1+\text{συνα}}\cdot\dfrac{1+\dfrac{1}{\text{συνα}}}{1+\dfrac{1}{\text{ημα}}}=\text{εφα}$

3.26 Να αποδείξετε ότι

$$\left(\frac{1}{\text{ημα}}-\text{ημα}\right)\left(\frac{1}{\text{συνα}}-\text{συνα}\right)(\text{εφα}+\text{σφα})=1$$

3.27 Δείξτε ότι: $\text{συν}^2\alpha+\text{συν}^2\beta+2\text{ημα}\cdot\text{ημβ}\le 2$

3.28 Δείξτε ότι $\dfrac{1-\text{ημ}x+\text{συν}x}{1-\text{ημ}x}=\dfrac{1+\text{ημ}x+\text{συν}x}{\text{συν}x}$

3.29 Αποδείξτε ότι $\dfrac{\text{ημ}^3\omega+\text{ημω}\cdot\text{συν}^2\omega}{\text{συνω}}=\text{εφω}$

3.30 Να αποδείξετε ότι: $\dfrac{\text{εφ}^4x+\text{ημ}^2x}{\text{σφ}^4x+\text{συν}^2x}=\text{εφ}^6x$

3.31 Να αποδείξετε ότι $\dfrac{1+\text{εφ}^7x}{1+\text{σφ}^7x}=\left(\dfrac{1+\text{εφ}x}{1+\text{σφ}x}\right)^7$

3.32 Να αποδείξετε ότι $\text{συν}^2\alpha+\dfrac{1}{\text{συν}^2\alpha}\ge 2$

3.33 Αποδείξετε ότι $\sqrt{\dfrac{\dfrac{1}{\text{ημ}\theta}-\text{σφ}\theta}{\dfrac{1}{\text{ημ}\theta}+\text{σφ}\theta}}=\left|\dfrac{\text{ημ}\theta}{1+\text{συν}\theta}\right|$

3.34 Δίνεται η εξίσωση

$x^2-2x\cdot\text{ημα}+1-\text{συνα}=0$ με $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$

Α) Να αποδείξετε ότι έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.

Β) Αν x_1, x_2 οι ρίζες της, να βρείτε το ημα ώστε να ισχύει $x_1^2+x_2^2=2$

3.35 Να δείξτε ότι $\begin{vmatrix}\dfrac{\text{συνα}}{\sqrt{2}} & -\dfrac{\text{ημα}}{\sqrt{2}}\\ \dfrac{\text{ημα}}{\sqrt{2}} & \dfrac{\text{συνα}}{\sqrt{2}}\end{vmatrix}=\dfrac{1}{2}$

3.36 Δίνεται η εξίσωση $x^2-2x-\text{εφ}^2\theta=0$.

Α) Να δείξετε ότι έχει ρίζες πραγματικές και άνισες τις x_1, x_2, οι οποίες να βρεθούν.

Β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης

$A=\dfrac{1}{(x_1-x_2)^2}$

Γ) Αν $f(x)=\dfrac{x^2}{x-1}$ να δείξετε ότι

$f(x_1)f(x_2)=-\text{εφ}^2\theta\cdot\text{ημ}^2\theta$.

Αναγωγή στο 1ο Τεταρτημόριο

3.37 Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των γωνιών 3510^{o}, -11π, $\frac{11\pi}{2}$, $-\frac{35\pi}{6}$, $\frac{2\kappa\pi}{3}$, $\frac{1000\pi}{3}$, $-\frac{100\pi}{6}$, με $\kappa \in Z$

3.38 Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$\frac{\varepsilon\varphi\left(\frac{3\pi}{4}\right)\cdot\sigma\varphi\left(\frac{2\pi}{3}\right)\cdot\eta\mu\left(\frac{7\pi}{6}\right)\cdot\sigma\upsilon\nu\left(\frac{11\pi}{6}\right)}{\eta\mu\left(-\frac{\pi}{4}\right)\cdot\varepsilon\varphi\left(\frac{2\pi}{3}\right)\cdot\sigma\upsilon\nu\left(\frac{7\pi}{6}\right)\cdot\eta\mu\left(\frac{11\pi}{6}\right)}$$

3.39 Σε κάθε τρίγωνο $AB\Gamma$ να αποδείξετε ότι :

Α) $\varepsilon\varphi(A+B)=-\varepsilon\varphi\Gamma$ Β) $\eta\mu(A+B)=\eta\mu\Gamma$

Γ) $\sigma\upsilon\nu(A+B)=-\sigma\upsilon\nu\Gamma$

3.40 Να αποδείξετε ότι

$$\eta\mu^4\frac{\pi}{8}-\sigma\upsilon\nu^2\frac{3\pi}{8}=-\eta\mu^2\frac{\pi}{8}\cdot\sigma\upsilon\nu^2\frac{\pi}{8}$$

3.41 Να υπολογίσετε την τιμή του γινομένου:

$\sigma\upsilon\nu0^{o}\cdot\sigma\upsilon\nu1^{o}\cdot\sigma\upsilon\nu2^{o}\cdots\sigma\upsilon\nu2006^{o}$

3.42 Δείξτε ότι $0<\dfrac{\sigma\varphi(\pi+\theta)-\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)}{\sigma\varphi(\pi+\theta)-\varepsilon\varphi\left(\frac{3\pi}{2}+\theta\right)}<2$

3.43 Αν $0<\theta<\frac{\pi}{2}$, να αποδείξετε ότι

$$\sigma\upsilon\nu\left(\frac{3\pi}{2}+\theta\right)\cdot\varepsilon\varphi(\pi+\theta)>2\left[1-\eta\mu\left(\frac{5\pi}{2}-\theta\right)\right]$$

3.44 Δείξτε ότι $\eta\mu^2\left(\frac{\pi}{3}+\theta\right)+\eta\mu^2\left(\frac{\pi}{6}-\theta\right)=1$

3.45 Αν $\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{3}-x\right)+\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{6}+x\right)=4$

να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης

$\varepsilon\varphi^2\left(\frac{\pi}{3}-x\right)+\varepsilon\varphi^2\left(\frac{\pi}{6}+x\right)$

τριγωνομετρικες συναρτησεις

3.46 Να βρείτε τα ακρότατα και την περίοδο της συνάρτησης $f(t)=2\eta\mu\left(\frac{t\pi}{2}\right)$.

3.47 Α) Να συγκρίνετε τους αριθμούς $\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{12}$ και $\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{11}$

Β) Αν $\frac{3\pi}{4}<\alpha<\beta<\frac{7\pi}{4}$ να συγκρίνετε τις τιμές $[0,\pi]$ και $\eta\mu\left(\beta-\frac{\pi}{4}\right)$

3.48 Αν $3\cdot\eta\mu\theta+\sqrt{3}\cdot\sigma\upsilon\nu\theta=0$, $t\in[0,4\pi]$. Να βρείτε

Α) Την περίοδο και το πλάτος της συνάρτησης

Β) Το $t\in[0,4\pi]$ ώστε $f(t)=0$.

3.49 Δίνεται περιοδική συνάρτηση f με περίοδο $T>0$, και και $A_f=R$. Στο διάστημα $[0,T]$ η συνάρτηση παρουσιάζει μέγιστη τιμή το 2004 για το μοναδικό $x=\frac{\pi}{4}$ και στο διάστημα $[2T,3T]$ η συνάρτηση παρουσιάζει μέγιστη τιμή για $x=\frac{9\pi}{4}$.

Α. Είναι σωστό ή λάθος ότι η μέγιστη τιμή της συνάρτησης είναι το 2004;

Β. Αν $f(x)=\alpha\eta\mu(\omega x)$ να βρείτε το α και το ω και να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της συνάρτησης στο διάστημα $[0,3T]$.

Εξισώσεις

3.50 Να λύσετε τις εξισώσεις :

Α) $\eta\mu(x-\pi)=-\sigma\upsilon\nu(x-3\pi)$

Β) $\sigma\upsilon\nu\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+\eta\mu\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=0$

Γ) $\sigma\varphi\left(\frac{\pi}{3}-x\right)=\varepsilon\varphi x$

3.51 Να λύσετε τις εξισώσεις :

Α) $\eta\mu\left(x+20^{o}\right)-\sigma\upsilon\nu\left(x+50^{o}\right)=0$

Β) $\eta\mu\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\sigma\upsilon\nu x=0$

Γ) $\eta\mu\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{3}-x\right)=0$

3.52 Να λύσετε τις εξισώσεις:

Α) $5\eta\mu^2x+\sigma\upsilon\nu^2x=2$ στο $[-\pi,\pi]$

Β) $\varepsilon\varphi x\cdot\eta\mu x+1=\varepsilon\varphi x+\eta\mu x$

Γ) $\varepsilon\varphi 2x\cdot\sigma\varphi 5x=1$ στο $[0,\pi]$

Δ) $\frac{1+\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}+\frac{\sigma\upsilon\nu x}{1+\eta\mu x}=4$

3.53 Να λύσετε τις εξισώσεις:

Α) $\eta\mu^2x+\eta\mu x=0$

Β) $1+\eta\mu x=\sigma\upsilon\nu^2x$

3.54 Να λύσετε τις εξισώσεις:

Α) $2\eta\mu x\cdot\varepsilon\varphi x=3$

Β) $\varepsilon\varphi^4x-4\varepsilon\varphi^2x+3=0$

3.55 Να λύσετε τις εξισώσεις:

Α) $\varepsilon\varphi x=3\sigma\varphi x$

Β) $\varepsilon\varphi x+\sigma\varphi x=-2$

3.56 Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων $f(x)=\frac{2\eta\mu x-1}{\sigma\upsilon\nu x+1}$, $g(x)=\frac{1}{\varepsilon\varphi x+1}$, $h(x)=\frac{1}{2\sigma\upsilon\nu x-1}$

3.57 Να λυθούν οι εξισώσεις στο $[0,\pi]$

Α) $\left(4\eta\mu^4x-1\right)\cdot\left(1-|\eta\mu x|\right)=0$

Β) $2\cdot\eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu x=\sqrt{2}\cdot\sigma\upsilon\nu x$

Γ) $3\cdot\eta\mu\theta+\sqrt{3}\cdot\sigma\upsilon\nu\theta=0$

3.58 Να λύσετε τις εξισώσεις

Α) $\eta\mu(\sigma\upsilon\nu x)=0$

Β) $\eta\mu|x|=1$

Γ) $|\eta\mu x|+|\sigma\upsilon\nu x|=0$

Δ) $\eta\mu(\pi\cdot\sigma\upsilon\nu 2x)=1$

3.59 Να βρείτε τις κοινές λύσεις των εξισώσεων:

Α) $\eta\mu 2x=1$ και $\sigma\upsilon\nu x=1$

Β) $\varepsilon\varphi 3x=1$ και $\varepsilon\varphi 4x=\sqrt{3}$

3.60 Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις

Α) $\eta\mu x=-\sqrt{3}$ Β) $\sigma\upsilon\nu x=e$

Γ) $\eta\mu x=\pi$ Δ) $\sigma\upsilon\nu x=2\pi$

Ε) $\eta\mu x=\kappa\pi+\frac{\pi}{2}$, $\kappa\in Z$

3.61 Να λύσετε τις εξισώσεις

Α) $\varepsilon\varphi x(\sigma\varphi x+\sqrt{3})=1$

Β) $\varepsilon\varphi x-1+2\cdot\frac{\eta\mu^2x}{\sigma\upsilon\nu x}=2\eta\mu x$

ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ

3.62 Να λύσετε τις ανισώσεις:

Α) $2\eta\mu x<1$ Β) $-2\sigma\upsilon\nu x-1>0$

3.63 Να λύσετε τις ανισώσεις:

Α) $\sigma\varphi x-1\geq 0$ Β) $\varepsilon\varphi 2x\leq 1$

Τριγωνομετρικοί Αριθμοί α+β

3.64 Να αποδείξετε ότι για κάθε $\alpha \in R$ ισχύει ότι $\sigma\upsilon\nu\alpha + \sigma\upsilon\nu(120+\alpha) + \sigma\upsilon\nu(240+\alpha) = 0$

3.65 Να αποδείξετε ότι η παράσταση $\sigma\upsilon\nu^2 x - 2\sigma\upsilon\nu\alpha\ \sigma\upsilon\nu x\ \sigma\upsilon\nu(\alpha+x) + \sigma\upsilon\nu^2(\alpha+x)$ είναι ανεξάρτητη του x.

3.66 Να αποδείξετε ότι:

Α) $(\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x)\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{4}+x\right) = \sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x$

Β) $\varepsilon\varphi(45^\circ - \omega) = \dfrac{\sigma\upsilon\nu\omega - \eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega + \eta\mu\omega}$

Γ) $\dfrac{\eta\mu(45^\circ+\alpha) - \sigma\upsilon\nu(45^\circ+\alpha)}{\eta\mu(45^\circ+\alpha) + \sigma\upsilon\nu(45^\circ+\alpha)} = \varepsilon\varphi\alpha$

3.67 Να δείξετε ότι

Α) $\varepsilon\varphi^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right) = \dfrac{1+\eta\mu\theta}{1-\eta\mu\theta}$

Β) $\varepsilon\varphi(\alpha+\beta)\varepsilon\varphi(\alpha-\beta) = \dfrac{\varepsilon\varphi^2\alpha - \varepsilon\varphi^2\beta}{1 - \varepsilon\varphi^2\alpha\ \varepsilon\varphi^2\beta}$

Γ) $\dfrac{\varepsilon\varphi^2 2\alpha - \varepsilon\varphi^2\alpha}{1 - \varepsilon\varphi^2 2\alpha\varepsilon\varphi^2\alpha} = \varepsilon\varphi\alpha \cdot \varepsilon\varphi 3\alpha$

3.68 Να αποδείξετε ότι:

Α) $\dfrac{2\eta\mu(\alpha+\beta)}{\sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta)+\sigma\upsilon\nu(\alpha-\beta)} = \varepsilon\varphi\alpha + \varepsilon\varphi\beta$

Β) $\dfrac{\eta\mu(\alpha+\beta)}{\eta\mu(\alpha-\beta)} = \dfrac{\varepsilon\varphi\alpha+\varepsilon\varphi\beta}{\varepsilon\varphi\alpha-\varepsilon\varphi\beta}$

3.69 Δείξτε ότι αν $\sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta) = \sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta$ τότε $\eta\mu^2(\alpha+\beta) = (\eta\mu\alpha+\eta\mu\beta)^2$

3.70 Να αποδείξετε ότι αν $\eta\mu(\beta-\alpha) = \sigma\upsilon\nu(\beta-\alpha)$, τότε $\varepsilon\varphi\left(\beta-\frac{\pi}{4}\right) = \varepsilon\varphi\alpha$

3.71 Αν $\alpha+\beta=\gamma$ να αποδείξετε ότι: $\varepsilon\varphi\gamma - \varepsilon\varphi\alpha - \varepsilon\varphi\beta = \varepsilon\varphi\alpha\cdot\varepsilon\varphi\beta\cdot\varepsilon\varphi\gamma$

3.72 Αν $\alpha+\beta+\gamma = 90^\circ$ να αποδειχθεί ότι:

Α) $\varepsilon\varphi\alpha\cdot\varepsilon\varphi\beta + \varepsilon\varphi\beta\cdot\varepsilon\varphi\gamma + \varepsilon\varphi\gamma\cdot\varepsilon\varphi\alpha = 1$

Β) $\sigma\varphi\alpha + \sigma\varphi\beta + \sigma\varphi\gamma = \sigma\varphi\alpha\cdot\sigma\varphi\beta\cdot\sigma\varphi\gamma$

3.73 Για τις γωνίες α,β ισχύει $\alpha-\beta = \frac{\pi}{4}$ Να αποδείξετε ότι $(1+\varepsilon\varphi\alpha)\cdot(1-\varepsilon\varphi\beta) = 2$

3.74 Αν $\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu y = \frac{1}{2}$ και $\sigma\upsilon\nu x + \eta\mu y = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ να βρείτε το $\eta\mu(x+y)$

3.75 Αν $0<\omega,\ x<\frac{\pi}{2},\ -\frac{\pi}{2}<y<0,\ \varepsilon\varphi\omega = \frac{2}{5}$, $\varepsilon\varphi x = \frac{3}{2}$ και $\varepsilon\varphi y = -\frac{15}{23}$, τότε $x+y+\omega = \frac{\pi}{4}$

3.76 Να βρεθεί γωνία x με $0<x<2\pi$ αν ισχύει $\eta\mu x\sigma\upsilon\nu 122^0 + \sigma\upsilon\nu x\sigma\upsilon\nu 328^0 = \dfrac{\sqrt{3}\sigma\upsilon\nu 2^0 + \sigma\upsilon\nu 92^0}{2}$

3.77 Αν ισχύουν $\alpha+\beta+\gamma = 180^\circ$, $\sigma\varphi\frac{\alpha}{2} + \sigma\varphi\frac{\beta}{2} = 2003\sigma\varphi\frac{\gamma}{2}$ και $\gamma \neq (2\kappa+1)\pi$ και να αποδείξετε ότι: $\sigma\varphi\frac{\alpha}{2}\sigma\varphi\frac{\beta}{2} = 2004$

3.78 Αν η εξίσωση $x^2-8x+9=0$, έχει ρίζες τους αριθμούς $\varepsilon\varphi\alpha$ και $\varepsilon\varphi\beta$, δείξτε ότι $\varepsilon\varphi(\alpha+\beta) = -1$

3.79 Να αποδείξετε ότι αν σε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει ότι $\eta\mu A\cdot\sigma\upsilon\nu B + \eta\mu B\cdot\sigma\upsilon\nu A = 1$ τότε είναι ορθογώνιο.

3.80 Να αποδείξετε ότι αν σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει ότι $\dfrac{\eta\mu\Gamma}{\sigma\upsilon\nu(B-\Gamma)+\sigma\upsilon\nu A} = \sigma\varphi B$ τότε $B = 60^\circ$

Τριγωνομετρικοί αριθμοί 2α

3.81 Να αποδείξετε ότι:

Α) $(\etaμα-\etaμβ)^2+(συνα+συνβ)^2=4συν^2\frac{α+β}{2}$

Β) $εφ\left(\frac{π}{4}+α\right)-εφ\left(\frac{π}{4}-α\right)=2εφ2α$

Γ) $\frac{1+συν2x+ημ2x}{1-συν2x+ημ2x}=σφx$

3.82 Να αποδείξετε ότι :

Α) $\frac{1+ημα-συνα}{1+ημα+συνα}=εφ\frac{α}{2}$

Β) $\frac{ημ2α}{1+συν2α}\cdot\frac{συνα}{1+συνα}=εφ\frac{α}{2}$

3.83 Να αποδείξετε ότι :

Α) $\frac{ημ\frac{x}{2}+ημx}{1+συν\frac{x}{2}+συνx}=εφ\frac{x}{2}$

Β) $\frac{1+συνα+συν{}^{α}/_{2}}{ημα+ημ{}^{α}/_{2}}=σφ{}^{α}/_{2}$

3.84 Να αποδείξετε ότι:

Α) $ημ^4θ+συν^4θ=\frac{3+συν4θ}{4}$

Β) $\frac{σφα+1}{σφα-1}=\frac{συν2α}{1-ημ2α}$

3.85 Να αποδείξετε ότι $\frac{ημα+ημ\frac{α}{2}}{1+συν\frac{α}{2}+συνα}=εφ\frac{α}{2}$

3.86 Να αποδείξετε ότι

$συνx-συν2x-συν4x=\frac{ημ8x}{8ημx}$

3.87 Αν σε μη αμβλυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει ότι $2ημΒημ\frac{Α}{2}=ημΑ$, δείξτε ότι είναι ισοσκελές

3.88 Να αποδείξετε ότι:

Α) $\frac{4σφα\,(σφ^2α-1)}{(1+σφ^2α)^2}=ημ4α$

Β) $\frac{ημ3α}{ημα}-\frac{συν3α}{συνα}=2$

Γ) Αν $0<α<\frac{π}{6}$, τότε

$2συν2α-1=\sqrt{3+2συν4α-4συν2α}$

3.89 Να αποδείξετε ότι

Α) $ημ^4\frac{π}{8}+ημ^4\frac{3π}{8}+ημ^4\frac{5π}{8}+ημ^4\frac{7π}{8}=\frac{3}{2}$

Β) $16(συν20)(συν40)(συν60)(συν80)=1$

Γ) $συνα\cdot συν2α\cdot συν4α\cdot συν8α=\frac{ημ16α}{16\cdot ημα}$.

Δ) $εφ^2\left(\frac{π}{4}+\frac{θ}{2}\right)=\frac{1+ημθ}{1-ημθ}$

3.90 Για τη γωνία $α$ είναι γνωστό ότι $α\in\left(\frac{π}{2},π\right)$ και ότι $9συν2α-6συνα+5=0$. Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας $2α$.

3.91 Αν σε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει η ισότητα: $ημΑημΒ+συνΑσυν(Α+Γ)=0$, να αποδείξετε ότι είναι ορθογώνιο.

3.92 Να υπολογίσετε τις παραστάσεις :

$Α=(2συν^2 1002-1)^2+ημ^2 2004$

$Β=ημ^2 1002\cdot συν^2 1002+\frac{συν^2 2004}{4}$

3.93 Να αποδείξετε ότι

$\frac{ημ2α+ημα}{1+συν2α+συνα}=\frac{2εφ\frac{α}{2}}{1-εφ^2\frac{α}{2}}$

Τριγωνομετρικές Εξισώσεις

3.94 Να λύσετε τις εξισώσεις :

Α) $2ημ^2x=3(1-συνx)$

Β) $ημ2x=2εφx$

Γ) $ημ2x-ημx=συν2x-συνx+1$

Δ) $\sqrt{3}ημx-συνx=2$

3.95 Να λύσετε τις εξισώσεις:

Α) $συνx=2ημ\frac{x}{2}+1$

Β) $συν4x+2συν2x=0$

Γ) $2ημx=ημ\left(x-\frac{π}{3}\right)$ στο $[2π,5π]$

3.96 Να λύσετε τις εξισώσεις:

Α) $ημ^2\frac{x}{2}-\frac{1}{2}ημ2x=\frac{1}{2}-συνx$ στο $[0,π]$

Β) $συν2x\cdot ημ^2x=-1$ στο $[0,2π]$.

Γ) $3εφ^2x-2\sqrt{3}εφx+1=0$ αν $x\in[-3π,2π]$

3.97 Να λύσετε την εξίσωση

$ημ^{2004}\left(3x-\frac{π}{2}\right)+συν^{2004}\left(x+\frac{π}{3}\right)=0$ στο $(0,2π)$.

3.98 Να λύσετε τις εξισώσεις:

Α) $2συν^2x+8=17ημ^2x$

Β) $4ημ^3x+8συν^2x+ημx=5$

Γ) $|2ημxσυνx+1|+|3-2(2συν^2x-1)|=ημ2x+3$

3.99 Αν $εφ64^o=2$ να λυθεί η εξίσωση :

$ημxσυνx+3συν^2x=1$

3.100 Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων $f(x)=2x-ημ3x$ και $g(x)=συν3x+2x$ στο διάστημα $(0,2π)$.

3.101 Να λύσετε την εξίσωση

$συν(συνx)\cdot συν(ημx)=ημ(συνx)\cdot ημ(ημx)+1$

3.102 Αν για τις γωνίες τριγώνου ΑΒΓ ισχύουν: $εφΑ=\frac{1}{2},εφΒ=\frac{1}{3}$, να αποδείξετε ότι:

Α) $εφ(Α+Β)=1$ Β) $\hat{Γ}=135^o$

3.103 Αν $x-y=60^0$ και $εφy=\frac{1}{3}$ να βρεθεί η εφx

3.104 Να λυθεί στο διάστημα $[0,π]$ η εξίσωση:

$\left[\sqrt{2}συν\left(\frac{π}{4}-\frac{x}{2}\right)\right]^2=συν2x$.

3.105 Να λυθεί η εξίσωση :

$εφ\left(\frac{π}{4}+2x\right)=\sqrt{7+4\sqrt{3}}$

3.106 Να λυθεί η εξίσωση : $σφ\left(\frac{π}{2}\cdot συνx\right)=1$.

3.107 Να λυθεί η εξίσωση :

$(ημx+συνx+2)=\left[\left(ημ\frac{x}{2}+συν\frac{x}{2}\right)^2+συν^2\frac{x}{2}\right]$.

3.108 Α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$2ημx=ημ\left(x-\frac{π}{3}\right)$ έχει λύσεις τις $x=κπ-\frac{π}{6}$, $κ\in\mathbb{Z}$.

Β) Ποιες από αυτές περιέχονται στο $[2π,5π]$.

3.109 Να λυθεί η εξίσωση:

$|2ημxσυνx+1|+|3-2(2συν^2x-1)|=ημ2x+3$

3.110 Να λυθούν οι παρακάτω εξισώσεις :

α) $ημx\cdot συνx=συν^2\frac{x}{2}-\frac{1}{2}$

β) $συν2x=2ημx\cdot συνx$ στο διάστημα $[0,π]$

Γενικές

3.111 Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\kappa+\lambda\sigma\upsilon\nu 4x$, $\kappa,\lambda\in R$ που έχει μέγιστο το 7 και είναι $f\left(\frac{\pi}{8}\right)=2$.

Α) Να υπολογιστούν τα κ,λ

Β) Να βρείτε το ελάχιστο και τη περίοδο της f.

Γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=10\sigma\upsilon\nu 2x-3$

3.112 Αν $f(x)=1+\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x$ με $x\in(0,2\pi)$ τότε:

Α. Να δείξετε ότι $f(x)=2\sigma\upsilon\nu\frac{x}{2}\left(\eta\mu\frac{x}{2}+\sigma\upsilon\nu\frac{x}{2}\right)$ για κάθε $x\in(0,2\pi)$

Β. Να βρείτε τις τιμές του $x\in(0,2\pi)$ για τις οποίες ισχύει $f(x)\neq 0$

Γ. Για τις τιμές του x που βρήκατε στο β ερώτημα να αποδείξετε ότι: $\frac{f(\pi-x)}{f(x)}\sigma\varphi\frac{x}{2}=1$

3.113 Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\sigma\upsilon\nu^3 x\cdot\eta\mu x-\eta\mu^3 x\cdot\sigma\upsilon\nu x$ με $x\in R$.

Α) Να αποδείξετε ότι: $f(x)=\frac{1}{4}\eta\mu 4x$

Β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)+\varepsilon\varphi\frac{\pi}{3}\cdot f\left(\frac{\pi}{8}-x\right)=\frac{1}{4}$

Γ) Να βρείτε την μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης: $g(x)=8\cdot f(x)-1$.

3.114 Δίνονται οι παραστάσεις:

$A=\frac{-x+\eta\mu\alpha-x\sigma\upsilon\nu\alpha}{1-x\eta\mu\alpha-\sigma\upsilon\nu\alpha}$ και $B=\frac{1-\sigma\upsilon\nu 2\alpha+x\varepsilon\varphi^2\alpha}{1+x+\sigma\upsilon\nu 2\alpha}$

Α) Να δείξετε ότι οι είναι ανεξάρτητες του x.

Β) Αν $\alpha=\frac{\pi}{3}$, να αποδείξετε ότι $A+B=3+\sqrt{3}$

3.115 Έστω η συνάρτηση

$$f(x)=\frac{-\varepsilon\varphi^2\frac{x}{2}+2\varepsilon\varphi\frac{x}{2}+1}{1+\varepsilon\varphi^2\frac{x}{2}}$$

Α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f

Β. Να αποδείξετε ότι $f(x)=\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x$

Γ. Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=-1$

Δ. Η εξίσωση $f(x)=-1$ και η εξίσωση $\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x=-1$ είναι ισοδύναμες;

3.116 Δίνεται η $g(x)=\sqrt{2}\eta\mu\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)-3$

Α) Να βρεθεί η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή της

Β) Για ποιά x έχουμε την μέγιστη τιμή της

Γ) Να λυθεί η εξίσωση: $g(x)-g\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}$

3.117 Αν $f(x)=(\kappa-\lambda)\sigma\upsilon\nu\left[(\kappa+3\lambda)x\right]$ και $g(x)=(2\kappa-3\lambda+2)\sigma\upsilon\nu\left[(2\kappa+\lambda+5)x\right]$, όπου κ, λ θετικοί αριθμοί τότε να βρείτε τους κ, λ ώστε οι συναρτήσεις f και g να έχουν την ίδια μέγιστη τιμή, και η περίοδος της f να είναι διπλάσια της περιόδου της g

3.118 Δίνεται η $f(x)=\eta\mu\left(x+\frac{\pi}{8}\right)\cdot\eta\mu\left(x+\frac{5\pi}{8}\right)$

Α) Να δείξετε ότι : $f(x)=\frac{1}{2}\eta\mu\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$.

Β) Να λυθεί η εξίσωση : $f(x)=f\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$.

Γ) Να αποδείξετε ότι $\frac{2\cdot f\left(x-\frac{\pi}{8}\right)}{1+2\cdot f\left(x+\frac{\pi}{8}\right)}=\varepsilon\varphi x$

3.119 Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu 2x+\beta$, $x\in R$ και $\alpha,\beta\in R$ διέρχεται από τα σημεία $A(\pi,1)$ και $B\left(\frac{\pi}{2},3\right)$.

Α) Να υπολογίσετε τους πραγματικούς α, β.

Β) Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή καθώς και την περίοδο της f.

Γ) Να λύσετε την εξίσωση $2\cdot f\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)=3$

3.120 Δίνεται το γραμμικό σύστημα (Σ) με αγνώστους x,y.

$$(\Sigma)\ \begin{cases}\eta\mu\theta\cdot x-\sigma\upsilon\nu\theta\cdot y=1\\ \sigma\upsilon\nu\theta\cdot x+\eta\mu\theta\cdot y=1\end{cases},\quad \theta\in R$$

Α) Να δείξετε ότι το σύστημα έχει μοναδική λύση (x_0,y_0), την οποία και να βρείτε.

Β) Να λυθεί η ανίσωση: $3x-x^2\le x_0^2+y_0^2$

3.121 Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο:
$f(x)=\sqrt{1+\sigma\upsilon\nu x}+\sqrt{1-\sigma\upsilon\nu x}$

Α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

Β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι άρτια.

Γ) Να αποδείξετε ότι η f είναι περιοδική, με περίοδο $T=\pi$.

Δ) Να βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες.

3.122 Δίνεται η συνάρτηση
$f(x)=\left(\eta\mu^4 x+\sigma\upsilon\nu^4 x\right)\cdot(\varepsilon\varphi\, x+\sigma\varphi\, x)^2$.

Α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της

Β) Να αποδείξετε ότι $f(x)=\varepsilon\varphi^2 x+\sigma\varphi^2 x$.

Γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=2$.

3.123 Τα ετήσια έξοδα μιας επιχείρησης σε χιλιάδες ευρώ δίνονται από τη συνάρτηση $E(t)=300+25\eta\mu\frac{\pi t}{6}$ όπου t ο χρόνος σε έτη. Η επιχείρηση λειτουργεί από την αρχή του 1991 έως και το τέλος του έτους 2002

Α) Ποια έτη τα έξοδα φτάνουν τα 312500 ευρώ

Β) Ποιο έτος έχουμε το μέγιστο ποσό εξόδων;

3.124 Οι πωλήσεις, σε εκατοντάδες χιλιάδες, ενός σχολικού προϊόντος από μια εταιρεία με σχολικά είδη δίνονται από τη συνάρτηση $f(t)=\eta\mu\frac{\pi t}{6}+\varepsilon\varphi\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{\pi t}{6}+2$ εκατοντάδες χιλιάδες, όπου t ο χρόνος σε μήνες από την έναρξη της σχολικής χρονιάς, (Σεπτέμβριος) και α σταθερός πραγματικός αριθμός με $\alpha\in\left(0\ ,\ \frac{\pi}{2}\right)$.

Α. Να δείξετε ότι $f(t)=\frac{1}{\sigma\upsilon\nu\alpha}\eta\mu\left(\frac{\pi t}{6}+\alpha\right)+2$

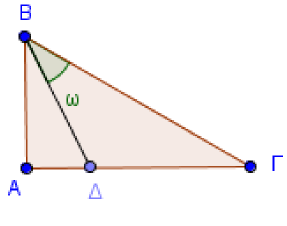
Β. Αν γνωρίζουμε ότι οι μέγιστες πωλήσεις της εταιρείας είναι 400000 μονάδες προϊόντος να υπολογίσετε την τιμή της σταθεράς α και κατόπιν να απαντήσετε στα παρακάτω ερωτήματα:

α) Ποιος είναι ο ελάχιστος αριθμός των πωλήσεων του προϊόντος;

β) Γιατί οι πωλήσεις του προϊόντος στον ίδιο μήνα κάθε χρόνο είναι οι ίδιες;

γ) Σε ποιόν μήνα του χρόνου οι πωλήσεις του προϊόντος είναι μέγιστες και σε ποιον ελάχιστες;

3.125 Το διπλανό τρίγωνο είναι ορθογώνιο στο A και ισχύει ότι $AB=2A\Delta$.
Να αποδείξετε ότι:



Α) $\varepsilon\varphi\omega=\frac{2\varepsilon\varphi B-1}{2+\varepsilon\varphi B}$

Β) Αν η $B\Delta$ είναι διχοτόμος της γωνίας B τότε $\varepsilon\varphi B=\frac{4}{3}$

4 ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ

Έννοια του πολυωνύμου - πράξεις

4.01 Να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο $P(x)=(\kappa-2)x^2+(2\lambda+6)x+\kappa+\lambda-3$ δεν μπορεί να είναι το μηδενικό για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς κ και λ.

4.02 Να βρεθεί για ποιες τιμές των $\kappa,\ \lambda,\ \mu\in R$ είναι ίσα τα πολυώνυμα:

$P(x)=\lambda x^2-(\lambda-\kappa)x+\mu-2\lambda$ και

$Q(x)=(\mu-\lambda)x^2+4x+\kappa+\lambda$.

4.03 Να προσδιοριστεί ο $\alpha\in R$ ώστε το πολυώνυμο $P(x)=9x^3-3x^2+8x-27$ να παίρνει τη μορφή $\alpha\left(x^3+x\right)-3x^2+(x-3)\left(x^2+3x+9\right)$.

4.04 Να βρεθεί πολυώνυμο του οποίου το τετράγωνο να ισούται με το $P(x)=x^4+2x^3-3x^2-4x+4$

4.05 Δίνονται τα πολυώνυμα $P(x)=2x^2-1$, $\Pi(x)=3x-1$, και $\Phi(x)=3\alpha x^2+2\beta x+\gamma-\alpha$, να βρείτε τα $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ ώστε $P(\Pi(x-1))=\Phi(x+1)$ για κάθε $x\in R$

4.06 Να βρεθεί πολυώνυμο $P(x)$ για το οποίο ισχύει $(2x-1)P(x)=2x^3+5x^2+11x-7$, $x\in R$

4.07 Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=x^2+2x+5$. Να βρεθεί ο πραγματικός αριθμός α αν ισχύει $P(\alpha-1)=13$

4.08 Να προσδιορίσετε τα $A,\ B,\alpha,\beta,\gamma\in R$ ώστε

Α) $\dfrac{2x}{(x+1)(x-2)}=\dfrac{A}{x+1}+\dfrac{B}{x-2}$

Β) $\dfrac{2x^2+10x-3}{(x+1)\left(x^2-9\right)}=\dfrac{\alpha}{x+1}+\dfrac{\beta}{x+3}+\dfrac{\gamma}{x-3}$

4.09 Προσδιορίστε τα A, B ώστε: $\dfrac{1}{(2\nu-1)(2\nu+1)}=\dfrac{A}{2\nu+1}+\dfrac{B}{2\nu-1}$ για κάθε τιμή του φυσικού αριθμού ν. Να υπολογίστε το

$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\ldots+\frac{1}{(2\nu-1)(2\nu+1)}$$

4.10 Να βρείτε για το βαθμό κάθενός από τα πολυώνυμα για κάθε λ ή α με $\lambda,\alpha\in R$

Α) $P(x)=\left(1-\lambda^2\right)x^3+(\lambda+1)x^2+x-3$.

Β) $P(x)=(\alpha^3-3\alpha^2+2\alpha)x^3+(\alpha^2-\alpha)x+1-\alpha$

Διαίρεση Πολυωνύμων

4.11 Αν το υπόλοιπο της διαίρεσης του πολυωνύμου $P(x)=x^{2000}+\alpha x^{1999}+\ldots+\alpha x+\alpha$ δια $x-1$ είναι 2001, να υπολογίσετε το α.

4.12 Να αποδείξετε ότι το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)=\lambda^2x^2+\left(2\lambda^2-3\lambda+1\right)x-3(2\lambda+1)$ με το $(x+2)$ είναι ανεξάρτητο του λ.

4.13 Για το πολυώνυμο $P(x)$ ισχύει ότι $P(0)=P(1)=4$. Δείξτε ότι $P(x)=x(x-1)\pi(x)+4$

4.14 Αν το υπόλοιπο της διαίρεσης ενός πολυωνύμου $P(x)$ δια του $x+2$ είναι 5 και το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $x-1$ είναι 2, να βρεθεί το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ δια του $(x+2)(x-1)$

4.15 Δίνονται τα πολυώνυμα $\Phi(x)=x^3-2\lambda x+1$ και $P(x)=\lambda x^2+3(\lambda-1)x+3$. Βρείτε το $\lambda\in R$ ώστε οι διαιρέσεις $P(x):(2x-1)$ και $\Phi(x):x+1$ να δίνουν το ίδιο υπόλοιπο.

4.16 Να βρείτε τα $\alpha,\beta\in R$ αν το πολυώνυμο $P(x)=2x^3+\alpha x^2-13x+\beta$ διαιρείται με x^2-x-6

4.17 Αν το πολυώνυμο $f(x)=x^3+\alpha x^2+\beta x+4$ διαιρείται ακριβώς με το $x-2$ και εάν επιπλέον $f(1)=8$, να προσδιοριστούν τα α, β.

4.18 Έστω $P(x)=3x^3+\alpha x^2+\beta x+6$. Βρείτε τα $\alpha,\beta\in R$ αν το -2 είναι ρίζα του $P(x)$, και το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ δια $(x-1)$ ισούται με -9.

4.19 Να βρεθούν τα $\alpha,\beta\in R$, αν το πολυώνυμο $P(x)=\alpha x^4+\beta x^3-18x^2+15x-5$ διαιρούμενο με το $g(x)=x^2-3x+2$ δίνει υπόλοιπο $\upsilon(x)=4x+7$.

4.20 Να προσδιορίσετε τους πραγματικούς αριθμούς κ, λ ώστε το πολυώνυμο $P(x)=x^4+1$, αν διαιρεθεί με το $x^2+\kappa x+\lambda$ να αφήνει υπόλοιπο 0.

4.21 Να βρεθούν οι πραγματικοί αριθμοί κ, λ ώστε το πολυώνυμο $P(x)=x^3-\kappa x^2+(\lambda-1)x+5$ να έχει παράγοντα το $(x-1)(x+2)$.

4.22 Δίνονται τα πολυώνυμα $P(x)=2x^2-3\lambda x+5$ και $\Phi(x)=3x^3+(\lambda-1)x+3$, $\lambda\in R$. Αν υ_1, υ_2 είναι τα υπόλοιπα των διαιρέσεων $P(x):(x-2)$ και $\Phi(x):(x+1)$ αντίστοιχα να βρεθεί το λ ώστε: A) $\upsilon_1=\upsilon_2$ B) $\upsilon_1=2\upsilon_2-1$ Γ) $\upsilon_1+\upsilon_2=0$

4.23 Αν τα υπόλοιπα των διαιρέσεων $P(x):(x-1)$ και $P(x):(x+1)$ είναι αντίστοιχα 3 και 1 να βρεθεί το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x):(x-1)(x+1)$

4.24 Αν το πολυώνυμο $P(x)$ έχει παράγοντα το $x-5$ να δείξετε οτι το πολυώνυμο $P(2x-3)$ έχει παράγοντα το $x-4$

4.25 'Εστω πολυώνυμο $P(x)$ με σταθερό όρο 1. Το $P(x)$ διαιρούμενο με το $x-\alpha$ δίνει πηλίκο x^2-3x+4 και διαιρούμενο με το $x-\beta$ δίνει πηλίκο x^2-4x+2. Να βρείτε το $P(x)$ και τα α, β

4.26 Να βρείτε τα α, $\beta\in R$ αν το πολυώνυμο $P(x)=x^3-x^2-(3+\alpha)x+\beta+10$ έχει για παράγοντα το $(x-2)^2$

4.27 Το πολυώνυμο $P(x)$ διαιρούμενο με $x-2$ και $x+3$ δίνει υπόλοιπο 10 και 5 αντίστοιχα. Να βρεθεί το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με $(x-2)(x+3)$

4.28 Αν το πολυώνυμο $P(x)=(\nu+1)x^\nu-\nu x^{\nu+1}+\alpha$ διαιρείται με το $x-1$, τότε αποδείξτε ότι διαιρείται και με το $(x-1)^2$.

4.29 Αν ρ είναι ρίζα του $P(2x-1)$, αποδείξτε ότι ο $\rho-1$ είναι ρίζα του πολυωνύμου $P(2x+1)$

4.30 Πολυώνυμο $P(x)$ διαιρούμενο δια του $(2x+1)(x-1)(x-3)$ δίνει υπόλοιπο $Y(x)=4x^2+3x+2$. Ποιο υπόλοιπο προκύπτει αν διαιρεθεί δια $2x+1$, δια $x-1$ και δια $x-3$ αντίστοιχα στην κάθε περίπτωση

4.31 Αν το πολυώνυμο $P(x)=x^2+(\alpha-1)x+2\alpha$ έχει ρίζα το -1 να αποδείξτε ότι το ίδιο ισχύει και για το $K(x)=x^3+4x^2+\left(\alpha^2-1\right)x$. Το αντίστροφο ισχύει;

4.32 Ένα πολυώνυμο $P(x)$ διαιρούμενο με $x-3$ δίνει πηλίκο $\pi_1(x)$ και διαιρούμενο με $x-4$ δίνει πηλίκο $\pi_2(x)$. Να αποδείξετε ότι: $\pi_1(4)=\pi_2(3)$

4.33 Δίνεται η εξίσωση $x^5+x^4+\kappa x+\lambda=0$. Να προσδιοριστούν οι κ, λ ώστε το πολυώνυμο να έχει ρίζα το -1 με πολλαπλότητα 2 (διπλή ρίζα). Μετά να βρεθούν και οι άλλες ρίζες της εξίσωσης.

4.34 Να βρεθούν οι πραγματικοί αριθμοί α και β έτοι ώστε η εξίσωση $x^5-\alpha x^3+\beta x^2+x-1$ να έχει το ανώτερο δυνατό πλήθος ακεραίων ριζών.

4.35 Να βρεθούν οι πραγματικοί αριθμοί α,β ώστε το $(x+1)^2$ να είναι παράγοντας του πολυωνύμου: $P(x)=x^3-\alpha x^2+(\alpha+\beta)x-1$

4.36 Να βρεθούν τα πολυώνυμα $f(x),g(x)$ αν

Α) $f(x+1)=x^2-2x+3$ Β) $g(3x+1)=9x^2-6x+1$

4.37 Δίνεται πολυώνυμο $P(x)$ που ικανοποιεί τη συνθήκη: $P(x^2+1)=[P(x)]^2+1$. Αν $P(0)=1$, να βρείτε τα $P(1)$, $P(2)$, $P(5)$ και $P(26)$

4.38 Έστω πολυώνυμο $\Phi(x)$ για το οποίο ισχύει ότι $\Phi(x)=\Phi(4x+3)$. Να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο $P(x)=\Phi(x)-\Phi(1)$ διαιρείται με το $2x+1$

4.39 Αν το πολυώνυμο $P(x)$ έχει την ιδιότητα: $P(x)=P(1-x)$ και $P(0)\neq 0$, να δείξετε ότι το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x):\left(x-x^2\right)$ είναι σταθερός αριθμός.

4.40 Δίνονται τα πολυώνυμα $P(x)=x^3-1$ και $Q(x)=x^2+\alpha x+\beta$. Να βρείτε τους $\alpha,\beta\in R$ ώστε το $P(x)$ να διαιρείται ακριβώς με το $Q(x)$.

4.41 Δίνονται τα πολυώνυμα $P(x)=x^3-2x^2+x+4\lambda$, $Q(x)=\lambda\cdot x^4-2x^3+x+2$ με $\lambda\in R$. Να βρεθεί το λ ώστε το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x):(x-1)$ να είναι τριπλάσιο από το υπόλοιπο της διαίρεσης $Q(x):(x+1)$.

4.42 Αν ισχύει $P(1-2x)=3\cdot P(x)+8$ και $P(1)=\kappa$ για ένα πολυώνυμο $P(x)$, να βρεθεί η τιμή του $\kappa\in R$ ώστε $P(-5)=23$.

4.43 Αν η πολυωνυμική εξίσωση $x^3+\alpha x+\beta=0$ έχει παράγοντα το $(x-\lambda)^2$, να δείξετε ότι $\frac{\alpha^3}{27}+\frac{\beta^2}{4}=0$

4.44 Α) Να βρεθεί πολυώνυμο 3 ου βαθμού ώστε να ισχύουν ότι $P(0)=0$ και $P(x)-P(x-1)=x^2$ για κάθε $x\in R$

Β) Να υπολογίσετε το $S=1^2+2^2+...+\nu^2$

Πολυωνυμικές Εξισώσεις - Εξισώσεις που ανάγονται σε πολυωνυμικές

4.45 Να λύσετε τις εξισώσεις:

Α) $\left(x^2+3x-2\right)^6-9\left(x^2+3x-2\right)^3+8=0$

Β) $(x+2)^8-3(x+2)^4-4=0$

4.46 Να αποδείξετε ότι για κάθε $\kappa,\lambda\in Z$ οι παρακάτω εξισώσεις δεν έχουν ακέραιες ρίζες:

Α) $5x^{2\nu}+9\kappa x-1=0$

Β) $8\lambda x^{2\nu}-2(\kappa-1)x+1=0$

4.47 Να λύσετε τις εξισώσεις

Α) $\sqrt{x-1}-1=\dfrac{2}{\sqrt{x-1}}$ Β) $\dfrac{4-\sqrt{x}}{2}=\dfrac{\sqrt{4x+20}}{4+\sqrt{x}}$

4.48 Να λύσετε τις ανισώσεις

Α) $x^3-2x^2-x+2>0$ Β) $x^3+3x\geq 5x^2-9$

4.49 Να λύσετε τις ανισώσεις

Α) $\sqrt{3x+7}<\sqrt{x+3}$ Β) $x-1\geq\sqrt{x+5}$

4.50 Να λύσετε τις ανισώσεις

α) $\dfrac{x^3+2x-4}{x-2}<1$ β) $\dfrac{x^2}{x+1}-\dfrac{4}{x-1}\leq\dfrac{2}{x^2-1}$

4.51 Να λύσετε τις εξισώσεις

Α) $\sqrt{x-8}=x-10$

Β) $\sqrt{2+\sqrt{x-5}}=\sqrt{13-x}$

Γ) $x^2+2x-7+\sqrt{x^2+2x+8}=5$

Συνδυαστικές Πολυώνυμα με Τριγωνομετρία

4.52 Αν το πολυώνυμο

$P(x)=\left(2\eta\mu^2\alpha-3\eta\mu\alpha+1\right)x^3+(2\eta\mu\alpha-1)x^2-2x+4$

είναι 2ου βαθμού, να βρεθεί το $\alpha\in(0,\pi)$.

4.53 Αν το πολυώνυμο

$P(x)=(\sigma\upsilon\nu\alpha)x^3+(\eta\mu^2\alpha)x^2-3x+2$ έχει παράγοντα το $(x-\sigma\upsilon\nu\alpha)$, βρείτε το $\alpha\in(-\pi,\pi)$.

4.54 Βρείτε τις τιμές του $\alpha\in R$, ώστε το πολυώνυμο $P(x)=x^4\eta\mu3\alpha+x^2\eta\mu2\alpha+x\eta\mu\alpha$, διαιρείται ακριβώς με το $x-1$.

4.55 Να βρείτε το $\alpha\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ αν το $x+1$ είναι παράγοντας του

$P(x)=x^4-\left(3\eta\mu\alpha-4\eta\mu^3\alpha\right)x^3+2x^2\eta\mu2\alpha-x\eta\mu\alpha-1$

.

4.56 Να βρεθεί το ω με $0^o\leq\omega\leq 360^o$ ώστε να ισχύει $3\eta\mu^3\omega+5\eta\mu^2\omega-4\eta\mu\omega-4=0$.

4.57 Να λυθεί η εξίσωση $3\sigma\upsilon\nu x-\sqrt[3]{\sigma\upsilon\nu x}=2$ αν $x\in\left(2\kappa\pi-\dfrac{\pi}{2},2\kappa\pi+\dfrac{\pi}{2}\right)$ με $\kappa\in Z$

4.58 Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $(2\eta\mu x-1)^4+6(\eta\mu x-1)^2-7=0$

β) $2\eta\mu^3x+5\eta\mu^2x+5\eta\mu x+2=0$

γ) $2\sigma\upsilon\nu^4x-5\sigma\upsilon\nu^3x+5\sigma\upsilon\nu x-2=0$

4.59 Έστω $f(x)=1-\sigma\upsilon\nu x$ και το πολυώνυμο $P(f(x))=f^3(x)-(1+f(x))^2$. Να βρεθούν για ποιες τιμές του x μηδενίζεται το πολυώνυμο.

4.60 Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=\kappa x^3+\lambda x^2+x-1$ το οποίο έχει παράγοντα το πολυώνυμο x^2-1.

Α) Να βρεθούν οι πραγματικοί αριθμοί κ,λ

Β) Να λυθεί η εξίσωση $P(x)=0$

Γ) Να λυθεί η ως προς x η ανίσωση: $\eta\mu\alpha\cdot P(x)\leq P(x)$, με $0<\alpha<\pi$

Γενικές Ασκήσεις στα Πολυώνυμα

4.61 Έστω ότι το πολυώνυμο

$P(x)=x^3-(\kappa+2)x^2+(\kappa-1)x+3\kappa-1$, $\kappa\in R$ έχει παράγοντα το $(x+1)$.

Α. Να βρίτε την τιμή του κ.

Β. Να λυθεί η εξίσωση $P(x)=0$.

Γ Να λύσετε την ανίσωση $P(x)>0$

4.62 Το πολυώνυμο $P(x)=x^3+\alpha x^2+11x+\beta$ διαιρούμενο δια $(x-1)(x-2)$ δίνει πηλίκο $\Pi(x)$ και αφήνει υπόλοιπο $\upsilon(x)=4$

Α Να υπολογιστούν τα $\alpha,\beta\in R$.

Β Να βρεθεί το $\Pi(x)$.

Γ Να λυθεί η ανίσωση $P(x)\le 4$

4.63 Δίνονται τα πολυώνυμα:

$P(x)=(\kappa-3)x^3+(\kappa+\lambda)x^2+(31-\lambda)x+24$,

$Q(x)=x^3+9x^2+26x+24$ όπου $\kappa,\ \lambda\in R$

Α. Να βρείτε για ποιες τιμές των $\kappa,\ \lambda$ τα πολυώνυμα $P(x)$, $Q(x)$ είναι ίσα.

Β. Να αποδείξετε ότι ο αριθμός -2 είναι ρίζα του πολυωνύμου $Q(x)$.

Γ. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $Q(x)=0$ δεν έχει θετική ρίζα.

4.64 Δίνεται το πολυώνυμο

$P(x)=x^3-2x^2+\kappa x+1$, όπου $\kappa\in R$.

Α) Για $\kappa=-3$, να βρείτε το πηλίκο και το υπόλοιπο της διαίρεσης του πολυωνύμου $P(x)$ με το πολυώνυμο $(x-3)$.

Β) Να βρείτε τις τιμές του κ ώστε το $P(x)$ να έχει μία τουλάχιστον ακέραια ρίζα.

Γ) Για $\kappa=0$, να λύσετε την εξίσωση $P(x)=0$.

4.65 Έστω το πολυώνυμο

$P(x)=(\alpha-1)x^4+\alpha x^3+3x^2+(1-\alpha)x+\beta$

Α. Να διερευνηθεί ο βαθμός του $P(x)$ για τις διάφορες τιμές του $\alpha\in R$

Β. Στην περίπτωση που είναι τρίτου βαθμού, βρείτε την τιμή του $\beta\in R$ ώστε το -1 να είναι ρίζα του $P(x)$ και να λύσετε την εξίσωση $P(x)=0$.

4.66 Έστω το πολυώνυμο $P(x)=2x^2-\alpha x+\alpha$, όπου α πραγματικός αριθμός.

Α) Να αποδείξετε ότι το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x):(x-\alpha+1)$ είναι $\upsilon=(\alpha-1)^2+1$

Β) Να βρείτε την τιμή του α ώστε αυτό το υπόλοιπο να είναι το μικρότερο δυνατό.

4.67 Δίνεται το πολυώνυμο:

$P(x)=x^3-(\kappa+1)x^2+(\kappa-1)x+2$, $\kappa\in R$, για το οποίο ισχύει ότι $P(2)=0$.

Α) Να αποδείξετε ότι $\kappa=2$.

Β) Να λύσετε την εξίσωση $P(x)=x-2$

4.68 Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=\alpha x^3+\beta x+2$, όπου $\alpha,\beta\in R$

Α) Να αποδείξετε ότι $P(2004)+P(-2004)=4$

Β) Να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης του πολυωνύμου $P(x)$ με το πολυώνυμο $Q(x)=x$

Γ) Να αποδείξετε ότι το υπόλοιπο της διαίρεσης του πολυωνύμου $P(x)$ με το πολυώνυμο $x-1$ είναι $\upsilon=\alpha+\beta+2$.

Δ) Αν $\alpha=1$ και το πολυώνυμο $P(x)$ έχει ρίζα τον αριθμό 1, τότε να υπολογίσετε το β και να λύσετε την εξίσωση $P(x)=0$

5 ΕΚΘΕΤΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

5.01 Βρείτε τις τιμές του $\alpha\in R$ ώστε οι παρακάτω συναρτήσεις να ορίζονται στο R

Α) $f(x)=\left(\dfrac{1-\alpha}{\alpha+2}\right)^x$. Β) $f(x)=\left(\dfrac{2\alpha-1}{1+\alpha}\right)^x$.

5.02 Έστω η συνάρτηση $f(x)=\left(1-\kappa^2\right)^x$.

Α) Για ποιες τιμές του κ η f ορίζεται στο R;

Β) Να εξετάσετε αν υπάρχουν τιμές του κ για τις οποίες η f είναι γνησίως αύξουσα.

Γ) Να βρείτε τις τιμές του κ ώστε η γραφική παράσταση της f να περνάει από το σημείο $(2,1)$

5.03 Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\left(\dfrac{\alpha+1}{3-\alpha}\right)^x$ με πεδίο ορισμού το R. Να βρείτε τις τιμές του $\alpha\in R$ για τις οποίες η συνάρτηση:

Α) είναι γνησίως αύξουσα Β) είναι σταθερή.

5.04 Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\left(\dfrac{2\lambda+1}{\lambda-1}\right)^x$

Α) Για ποιές τιμές του λ ορίζεται, $\forall x\in R$

Β) Να υπολογίσετε τις τιμές του λ για τις οποίες ισχύει $f(1)+f(2)+f(3)=3f(0)$.

Γ) Αν για κάθε $x<0$ ισχύει $f(x)>1$ να βρείτε τις τιμές του λ.

5.05 Αν $f(x)=e^x$ τότε να αποδείξετε ότι:

Για κάθε $x, y\in R$ ισχύουν:

Α) $f(x+y)=f(x)\cdot f(y)$

Β) $f(x)=f(y)\cdot f(x-y)$.

Γ) $\left[f(x)\right]^\nu=f(\nu x)$ για κάθε $x\in R$, $\nu\in N^*$

Δ) $\dfrac{f(x)+f(y)}{2}>f\left(\dfrac{x+y}{2}\right)$ με $x\neq y$

Εξισώσεις

5.06 Να λύσετε τις εξισώσεις

Α $5\cdot 2^x=2^{x+3}-3\sqrt{2}$

Β) $4^{3x}=2^4\cdot 16^{\frac{x}{2}}$

Γ) $\left(\dfrac{5}{3}\right)^{x+1}\left(\dfrac{9}{25}\right)^{x^2+2x-11}=\left(\dfrac{5}{3}\right)^9$

5.07 Να λύσετε τις εξισώσεις

Α) $3^{\frac{2}{x}}-4\cdot 3^{\frac{1}{x}}+3=0$

Β) $3^{x+1}-28+9\cdot 3^{-x}=0$

Γ) $4^x-3^{x-\frac{1}{2}}=3^{x+\frac{1}{2}}-2^{2x-1}$

Δ) $2^x-5\sqrt{2^x}+4=0$.

5.08 Να λύσετε τις εξισώσεις:

Α) $9^x-2\cdot 3^x-3=0$

Β) $e^{2x}+e=e^x+e^{x+1}$

Γ) $7^{3x+2}+4^{x+2}=7^{3x+4}+4^{x+3}$

5.09 Να λύσετε τις εξισώσεις:

Α) $2^{2x-1}+3^x+4^{x+1}-9^{\frac{x}{2}+1}=0$

Β) $\sqrt[x]{64^{2x-1}}=\sqrt{16^{2x-1}}$

Γ) $9^x+6^x=2\cdot 4^x$

5.10 Να λύσετε τις εξισώσεις:

Α) $\left(3^x-2\right)^2+3^x\left(3^x-1\right)=7$

Β) $3\cdot 2^{2x}=2\left(4^x+1\right)\left(1-4^x\right)$.

Γ) $5^{x^2+1}+25^{x^2}=6$

5.11 Να λύσετε τις εξισώσεις:

Α) $2^x+6x-40=0$

Β) $7\left(11+6\sqrt{2}\right)^x=3-\sqrt{2}$

5.12 Να λύσετε τις εξισώσεις:

Α) $9^x+1=2\cdot 3^x\cdot συνx$

Β) $2^x+2^{-x}=2|συνx|$

Γ) $x^2\left(2^{|x-3|+4}-2^{x+1}\right)=2^{|x-3|+2}-2^{x-1}$

Ανισώσεις

5.13 Να λύσετε τις ανισώσεις

Α) $3^{x^2-7x+6}<1$

Β) $3^{2-|x|}>1$

Γ) $(0,5)^{5x-x^2-1}<0,125$

Δ) $9^{\frac{1}{x}}\le\sqrt{3^x}$

Ε) $\left(2-\sqrt{3}\right)^{x^2}>\left(2+\sqrt{3}\right)^{x-2}$

ΣΤ) $\left(\frac{4}{5}\right)^{2x^2-x+1}\ge 1$

5.14 Να λύσετε τις ανισώσεις

Α) $4^x-6\cdot 2^x+8<0$

Β) $3^{x+\frac{1}{2}}+3^{x-\frac{1}{2}}\ge 4^{x+\frac{1}{2}}-2^{2x-1}$

Γ) $e^{2x}+e\ge e^x+e^{x+1}$ Δ)

Δ) $e^{2x}-(e-2)e^x-2e<0$

5.15 Να λύσετε τις ανισώσεις:

Α) $4^{ημ^2x}+4^{συν2x}\le 5$

Β) $27^x+12^x-2\cdot 8^x>0$

Γ) $9^{x+1}-108\cdot 3^x+243>0$

5.16 Να λύσετε τις ανισώσεις:

Α) $e^x+3\ge 3e^x+e^{2x}$

Β) $\frac{2e^x-3}{e^x-1}>2$

Γ) $\frac{e^{2x}-e^x}{e^x-e}<-1$

Δ) $\frac{e^x-1}{e^x+1}>\frac{1}{2}$

Συστήματα

5.17 Να λύσετε τα συστήματα:

Α) $\begin{cases}4^x\cdot 2^{y-2}=32\\ 3^{x+2}\cdot 3^{y-4}=27\end{cases}$

Β) $\begin{cases}2^x.3^y=54\\ 3^x.2^y=24\end{cases}$

Γ) $\begin{cases}3^{x-y}-4^{x-2y+1}=-13\\ 2\cdot 3^{x-y}+3\cdot 4^{x-2y}=18\end{cases}$

Δ) $\begin{cases}3^{\frac{x-y}{2}}-3^{\frac{x-y}{4}}=6\\ 2^{\frac{x+y}{3}}-2^{\frac{x+y}{6}}=2\end{cases}$

Ε) $\begin{cases}3.2^x-2^{x+y}+2=0\\ 5.2^{x+1}-2^{x+y-1}-16=0\end{cases}$

Στ) $\begin{cases}3^x-2^{y+3}=15\\ 2^y-3^{x-3}=3\end{cases}$

Προβλήματα

5.18 Σ' ένα ασθενή με υψηλό πυρετό χορηγείται ένα αντιπυρετικό φάρμακο. Η θερμοκρασία $Θ(t)$ του ασθενούς t ώρες μετά την λήψη του φαρμάκου δίνεται από τον τύπο

$Θ(t)=36+4\left(\frac{1}{2}\right)^t$ βαθμοί Κελσίου.

Α) Να βρείτε πόσο πυρετό είχε ο ασθενής τη στιγμή που του χορηγήθηκε το φάρμακο.

Β) Να βρείτε σε πόσες ώρες η θερμοκρασία του ασθενούς θα πάρει την τιμή 36.5^o C

Γ) Αν η επίδραση του αντιπυρετικού διαρκεί 4 ώρες πόση θα είναι η θερμοκρασία του ασθενούς μόλις σταματήσει η επίδρασή του

5.19 Μελετώντας την ανάπτυξη ενός είδους βακτηριδίων παρατηρήθηκε ότι 2 ώρες μετά την έναρξη της παρατήρησης τα βακτηρίδια ήταν 400 ενώ 4 ώρες μετά την έναρξη της παρατήρησης ήταν 3200. Αν ο αριθμός των βακτηριδίων είναι $P(t)=P_o\cdot 2^{ct}$, όπου $P(t)$ ο αριθμός των βακτηριδίων σε χρόνο t, P_o ο αρχικός αριθμός και c σταθερά τότε:

Α) Να βρείτε τη σταθερά c και τον αρχικό αριθμό των βακτηριδίων.

Γ) Σε πόσα λεπτά ο αρχικός αριθμός των βακτηριδίων είχε διπλασιαστεί;

ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

5.20 Να αποδείξετε τις παρακάτω ισότητες :

Α) $2\ln 2+3\ln 3-\ln 12=2\ln 3$

Β) $2\ln\frac{5}{2}+\ln\frac{3}{11}-\ln\frac{40}{77}-\ln\frac{105}{32}=0$

Γ) $\log\frac{11}{3}-2\log\sqrt{\frac{7}{44}}+\log\frac{21}{121}=2\log 2$

5.21 Να αποδείξετε τις παρακάτω ισότητες

Α) $\frac{\log 2+\log 3}{\log 3,6+1}=\frac{1}{2}$ Β) $\log\left(\eta\mu\frac{\pi}{6}\right)=-\log 2$

Γ) $\log\left(\eta\mu\frac{\pi}{6}\right)\cdot\log\left(\eta\mu\frac{\pi}{3}\right)\cdot\log\left(\eta\mu\frac{\pi}{2}\right)=0$

5.22 Να υπολογίσετε την παράσταση:

$\ln\frac{1}{e}-\ln\sqrt{e}+\ln(\ln e)-\ln 2^{\log_2 e}+\log_2(\log_2 4)$

5.23 Να αποδείξετε ότι

$(\log 5)^3+(\log 20)^3+\log 8\log 0,25=2$

5.24 Αν α, β, γ διάφοροι μεταξύ τους θετικοί αριθμοί, και ισχύει: $\frac{\log\alpha}{\beta-\gamma}=\frac{\log\beta}{\gamma-\alpha}=\frac{\log\gamma}{\alpha-\beta}$ να αποδείξετε ότι $\alpha^{\alpha}\cdot\beta^{\beta}\cdot\gamma^{\gamma}=1$.

5.25 Να αποδείξετε ότι

Α) $\log\left(1-\frac{1}{2}\right)+\log\left(1-\frac{1}{3}\right)+\ldots+\log\left(1-\frac{1}{100}\right)=-2$

Β) Αν $0<\alpha,\ \beta,\ \gamma\neq 1$ τότε $\alpha^{\log\frac{\beta}{\gamma}}\cdot\beta^{\log\frac{\gamma}{\alpha}}\cdot\gamma^{\log\frac{\alpha}{\beta}}=1$

5.26 Αν $x>0$, $y>0$ και $x^2+y^2=7xy$, να αποδείξετε ότι: $\log_\alpha\frac{x+y}{3}=\frac{1}{2}(\log_\alpha x+\log_\alpha y)$

5.27 Να αποδείξετε ότι

$\ln 2+\ln\left(2+\sqrt{2}\right)+\ln\left(2+\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)+$
$+\ln\left(2-\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)=2\ln 2$

Εξισώσεις

5.28 Να λύσετε τις εξισώσεις:

Α) $\ln(4x-1)=2\ln 2+\ln\left(x^2-1\right)$

Β) $\frac{1}{2}\log(x+2)+\log\sqrt{x-3}=1+\log\sqrt{3}$

5.29 Να λύσετε τις εξισώσεις :

Α) $x+\log\left(1+2^x\right)=x\log 5+\log 6$

Β) $\log_2\left(3^{2x-2}+7\right)=2+\log_2\left(3^{x-1}+1\right)$

Γ) $x(\log 10-\log 5)=\log(4^x-12)$

5.30 Να λύσετε τις εξισώσεις

Α) $\ln\left(3^x+2.5^x\right)-x\ln 5=\ln 39-\ln 15$

Β) $3^{2x}+9^x=11\cdot 4^{x-1}+4^{x+1}$

Γ) $2^{2x-1}+3^x+4^{x+\frac{1}{2}}-9^{\frac{x}{2}+1}=0$

5.31 Να λύσετε τις εξισώσεις:

Α) $\log\left(\log(2x^2+x-11\right)=0$

Β) $\ln\left(3^x+2\right)=2x\ln 3$

5.32 Να λύσετε τις εξισώσεις:

Α) $\log\left(2^x+2\cdot 3^x\right)+\log 81=x\log 3+\log 243$

Β) $2^{\log x}+2^{5-\log x}=12$

Γ) $27^{\frac{x+2}{3}}+3^{2x+2}=810$

5.33 Να λύσετε τις εξισώσεις:

Α)

$(\log_2 x)^4-5(\log_2 x)^3+5(\log_2 x)^2+5\log_2 x=6$

Β) $\ln(\sigma\upsilon\nu x)=0$

Γ) $\log_x 1000=(\log_x 10)^2+2$

Δ) $2\cdot(\log_x 8)^2+\log_x 64+\log_x 8=9$

5.34 Να λυθούν οι εξισώσεις:

Α) $\frac{1}{2}\log x - \log 4 = \log(x+1) - 1$

Β) $\log(1-2x^2) + \log(1-x) = -\log 4$

5.35 Α) Να υπολογίσετε τον αριθμό $5^{2\log_5 10 - 3}$

Β) Αποδείξτε ότι: $3^{\log x} = x^{\log 3}$ και $x^{\log 5} = 5^{\log x}$

Γ) Να λύσετε τις εξισώσεις

α) $3^{\log x} = 54 - x^{\log 3}$ και

β) $5^{2\log x} = 5 + 4 \cdot x^{\log 5}$

5.36 Να υπολογίσετε τον αριθμό $100^{\log\sqrt{3}}$ και να λύσετε την εξίσωση

$3^{2\log x} - 2 \cdot 3^{\log x} - 100^{\log\sqrt{3}} = 0$

5.37 Δίνεται η συνάρτηση f με

$f(x) = \frac{\sqrt{1-\ln x}}{\ln x}$

Α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της,

Β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = \sqrt{2}$.

5.38 Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων

Α) $f(x) = \sqrt{1-x} + \ln x$

Β) $f(x) = \frac{1}{x-1} + \ln 2x$

Γ) $f(x) = \frac{1}{\ln x} + \frac{1}{e^x}$

Δ) $f(x) = \sqrt{1-\ln x}$

5.39 Να λύσετε τις εξισώσεις:

Α) $2 \cdot 4^{x^3} \cdot 16^{x^2-x} = 8$

Β) $\log_{x+2}\left(17x^2 - 6x + 8\right) = 3$

5.40 Να λύσετε τις εξισώσεις:

Α) $\sqrt[3]{x^{1+\log_3 x^2}} = 9$

Β) $2x\ln 3 = \ln\left(2+3^x\right)$

Ανισώσεις

5.41 Να βρεθεί το πρόσημο των αριθμών:

$\log_4 3$, $\log_{\frac{2}{5}}\left(\frac{4}{5}\right)$, $\log_{\frac{2}{3}} 5$, $\log_3 \frac{1}{4}$.

5.42 Να συγκριθούν οι αριθμοί:

Α) $\log_{\frac{2}{5}} 6$, $\log_{\frac{2}{5}} 11$

Β) $\log_6 4$, $\log_5 4$.

Γ) $\log(1-4x)$ και $2\log(x-2)$.

5.43 Να λύσετε τις ανισώσεις:

Α) $-2\left(\frac{1}{5}\right)^{2x} + 3\left(\frac{1}{5}\right)^{x} - 1 \le 0$

Β) $\log^2 x \ge \log x + 2$

Γ) $5 \cdot 25^x - 2 \cdot 5^{x+1} - 5^x + 2 > 0$

5.44 Να λυθούν οι ανισώσεις:

Α) $\ln^2 x - \ln\frac{1}{x} - 2 > 0$.

Β) $\ln(\ln(x+3)) > 0$.

5.45 Να αποδειχτεί ότι: $2 < 4\log_3 2 < 3$.

5.46 Να λύσετε τις ανισώσεις:

Α) $\ln^2 x - 5\ln x + 6 > 0$

Β) $\ln^2 x > \ln x$

Γ) $(\log x^3)^2 - 2\log x^2 - 5 < 0$

Δ) $\ln(x^2-4) > \ln(3|x|)$.

5.47 Να λυθούν οι ανισώσεις:

Α) $[\log(2x-1)]^2 - \log(2x-1) - 2 \le 0$

Β) $\log[\log(\log x)] \ge 0$.

5.48 Έστω $\alpha, \beta > 0$, ώστε $(\log\beta)^2 = \log\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2$.

Να αποδείξετε ότι: α) $\beta \ge \alpha$. β) $\alpha \le \sqrt{10}$

Συστήματα

5.49 Να λύσετε τα συστήματα :

A) $\begin{cases} y^{\log x} = 100 \\ \log(xy) = 3 \end{cases}$ B) $\begin{cases} \log x + \log y = 1 \\ 9^{x-2y}.3^{y} = 81 \end{cases}$

5.50 Να λύσετε το σύστημα $\begin{cases} x^2 + y^2 = 425 \\ \log x + \log y = 2 \end{cases}$

5.51 Να βρείτε δύο θετικούς αριθμούς που οι φυσικοί τους λογάριθμοι έχουν άθροισμα 2 και γινόμενο -8.

5.52 A) Να δείξετε ότι $x^{\log y} = y^{\log x}$ με $x, y > 0$

B) Να λύσετε το σύστημα: $\begin{cases} x^{\log y} + y^{\log x} = 20 \\ \log\sqrt{x \cdot y} = 1 \end{cases}$

Γ) Αν οι λύσεις του (ii) είναι ρίζες της εξίσωσης: $\log\left[\log\left(x^2 + x\log\theta - 110\right)\right] = 0$ να βρείτε το $\theta \in R_+^*$

5.53 Αν οι ρίζες τις εξίσωσης $\log\left[\log\left(x^2 + x\log\theta + 110\right)\right] = 0$ αποτελούν λύση του συστήματος: $\left\{\begin{matrix} y^{\log z} + z^{\log y} = 20 \\ \log\sqrt{yz} = 1 \end{matrix}\right\}$ να αποδείξετε ότι $\theta = 10^{-20}$

5.54 *Να λυθεί στο R το (Σ): $\begin{cases} x + e^x = y + e^y \\ x^2 + xy + y^2 = 12 \end{cases}$

5.55 Να λύσετε το σύστημα: $\begin{cases} x^y = y^x \\ x = y^2 \end{cases}$ με $x, y > 0$

5.56 Να λύσετε το σύστημα:

A) $\begin{cases} x^{\ln y} + y^{\ln x} = 2e \\ \ln\sqrt{xy} = 1 \end{cases}$ B) $\begin{cases} y^{\log x} = 100 \\ \log(xy) = 3 \end{cases}$

A.B.

5.57 Να αποδειχθεί ότι για κάθε $0 < \alpha, \beta \neq 1$ ισχύει: $\left[\log_\alpha(\alpha\beta)\right]^{-1} + \left[\log_\beta(\alpha\beta)\right]^{-1} = 1$

5.58 Να αποδειχτεί ότι:

$\log_{\alpha\beta}\theta = \left(\dfrac{1}{\log_\alpha\theta} + \dfrac{1}{\log_\beta\theta}\right)^{-1}$, με $0 < \alpha, \beta \neq 1$, $\theta > 0$.

5.59 Αν $\log_\beta x = \alpha$ και $0 < \alpha, \beta, x \neq 1$, να αποδείξετε ότι:

A) $\log_{\frac{1}{\beta}} x = -\alpha$ B) $\log_{\alpha\beta} x = \dfrac{\log_\alpha x}{1 + \log_\alpha \beta}$.

5.60 Αν $0 < \alpha, \beta \neq 1$, να αποδειχτεί ότι:

$\log_\alpha\left(\dfrac{1}{\beta^{10}}\right) \cdot \log_\beta \alpha^{10} + 100 = 0$.

5.61 Αν $0 < x \neq 1$ και $0 < \alpha, \beta \neq 1$ και ισχύει: $\dfrac{1}{\log_3 x} + \dfrac{1}{\log_\alpha x} + \dfrac{1}{\log_\beta x} = 0$ να δείξετε ότι $\alpha \cdot \beta = \dfrac{1}{3}$

5.62 Αν οι αριθμοί α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου με $0 < \alpha, \beta, \gamma, \theta \neq 1$, να αποδειχτεί ότι: $\dfrac{2}{\log_\beta\theta} = \dfrac{1}{\log_\alpha\theta} + \dfrac{1}{\log_\gamma\theta}$.

5.63 Αν $\log_{\alpha^2}\alpha = x, \log_{\alpha^3}\alpha^2 = \psi, \log_{\alpha^4}\alpha^3 = \omega$ με $0 < \alpha \neq 1$, να αποδειχτεί ότι:

$x + \psi + \omega = x\psi\omega + \dfrac{20}{12}$.

5.64 Αν $0 < \alpha \neq 1$ και $x = \log_{\sqrt{\alpha}}\alpha$, $y = \log_\alpha \alpha^2$, $z = \log_{\alpha^2}\alpha^4$, να αποδειχτεί ότι: $x + y + z + 2 = xyz$.

Συνδιαστικές με τριγωνομετρία

5.65 Αν $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ να αποδείξετε ότι:

$\ln(\eta\mu 2x) - \ln 2 = \ln(\eta\mu x) + \ln(\sigma\upsilon\nu x)$

5.66 Να λύσετε τις εξισώσεις

Α) $2^{\sigma\upsilon\nu x} + 2 \cdot 2^{-\sigma\upsilon\nu x} = 3$ στο $[0, 2\pi]$

Β) $e^{3\ln x} = 7 \cdot e^{\ln x} + 6$

5.67 Να λύσετε την εξίσωση

$\log(\eta\mu^2 x) + \log(\sigma\upsilon\nu^2 x) = -4\log 2$, $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

5.68 Να λύσετε την εξίσωση

$4^{\eta\mu x+1} - 9 \cdot 2^{\eta\mu x} + 2 = 0$

5.69 Να λύσετε την εξίσωση

$\sqrt{6} \cdot 10^{\log(\eta\mu x)} + \sqrt{2} \cdot e^{\ln(\sigma\upsilon\nu x)} = 2$ στο $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

5.70 Να λύσετε στο $[0, \pi]$ την εξίσωση:

$\sigma\upsilon\nu x + e^{-x} = 2$

5.71 Να λύσετε τις ανισώσεις:

Α) $(4x)^{\log 2 + \log\sqrt{x}} > 100$

Β) $\left(\frac{1}{2}\right)^{(\log x)^2 - 3\log x + 2} > 1$

5.72 Έστω ότι $f(x) = \left(\frac{\sigma\upsilon\nu\alpha}{1 + \eta\mu\alpha}\right)^x$, $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

Α. Αποδείξετε ότι η f γνησίως φθίνουσα στο R

Β. Να αποδείξετε ότι $f(1) = \varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)$.

Γ. Λύστε την εξίσωση $[f(x) + f(-x)]\sigma\upsilon\nu\alpha = 2$

5.73 Έστω η $f(x) = e^{x+1} + e^x - e - 1$ να σύσετε τις εξισώσεις $f(x) = 0$ και $f(\eta\mu x) = f(\sigma\upsilon\nu x)$.

Συνδιαστικές με πολυώνυμα

5.74 Να βρείτε το $\alpha \in R$, ώστε το πολυώνυμο $P(x) = 4^\alpha x^3 - 2^{\alpha+1}x^2 - 9x + 1$ να έχει παράγοντα το $x - 1$

5.75 Δίνεται ότι το πολυώνυμο

$P(x) = (2\ln\kappa - 1)x^4 + x^3 + (e-1)x^2 - ex + 1 + 2\eta\mu\theta$

με $\theta \in (0, 2\pi)$, $\kappa \in (0, +\infty)$ είναι τρίτου βαθμού και έχει παράγοντα το $x - 1$

Α) Να βρείτε τα κ και θ

Β) Να λύσετε την ανίσωση $P(x) < 0$

Γ) Να βρείτε τα διαστήματα που η γραφική παράσταση της $f(x) = e^{3x} + (e-1)e^{2x} - e^{x+1}$ βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$.

5.76 Έστω ότι το πολυώνυμο

$P(x) = (\ln\alpha)x^3 + (2 - \ln\alpha)x^2 + \alpha^{\ln\beta}x + 1$ έχει θετικούς ακέραιους συντελεστές και αρνητική ακέραια ρίζα. Τότε

Α) Να βρείτε τα $\alpha, \beta \in R$

Β) Για $\alpha = e$, $\beta = 1$ να βρείτε τα διαστήματα που η γ.π. της συνάρτησης $f(x) = P(e^x)$ βρίσκεται κάτω από τη γ.π. της $g(x) = e^x + 3$

5.77 Δίνονται οι παραστάσεις

$\alpha = \eta\mu^2 1005 \cdot \sigma\upsilon\nu^2 1005 + \frac{\sigma\upsilon\nu^2 2010}{4}$ και

$\beta = (2\sigma\upsilon\nu^2 1005 - 1)^2 + \eta\mu^2 2010$.

Α. Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση $f(x) = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^x$ και να δείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα.

Β. Αν $\alpha = \frac{1}{4}$ και $\beta = 1$:

α. Να λυθεί η ανίσωση $f(x^3 + 2) < f(3x)$

β. Να λυθεί η εξίσωση $f(\sigma\upsilon\nu^2\theta + 2\eta\mu\theta) = f(1)$.

ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΗΝ ΕΚΘΕΤΙΚΗ & ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

5.78 Βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων

Α) $f(x)=\ln(e^{2x}-4e^{x}+3)$

Β) $g(x)=\sqrt{\ln(\ln(x^2-(2+e)x+3e))}$.

Γ) $f(x)=\sqrt{-2\left(\frac{1}{7}\right)^{2x}+3\left(\frac{1}{7}\right)^{x}-1}$

5.79 Να λύσετε τα συστήματα:

Α) $\begin{cases} |\log x-2|<1 \\ \dfrac{\sqrt{\log x-1}}{12-x}>0 \end{cases}$ Β) $\begin{cases} 3^x\cdot 3^{2\psi}=243 \\ \log x-2\log\psi=\log 3 \end{cases}$.

5.80 Να λυθούν οι ανισώσεις:

Α) $(\log x^3)^2-2\log x^2-5<0$

Β) $\log(x^2-4)>\log 3|x|$.

5.81 Να λύσετε τις ανισώσεις:

Α) $\dfrac{\ln(1-\ln x)}{2^{\ln x}-2^{\log x}}\geq 0$ Β) $\dfrac{3\cdot 6^x-18^x}{\ln(x+1)}\geq 0$

Γ) $\dfrac{e^x-2^x}{\ln x+1}\geq 0$ Δ) $\dfrac{e^{2x+1}-e^{x-1}}{\ln(x+1)-1}\leq 0$

Ε) $\dfrac{\ln(x+1)+\ln 2x}{2-4^{\log x}}\leq 0$ (mathematica.gr)

5.82 Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=\ln\left(e^x-3+\dfrac{2}{e^x}\right)$.

Α Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f

Β Να δείξετε ότι η συνάρτηση f παίρνει την μορφή: $f(x)=\ln\left[\left(e^x-1\right)\cdot\left(e^x-2\right)\right]-x$

Γ Να βρείτε τα σημεία για τα οποία η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από την γραφική παράσταση της $g(x)=x$

5.83 Δίνεται η $f(x)=\log|\log(x-3)|$. Να βρείτε:

Α) Το πεδίο ορισμού της.

Β) Για ποιές τιμές του x η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $x'x$.

Γ) Τις ακέραιες τιμές του x για τις οποίες ισχύει $f(x)>0$.

5.84 Έστω η συνάρτηση $f(x)=\ln\left(e^x-1\right)$.

Α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της

Β) Να βρείτε τα διαστήματα του x που η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$

Γ) Να συγκρίνετε τους $f(\ln 2)$ και $f(1)$

Δ) Να λύσετε την εξίσωση $f(2x)-f(x)=f(1)$

5.85 Έστω οι συναρτήσεις

$f(x)=\log(\alpha\cdot 2^{x+1})-\log(6)$, $g(x)=\log(x\cdot 2^x)$, $x>0$

Αν οι C_f, C_g τέμνονται στο σημείο Μ με τετμημένη $x_0=1$

Α) Να αποδείξετε ότι $\alpha=3$

Β) Να συγκρίνετε τους αριθμούς $f(3)$ και $g(3)$

Γ) Να λύσετε την εξίσωση

$g(x)+\ln 10=f(x)+(\log e)^{-1}$

Δ) Να παραστήσετε την f στο επίπεδο

5.86 Δίνεται η συνάρτηση f(x) =

$f(x)=\left(\dfrac{\ln\alpha-\ln 2}{\ln\beta-\ln\alpha}\right)^x$, με $2<\alpha<\beta$ η οποία είναι γνησίως φθίνουσα στο R

Α. Να αποδείξετε ότι $\alpha^2<2\beta$

Β. Αν $\alpha=4$ και $\beta=32$ τότε:

α) να δείξετε ότι $f(x)=\left(\dfrac{1}{3}\right)^x$

β) να λύσετε την εξίσωση $f(x+2)=9\cdot\sqrt{3^{1-x}}$

5.87 Έστω η συνάρτηση $f(x)=\ln\left(e^x-3^{x-1}\right)$

Α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της

Β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=x-2\ln 2$

Γ) Να λύσετε την ανίσωση $f(x)<x$

5.88 Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{2\log x+1}{2\log x-1}$

Α) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της f

Β) Να λυθεί η εξίσωση $f(x)+f\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{10}{3}$

5.89 Δίδεται η συνάρτηση με τύπο $f(x)=5^{\ln x}-3^{\ln x-1}+5^{\ln x-1}-3^{\ln x+1}$.

Α Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

Β Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=0$.

5.90 Δίνεται η $f(x)=10+\dfrac{\log(\log x)}{\log e}$. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της και να υπολογίσετε το x ώστε να ισχύει $f(y^x)-f(y)=2$.

5.91 Έστω η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{\ln(3x-11)}{\ln(x-5)}$.

Α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

Β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=2$.

Γ) Αν $g(x)=1$ με $x>6$, να λύσετε την ανίσωση $f(x)>g(x)$.

5.92 Δίνεται η συνάρτηση $f:R\to R$ η οποία είναι γνησίως φθίνουσα και η συνάρτηση $g(x)=f(x)+e^{-x}$, $x\in R$

Α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g είναι γνησίως μονότονη στο R

Β) Να λυθεί η ανίσωση $f(\ln x)-f(1)<\dfrac{1}{e}-\dfrac{1}{x}$

5.93 * Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\left(\sqrt{5}+1\right)^x+\left(\sqrt{5}-1\right)^x$

Α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της

Β) Αποδείξτε ότι η f είναι γνήσια αύξουσα

Γ) Να λύσετε την ανίσωση $f(x)>2$

Δ) Λύστε τις εξισώσεις $f(x)=12$ και $f(x)=2$

Ε) Να λύσετε την ανίσωση $f\left(\eta\mu^2 x\right)\le 2$

Στ) Λύστε την εξίσωση $f\left(\sqrt{x}\right)=f\left(x^2\right)+\ln x$

5.94 Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\left(\dfrac{2\alpha+1}{\alpha-1}\right)^x$, $\alpha\in R$.

Α) Να βρεθούν οι τιμές του $\alpha\in R$ ώστε να ορίζεται στο R η συνάρτηση.

Β) Να βρεθούν οι τιμές του $\alpha\in R$ ώστε η συνάρτηση να είναι γνησίως φθίνουσα στο R.

Γ) Αν η f είναι γνησίως φθίνουσα, να βρεθεί η τιμή του πραγματικού α ώστε να ισχύει $f(1)-f(2)=2f(3)$

Δ) Αν $\alpha=-\dfrac{4}{3}$, να λυθεί η ανίσωση $f\left(e^{2x}+e^3\right)<f\left(e^{x+1}+e^{x+2}\right)$

5.95 Έστω η συνάρτηση $g(x)=\left(\dfrac{1}{\ln(\alpha-1)-1}\right)^x$ με $x\in R$

Α) Να βρείτε τις τιμές τις παραμέτρου $\alpha\in R$ για τις οποίες ορίζεται η συνάρτηση.

Β) Να εξετάσετε τη μονοτονία της g για τις διάφορες τιμές του α

Γ) Να βρείτε την τιμή του α για την οποία η γραφική παράσταση της g διέρχεται από το $(-1,2)$

5.96 Έστω η συνάρτηση $f(x)=\ln^2\left(\dfrac{1}{x}\right)+\ln x$.

Α Να προσδιορίσετε το πεδίο ορισμού της f

Β Να αποδείξετε ότι $f(x)=\ln x\cdot(\ln x+1)$.

Γ Να λυθεί η εξίσωση $f(x)=2f\left(\dfrac{1}{e}\right)$

Δ Να λυθεί η ανίσωση $f(x)>f(e)$