

**ΤΑΞΗ:** Β' ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ  
**ΜΑΘΗΜΑ:** ΆΛΓΕΒΡΑ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

**Ημερομηνία:** Μ. Τετάρτη 27 Απριλίου 2016

**Διάρκεια Εξέτασης:** 2 ώρες

### ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

#### ΘΕΜΑ Α

**A1.** Σχολικό βιβλίο σελ. 60

**A2.** α) Σ, β) Λ, γ) Σ, δ) Λ, ε) Λ

#### ΘΕΜΑ Β

$$\begin{aligned} \mathbf{B1.} \quad A(x) &= \frac{2}{\sigma\phi x + \epsilon\phi x} = \frac{2}{\frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x} + \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}} = \frac{2}{\frac{\sigma\upsilon\nu^2 x + \eta\mu^2 x}{\eta\mu x \sigma\upsilon\nu x}} = \\ &= \frac{2\eta\mu x \sigma\upsilon\nu x}{\sigma\upsilon\nu^2 x + \eta\mu^2 x} = \frac{\eta\mu 2x}{1} = \eta\mu 2x. \end{aligned}$$

$$\mathbf{B2.} \quad B(x) = \frac{(\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x)^2 - \eta\mu 2x}{2} = \frac{\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x + \cancel{2\eta\mu x \sigma\upsilon\nu x} - \cancel{2\eta\mu x \sigma\upsilon\nu x}}{2} = \frac{1}{2}.$$

$$\mathbf{B3.} \quad A(x) = B(x) \Leftrightarrow \eta\mu 2x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \eta\mu 2x = \eta\mu \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2x = \frac{\pi}{6} + 2\kappa\pi \\ \text{ή} \\ 2x = \pi - \frac{\pi}{6} + 2\kappa\pi \end{array} \right\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{\pi}{12} + \kappa\pi \\ \text{ή} \\ x = \frac{5\pi}{12} + \kappa\pi \end{array} \right\} \kappa \in \mathbb{Z}$$

**ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2016**  
**Β' ΦΑΣΗ**

**E\_3.Μλ2ΓΑ(α)**

**Β4.** Η συνάρτηση  $f(x)$  έχει τύπο:  $f(x) = A(x) - B(x) = \eta\mu 2x - \frac{1}{2}$ .

$$\text{Ισχύει } -1 \leq \eta\mu 2x \leq 1 \Leftrightarrow -1 - \frac{1}{2} \leq \eta\mu 2x - \frac{1}{2} \leq 1 - \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\frac{3}{2} \leq f(x) \leq \frac{1}{2}.$$

Άρα η ελάχιστη τιμή της είναι  $-\frac{3}{2}$  και η μέγιστη τιμή της είναι  $\frac{1}{2}$ .

Η περίοδος είναι  $T = \frac{2\pi}{2} = \pi$ .

**ΘΕΜΑ Γ**

**Γ1.** Αν  $x$  παράγοντας του  $P(x)$  τότε  $P(0) = 0$  οπότε  $\mu = 0$ .

Αν το υπόλοιπο της διαίρεσης του  $P(x)$  με  $(x+1)$  είναι το 3 τότε:

$$P(-1) = 3 \Leftrightarrow -2 - 3 + 7 + \lambda + 6 - 7 + 0 = 3 \Leftrightarrow \lambda = 2.$$

**Γ2.** Για  $\lambda = 2$  και  $\mu = 0$  έχουμε:

$$P(x) = 2x^5 - 3x^4 - 7x^3 + 8x^2 + 7x.$$

Η διαίρεση γίνεται ως εξής:

$2x^5 - 3x^4 - 7x^3 + 8x^2 + 7x$	$\frac{x^2 - 2}{\phantom{2x^5 - 3x^4 - 7x^3 + 8x^2 + 7x}}$
$\underline{-2x^5 \quad + 4x^3}$	$\frac{2x^3 - 3x^2 - 3x + 2}{\phantom{2x^5 - 3x^4 - 7x^3 + 8x^2 + 7x}}$
$\quad -3x^4 - 3x^3 + 8x^2 + 7x$	
$\quad \underline{+ 3x^4 \quad - 6x^2}$	
$\quad \quad -3x^3 + 2x^2 + 7x$	
$\quad \quad \underline{+ 3x^3 \quad - 6x}$	
$\quad \quad \quad 2x^2 + x$	
$\quad \quad \quad \underline{2x^2 + 4}$	
$\quad \quad \quad \quad x + 4$	

Η ταυτότητα της διαίρεσης είναι:

$$P(x) = (x^2 - 2)(2x^3 - 3x^2 - 3x + 2) + x + 4.$$

**ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2016**  
Β' ΦΑΣΗ

**E\_3.Μλ2ΓΑ(α)**

**Γ3.** Πρέπει  $P(x) > x+4 \Leftrightarrow (x^2-2)(2x^3-3x^2-3x+2)+x+4 > x+4 \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow (x^2-2)(2x^3-3x^2-3x+2) > 0$  (I)

Πιθανές ακέραιες ρίζες του  $Q(x) = 2x^3 - 3x^2 - 3x + 2$  είναι  $\pm 1, \pm 2$ .

Με σχήμα Horner έχω:

	2	-3	-3	2	-1
	↓	-2	5	-2	
	2	-5	2	0	

Άρα  $Q(x) = (x+1)(2x^2 - 5x + 2)$ .

Οπότε (I)  $\Leftrightarrow (x^2-2)(2x^2-5x+2)(x+1) > 0$

Άρα  $\Delta = 25 - 16 = 9$ ,  $x = \frac{5 \pm 3}{4}$ ,  $x^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2}$ .

Το πρόσημο των παραγόντων του γινομένου αλλά και του γινομένου τους φαίνεται στον παρακάτω πίνακα:

	x	$-\sqrt{2}$	-1	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{2}$	2				
$x^2-2$	+	0	-	-	0	+	+			
$2x^2-5x+$	+	+	+	0	-	-	0	+		
$x+1$	-	-	0	+	+	+	+			
<b>Γινόμενο</b>	-	0	+	0	-	0	+	-	0	+

Άρα  $x \in (-\sqrt{2}, -1) \cup \left(\frac{1}{2}, \sqrt{2}\right) \cup (2, +\infty)$ .

**Γ4. Πρέπει  $P(x)=Q(x)$**

$$\Leftrightarrow 2x^5 - 3x^4 - 7x^3 + 8x^2 + 7x = 2x^5 + (2\alpha + \beta)x^4 - 7x^3 + (-3\alpha + 2\beta)x^2 + (\kappa + 6)x + \kappa - 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha + \beta = -3 \\ -3\alpha + 2\beta = 8 \\ \kappa + 6 = 7 \\ \kappa - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -2 \\ \beta = 1 \\ \kappa = 1 \end{cases}$$

**ΘΕΜΑ Δ**

**Δ1.** Ορίζεται αν  $e^{x+1} - e \neq 0 \Leftrightarrow e^{x+1} \neq e \Leftrightarrow x+1 \neq 1 \Leftrightarrow x \neq 0$

και

$$\frac{e^{2x} - (e+1)e^x + e}{e^{x+1} - e} > 0 \Leftrightarrow \frac{(e^x - 1)(e^x - e)}{(e^x - 1)e} > 0 \Leftrightarrow \frac{e^x - e}{e} > 0 \Leftrightarrow e^x - e > 0 \Leftrightarrow e^x > e \Leftrightarrow x > 1$$

αφού για τον αριθμητή έχουμε:

$$\Delta = (e+1)^2 - 4 \cdot e = e^2 + 2e + 1 - 4e = e^2 - 2e + 1 = (e-1)^2 > 0.$$

και  $e^x = \frac{(e+1) \pm (e-1)^{\sqrt{\Delta}}}{2}$  οπότε γράφεται  $(e^x - e)(e^x - 1)$ .

Άρα πρέπει  $x \neq 0$  και  $x > 1$  δηλαδή  $A_f = (1, +\infty)$ . Τότε απλοποιείται ως εξής:

$$f(x) = \ln \frac{(e^x - 1)(e^x - e)}{(e^x - 1)e} = \ln \frac{e^x - e}{e}.$$

**Δ2.** Η  $g(x)$  γράφεται:  $g(x) = e^{2x-1} - 4e^{x-1} + 3 = \frac{e^{2x}}{e} - \frac{4e^x}{e} + 3 = \frac{e^{2x} - 4e^x + 3e}{e}$ .

Άρα  $g(x) = e^{\ln \frac{5+3e}{e}} \Leftrightarrow \frac{e^{2x} - 4e^x + 3e}{e} = \frac{5+3e}{e} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow e^{2x} - 4e^x + 3e = 5 + 3e \Leftrightarrow e^{2x} - 4e^x - 5 = 0.$$

Είναι  $\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot (-5) \cdot 1 = 36$  και  $e^x = \frac{4 \pm 6^{\sqrt{5} \text{ δεκτή}}}{2} \underset{-1 \text{ απορ.}}{\quad}$ .

Άρα  $e^x = 5 \Leftrightarrow x = \ln 5$  δεκτή.

**Δ3.** Αρκεί  $f(x) \leq 0 \Leftrightarrow \ln \frac{e^{2x} - (e+1)e^x + e}{e^{x+1} - e} \leq \ln 1 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{e^{2x} - (e+1)e^x + e}{e^{x+1} - e} \leq 1 \Leftrightarrow \frac{(e^x - 1)(e^x - e)}{(e^x - 1)e} \leq 1 \Leftrightarrow \frac{e^x - e}{e} \leq 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^x - e \leq e \Leftrightarrow e^x \leq 2e \Leftrightarrow e^x \leq e^{\ln 2e} \Leftrightarrow x \leq \ln 2e$$

**ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2016**  
**Β' ΦΑΣΗ**

**E\_3.Μλ2ΓΑ(α)**

Όμως  $x > 1$  δηλαδή  $1 < x \leq \ln 2e$ .

$$\Delta 4. \quad e^{f(x)} \geq g(x) + \frac{6-4e}{e} \Leftrightarrow \frac{e^{2x} - (e+1)e^x + e}{e^{x+1} - e} \geq \frac{e^{2x} - 4e^x + 3e}{e} + \frac{6-4e}{e} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{e^x - e}{e} \geq \frac{e^{2x} - 4e^x + 3e}{e} + \frac{6-4e}{e} \Leftrightarrow e^x - e \geq e^{2x} - 4e^x + 3e + 6 - 4e \Leftrightarrow e^{2x} - 5e^x + 6 \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\omega^2 - 5\omega + 6 \leq 0 \quad \text{όπου} \quad \omega = e^x > 0$$

$$\text{Είναι} \quad \Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 25 - 24 = 1.$$

$$\text{Οπότε} \quad \omega = \frac{5 \pm 1}{2} \begin{matrix} \nearrow 3 \\ \searrow 2 \end{matrix}$$

Το πρόσημο φαίνεται στο παρακάτω πίνακα:

$\omega$	<b>2</b>	<b>3</b>
$\omega^2 - 5\omega + 6$	+         ●	-         ●    +

$$\text{Άρα} \quad 2 \leq \omega \leq 3 \Leftrightarrow 2 \leq e^x \leq 3 \Leftrightarrow \ln 2 \leq x \leq \ln 3.$$

Όμως  $x > 1$  και  $\ln 2 < \ln e = 1$  οπότε επαληθεύεται μόνο για  $1 < x \leq \ln 3$ .