ΤΑΞΗ: **Β΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ**
ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΣ: **ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ**
ΜΑΘΗΜΑ: **ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ**

Ημερομηνία: Πέμπτη 7 Ιανουαρίου 2016
Διάρκεια Εξέτασης: 2 ώρες

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό βιβλίο σελ. 38.

Α2. **α)** Λάθος (γιατί $\lambda = -\frac{A}{B}$)

β) Σωστό

γ) Λάθος ($\vec{a}\cdot\vec{\beta} = \vec{\beta}\cdot \text{προβ.}_{\vec{\beta}}\vec{a}$)

δ) Λάθος (γιατί δεν ορίζεται ο λ)

ε) Σωστό

ΘΕΜΑ Β

Β1. **α΄ τρόπος**

Έστω Β(x,y) τότε θα είναι:

$$\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{KB} \Leftrightarrow (-1-1, 4-2) = (x+1, y-4) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 = x+1 \\ 2 = y-4 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x = -3 \\ y = 6 \end{pmatrix}$$ δηλαδή

Β(-3,6).

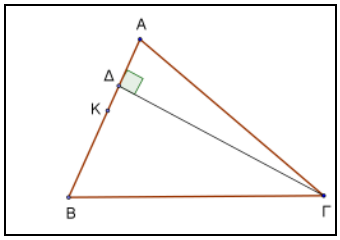
β΄ τρόπος

$$x_{\kappa} = \frac{x_A + x_B}{2} \Leftrightarrow -1 = \frac{1 + x_B}{2} \Leftrightarrow x_B = -2 - 1 = -3$$

και $y_{\kappa} = \frac{y_A + y_B}{2} \Leftrightarrow 4 = \frac{2 + y_B}{2} \Leftrightarrow y_B = 8 - 2 = 6$ δηλαδή Β(-3,6).

Β2. $\overrightarrow{\text{ΑΓ}} = (4,3) \Leftrightarrow (x_\Gamma - 1,\ y_\Gamma - 2) = (4,3) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_\Gamma - 1 = 4 \\ y_\Gamma - 2 = 3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_\Gamma = 5 \\ y_\Gamma = 5 \end{pmatrix}$

Δηλαδή $\Gamma(5,5)$ οπότε $\overrightarrow{\text{ΒΓ}} = (5+3,\ 5-6) = (8,-1)$.



Η προβολή του $\overrightarrow{\text{ΒΓ}}$ πάνω στο $\overrightarrow{\text{ΒΑ}}$ είναι το $\overrightarrow{\text{ΒΔ}}$ και αφού

$\overrightarrow{\text{ΒΔ}} // \overrightarrow{\text{ΒΑ}} \Leftrightarrow \overrightarrow{\text{ΒΔ}} = \lambda \cdot \overrightarrow{\text{ΒΑ}} = \lambda(1+3, 2-6) = \lambda(4,-4) = (4\lambda, -4\lambda)$

Θα είναι

$\overrightarrow{\text{ΒΓ}} \cdot \overrightarrow{\text{ΒΑ}} = \overrightarrow{\text{ΒΑ}} \cdot \overrightarrow{\text{ΒΔ}} \Leftrightarrow (8,-1)(4,-4) = (4,-4)(4\lambda, -4\lambda) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 32 + 4 = 16\lambda + 16\lambda \Leftrightarrow 36 = 32\lambda \Leftrightarrow \lambda = \frac{36}{32} = \frac{9}{8}$$

οπότε $\overrightarrow{\text{ΒΔ}} = \left(\frac{9}{2}, -\frac{9}{2}\right)$.

Β3. $\overrightarrow{\text{ΑΚ}} - 2\overrightarrow{\text{ΚΓ}} = (-1-1, 4-2) - 2(5+1, 5-4) = (-2,2) + (-12,-2) = (-14,0)$

Οπότε $\left|\overrightarrow{\text{ΑΚ}} - 2\overrightarrow{\text{ΚΓ}}\right| = \sqrt{(-14)^2 + 0^2} = \sqrt{196} = 14$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Το Β είναι το σημείο τομής των ΑΒ και ΒΔ.
Λύνω το (Σ) των εξισώσεων τους.

$$\begin{pmatrix} 2x - y + 4 = 0 \\ y = 11 - 5x \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2x - 11 + 5x + 4 = 0 \\ y = 11 - 5x \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 7x = 7 \\ y = 11 - 5x \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x = 1 \\ y = 6 \end{pmatrix}$$

δηλαδή $B(1,6)$.

Γ2. Η πλευρά ΑΓ είναι κάθετη στο ύψος ΒΔ, οπότε

$$\lambda_{\text{ΑΓ}} \cdot \lambda_{\text{ΒΔ}} = -1 \Leftrightarrow \lambda_{\text{ΑΓ}} \cdot (-5) = -1 \Leftrightarrow \lambda_{\text{ΑΓ}} = \frac{1}{5}.$$

Άρα $\text{ΑΓ}: y - 4 = \frac{1}{5}(x-5) \Leftrightarrow 5y - 20 = x - 5 \Leftrightarrow x - 5y + 15 = 0$.

Γ3. Το μέσο Μ της ΒΓ είναι $M\left(\frac{1+5}{2}, \frac{4+6}{2}\right) = (3,5)$.

Ο συντελεστής της ΒΓ είναι $\lambda_{\text{ΒΓ}} = \frac{4-6}{5-1} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$.

Αφού η μεσοκάθετη $\varepsilon \perp B\Gamma$ θα έχει $\lambda_\varepsilon=2$ και η εξίσωσή της θα είναι:

$$y-5=2(x-3) \Leftrightarrow y-5=2x-6 \Leftrightarrow 2x-y-1=0 .$$

Λύνουμε το σύστημα των εξισώσεων των ΒΔ και (ε):

$$\left.\begin{array}{l} B\Delta: y=11-5x \\ \varepsilon:\ 2x-y-1=0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{l} y=11-5x \\ 2x-11+5x-1=0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{l} y=11-5x \\ 7x=12 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{l} y=11-\dfrac{60}{7}=\dfrac{17}{7} \\ x=\dfrac{12}{7} \end{array}\right)$$

δηλαδή τέμνονται στο $Z\left(\dfrac{12}{7},\dfrac{17}{7}\right)$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Είναι $x_M=\dfrac{x_A+x_B}{2}=\dfrac{\kappa+4}{2}$

και $y_M=\dfrac{y_A+y_B}{2}=\dfrac{5+\kappa+4}{2}=\dfrac{\kappa+9}{2}$.

Άρα $\kappa=2x_M-4$ και $\kappa=2y_M-9$ οπότε $2x_M-4=2y_M-9 \Leftrightarrow 2x_M-2y_M+5=0$

δηλαδή το Μ κινείται στην ευθεία $2x-2y+5=0$.

Δ2. Είναι $\overrightarrow{AB}=(4-\kappa,\kappa+4-5)=(4-\kappa,\kappa-1)$ και $\varepsilon_1 // \vec{\delta_1}=(1,2)$.

Αν $\overrightarrow{AB} // \varepsilon_1 \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} // \vec{\delta_1} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 4-\kappa & \kappa-1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow 8-2\kappa-\kappa+1=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 9=3\kappa \Leftrightarrow \kappa=3$ οπότε Α(3, 5) και Β(4, 7).

Άρα $\varepsilon: y-5=2(x-3) \Leftrightarrow y-5=2x-6 \Leftrightarrow 2x-y-1=0$.

Δ3. **α)** $\vec{u}\cdot\vec{v}=\left(2\vec{a}+3\vec{\beta}\right)\left(\vec{a}-2\vec{\beta}\right)=2\vec{a}^2-4\vec{a}\vec{\beta}+3\vec{a}\vec{\beta}-6\vec{\beta}^2=$

$=2|\vec{a}|^2-\vec{a}\vec{\beta}-6|\vec{\beta}|^2=2\cdot 2^2-|\vec{a}|\cdot|\vec{\beta}|\sigma\upsilon\nu\dfrac{2\pi}{3}-6.1^2=$

$=2\cdot 4-2\cdot 1\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)-6=8+1-6=3$

και $|\vec{v}|^2=\vec{v}^2=\left(\vec{a}-2\vec{\beta}\right)^2=\vec{a}^2-4\vec{a}\vec{\beta}+4\vec{\beta}^2=$

$|\vec{a}|^2-4\cdot|\vec{a}|\cdot|\vec{\beta}|\sigma\upsilon\nu\dfrac{2\pi}{3}+4|\vec{\beta}|^2=4-4\cdot 2\cdot 1\left(-\dfrac{1}{2}\right)+4\cdot 1=12 \Rightarrow |\vec{v}|=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$

β) Αφού $\Gamma \in (\varepsilon): y = 2x - 1$ θα είναι $\Gamma(x_\Gamma, 2x_\Gamma - 1)$

Έχουμε:

$$(\vec{u}\cdot\vec{v})\ \overrightarrow{B\Gamma} + \left(\left|\vec{v}\right|^2 - 2\right)\overrightarrow{AB} = (4, \mu+1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{B\Gamma} + (12-2)\overrightarrow{AB} = (4, \mu+1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3\left(x_\Gamma - 4,\ \ 2x_\Gamma - 1 - 7\right) + 10(4-3, 7-5) = (4, \mu+1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(3x_\Gamma - 12,\ 6x_\Gamma - 24\right) + (10, 20) = (4, \mu+1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(3x_\Gamma - 12,\ 6x_\Gamma - 24\right) = (4, \mu+1) - (10, 20) = (-6, \mu-19)$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3x_\Gamma - 12 = -6 \\ 6x_\Gamma - 24 = \mu - 19 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \chi_\Gamma = \dfrac{12-6}{3} \\ \mu = 6x_\Gamma - 24 + 19 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \chi_\Gamma = 2 \\ \mu = 7 \end{pmatrix}.$$ Άρα $\Gamma(2,3)$