ΣΥΝΟΛΑ ΑΡΙΘΜΩΝ

Φυσικοί: $\mathrm{IN}=\{0,1,2,3\ldots\}$, Ακέραιοι: $Z=\{\ldots-3,-2,-1,0,1,2,3\ldots\}$, Ρητοί: $Q=\left\{\frac{\alpha}{\beta}/\ \alpha\in Z,\ \beta\in Z^*\right\}$, Άρρητοι Q'

Πραγματικοί $\quad R=Q\cup Q'=(-\infty,+\infty)$ ενώ $\overline{R}=R\bigcup\{-\infty,+\infty\}$

Ισχύει: $\quad N\subseteq Z\subseteq Q\subseteq R$, Ενώ με $N^*,\ Z^*,\ Q^*,\ R^*$ συμβολίζουμε τα αντίστοιχα σύνολα χωρίς το μηδέν.

ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ

- $(\alpha\pm\beta)^2=\alpha^2\pm2\alpha\beta+\beta^2$
- $(\alpha\pm\beta)^3=\alpha^3\pm3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2\pm\beta^3$
- $(\alpha+\beta+\gamma)^2=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2\alpha\beta+2\beta\gamma+2\alpha\gamma$
- $\alpha^2-\beta^2=(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)$
- $\alpha^3\mp\beta^3=(\alpha\mp\beta)\left(\alpha^2\pm\alpha\beta+\beta^2\right)$
- $\alpha^2+\beta^2=(\alpha\pm\beta)^2\mp2\alpha\beta$
- $\alpha^\nu-\beta^\nu=(\alpha-\beta)\left(\alpha^{\nu-1}+\alpha^{\nu-2}\beta+\alpha^{\nu-3}\beta^2+\ldots+\beta^{\nu-1}\right)$
- $\alpha^\nu+\beta^\nu=(\alpha+\beta)\left(\alpha^{\nu-1}-\alpha^{\nu-2}\beta+\alpha^{\nu-3}\beta^2-\ldots-\alpha\beta^{\nu-2}+\beta^{\nu-1}\right)$ με **ν περιττο**.
- $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\alpha\gamma=\frac{1}{2}\left[(\alpha-\beta)^2+(\beta-\gamma)^2+(\gamma-\alpha)^2\right]$
- $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3=3\alpha\beta\gamma\Leftrightarrow(\alpha+\beta+\gamma=0$ ή $\alpha=\beta=\gamma)$ Euler
- $\left(\alpha^2+\beta^2\right)\left(\gamma^2+\delta^2\right)=(\alpha\gamma+\beta\delta)^2+(\alpha\delta-\beta\gamma)^2$ Lagrange

ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ

1. Επιτρέπεται να προσθέσω ή να αφαιρέσω από τα δύο μέλη μιας ανισότητας τον ίδιο αριθμό
2. Επιτρέπεται να πολλαπλασιάσω, να διαιρέσω και τα δύο μέλη μιας ανισότητας με τον ίδιο **θετικό** αριθμό, ενώ πρέπει να **αλλάξω** την φορά της ανισότητας αν αυτός είναι **αρνητικός**.
3. Επιτρέπεται να υψώσω μια ανισότητα σε δύναμη με περιττό εκθέτη, ενώ πρέπει να έχει θετικούς όρους αν την υψώσω σε δύναμη με άρτιο εκθέτη (αν έχει αρνητικούς όρους και την υψώνω σε άρτιο εκθέτη πρέπει να της αλλάξω τη φορά)
4. Επιτρέπεται να προσθέσω δύο ανισότητες της ίδιας φοράς κατά μέλη
5. Επιτρέπεται να πολλαπλασιάσω δύο ανισότητες της ίδιας φοράς κατά μέλη εφ' όσον όλοι οι όροι είναι θετικοί.
6. Αν α,β θετικοί και οι δύο ή αρνητικοί αριθμοί και οι δύο τότε ισχύει η ισοδυναμία $\alpha<\beta\Leftrightarrow\frac{1}{\alpha}>\frac{1}{\beta}$
7. Ισχύει η μεταβατική ιδιότητα: Αν $\alpha<\beta$ και $\beta<\gamma$ τότε $\alpha<\gamma$. Η ιδιότητα αυτή μου επιτρέπει να «ενισχύω» μια ανισότητα με κάτι μεγαλύτερο από το μεγάλο ή κάτι μικρότερο από το μικρό μέλος της.
8. ΙΣΧΥΟΥΝ: $(\alpha-\beta)^2\geq0$, $\alpha^2+\beta^2\geq2\alpha\beta$, $x+\frac{1}{x}\geq2$ αν $x>0$, $x+\frac{1}{x}\leq-2$ αν $x<0$, $2\left(\alpha^2+\beta^2\right)\geq(\alpha+\beta)^2$
9. ***<u>ΠΡΟΣΟΧΗ! ΔΕΝ ΑΦΑΙΡΟΥΜΕ, ΔΕΝ ΔΙΑΙΡΟΥΜΕ ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ ΚΑΤΑ ΜΕΛΗ</u>***

ΑΠΟΛΥΤΑ

1. Απόλυτη τιμή ενός αριθμού είναι η απόσταση της εικόνας του αριθμού από την αρχή O του άξονα.
2. Η **απόλυτη** τιμή ενός **θετικού** αριθμού x είναι **ο ίδιος** ο αριθμός.

   Η **απόλυτη** τιμή ενός **αρνητικού** αριθμού x είναι **ο αντίθετος** αριθμός. $\quad |x|=\begin{cases}x & \text{αν } x>0\\ 0 & \text{αν } x=0\\ -x & \text{αν } x\prec0\end{cases}$
3. $|x|\geq0$ για κάθε $x\in R$, $\quad |0|=0$, $\quad |x|=|-x|$ $\quad \left|x^2\right|=|x|^2=x^2$
4. $|x|\geq x$ και $|x|\geq-x$ για κάθε $x\in R$ ή $-|x|\leq x\leq|x|$ για κάθε $x\in R$ και γενικότερα: $-|f(x)|\leq f(x)\leq|f(x)|$
5. $|x|=\theta\Leftrightarrow x=-\theta$ ή $x=\theta$, αν $\theta\geq0$ $\quad |x|=|\alpha|\Leftrightarrow x=-\alpha$ ή $x=\alpha$
6. $|x|\leq\theta\Leftrightarrow-\theta\leq x\leq\theta$, αν $\theta\geq0$ $\quad |x|\geq\theta\Leftrightarrow x\geq\theta$ ή $x\leq-\theta$, αν $\theta\geq0$
7. $|\alpha\cdot\beta|=|\alpha|\cdot|\beta|$, $\quad \left|\frac{\alpha}{\beta}\right|=\frac{|\alpha|}{|\beta|}$ με $\beta\neq0$ $\quad ||\alpha|-|\beta||\leq|\alpha\pm\beta|\leq|\alpha|+|\beta|$ για κάθε $\alpha,\beta\in R$.
8. Η **απόσταση δύο αριθμών** στον άξονα ισούται με την **απόλυτη τιμή της διαφοράς** τους: $d(\alpha,\beta)=|\alpha-\beta|$

ΠΡΟΣΟΧΗ! Αν $|x|+|y|=0$ τότε $x=0$ και $y=0$. Αν $\alpha^2+\beta^2=0$ τότε $\alpha=0$ και $\beta=0$. Αν $|x|+|y|\neq0$ τότε $x\neq0$ ή $y\neq0$

ΡΙΖΕΣ

Ορισμός: $\sqrt[\nu]{\alpha}=x\Leftrightarrow x^\nu=\alpha$ με ν θετικός ακέραιος, $\alpha\geq0$, $x\geq0$

<u>Ιδιότητες:</u> $\sqrt[2\nu]{x^{2\nu}}=|x|$ για κάθε $x\in R$, $\sqrt[\nu]{x^\nu}=\left(\sqrt[\nu]{x}\right)^\nu=x$ αν $x\geq0$,. $x^{\frac{\mu}{\nu}}=\sqrt[\nu]{x^\mu}$, x θετικός, μ ακέραιος, ν θετικός ακέραιος και $0^{\frac{\mu}{\nu}}=0$ αν ν,μ θετικοί ακέραιοι ενώ είναι $\sqrt[\nu]{x^{2\mu}}=|x|^{\frac{2\mu}{\nu}}=\left(x^2\right)^{\frac{\mu}{\nu}}$, $x\in R$ και ν,μ θετικοί ακέραιοι

Με $\alpha,\beta\geq0$ και $\nu,\mu,\rho\in Z_+$ ισχύουν $\sqrt[\nu]{\alpha^\nu}=\alpha$, $\sqrt[\nu]{\alpha}\cdot\sqrt[\nu]{\beta}=\sqrt[\nu]{\alpha\cdot\beta}$, $\frac{\sqrt[\nu]{\alpha}}{\sqrt[\nu]{\beta}}=\sqrt[\nu]{\frac{\alpha}{\beta}}$, $\beta\neq0$, $\alpha\cdot\sqrt[\nu]{\beta}=\sqrt[\nu]{\alpha^\nu\cdot\beta}$, $\sqrt[\nu\cdot\rho]{\alpha^{\mu\cdot\rho}}=\sqrt[\nu]{\alpha^\mu}$, $\sqrt[\nu]{\sqrt[\mu]{\alpha^\mu}}=\sqrt[\nu\mu]{\alpha}$

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

Για τη λύση του γραμμικού 2x2 συστήματος $\begin{cases}\alpha_1x+\beta_1y=\gamma_1\\ \alpha_2x+\beta_2y=\gamma_2\end{cases}$ (Σ) με τη μέθοδο των οριζουσών βρίσκουμε τις ορίζουσες

$D=\begin{vmatrix}\alpha_1 & \beta_1\\ \alpha_2 & \beta_2\end{vmatrix}=\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1$, $\quad D_x=\begin{vmatrix}\gamma_1 & \beta_1\\ \gamma_2 & \beta_2\end{vmatrix}=\gamma_1\beta_2-\gamma_2\beta_1$, $\quad D_y=\begin{vmatrix}\alpha_1 & \gamma_1\\ \alpha_2 & \gamma_2\end{vmatrix}=\alpha_1\gamma_2-\alpha_2\gamma_1$ και ισχύει ότι

Αν $D\neq0$ έχει μοναδική λύση την $x=D_x/D$ και $y=D_y/D$, $\quad$ Αν $D=0$ και $D_x\neq0$ ή $D_y\neq0$ είναι αδύνατο, ενώ αν $D=D_x=D_y=0$ τότε είναι αδύνατο ή αόριστο ή έχει άπειρες λύσεις.

ΔΙΑΣΤΗΜΑΤΑ:

Ανοικτό: $(\alpha,\beta)=\{x\in R/\alpha<x<\beta\}$, Κλειστό $[\alpha,\beta]=\{x\in R/\alpha\le x\le\beta\}$,

$[\alpha,\beta)=\{x\in R/\alpha\le x<\beta\}$, $(\alpha,\beta]=\{x\in R/\alpha<x\le\beta\}$, $[\alpha,+\infty)=\{x\in R/x\ge\alpha\}$, $(-\infty,\alpha]=\{x\in R/x\le\alpha\}$, κ.λ.π

ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Η απόσταση των σημείων $A(x_1,y_1)$ και $B(x_2,y_2)$ είναι ίση με $(AB)=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$.

Το σημείο (α,β) είναι συμμετρικό ως προς:

τον $x'x$ με το $(\alpha,-\beta)$, τον $y'y$ με το $(-\alpha,\beta)$ το $O(0,0)$ με το $(-\alpha,-\beta)$, την ευθεία $y=x$ με το (β,α)

Οι ευθείες $y=\alpha_1x+\beta_1$ και $y=\alpha_2x+\beta_2$ είναι παράλληλες αν και μόνο αν $\alpha_1=\alpha_2$

Οι ευθείες $y=\alpha_1x+\beta_1$ και $y=\alpha_2x+\beta_2$ με $|\alpha_1|+|\alpha_2|\ne0$ είναι κάθετες αν και μόνο αν $\alpha_1\cdot\alpha_2=-1$

Μια συνάρτηση f λέγεται ***άρτια*** αν και μόνο αν για κάθε $x\in A_f$ ισχύει ότι: $-x\in A_f$ και $f(-x)=f(x)$

Η γραφική παράσταση μιας άρτιας συνάρτησης έχει άξονα συμμετρίας τον $y'y$

Μια συνάρτηση f λέγεται ***περιττή*** αν και μόνο αν για κάθε $x\in A_f$ ισχύει ότι: $-x\in A_f$ και $f(-x)=-f(x)$.

Η γραφική παράσταση μιας περιττής συνάρτησης έχει κέντρο συμμετρίας το $O(0,0)$

Μια συνάρτηση f σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της:

Είναι γνήσια αύξουσα αν και μόνο αν για κάθε $x_1,x_2\in\Delta$ ισχύει ότι: Αν $x_1<x_2$ τότε $f(x_1)<f(x_2)$

Είναι γνήσια φθίνουσα αν και μόνο αν για κάθε $x_1,x_2\in\Delta$ ισχύει ότι: Αν $x_1<x_2$ τότε $f(x_1)>f(x_2)$.

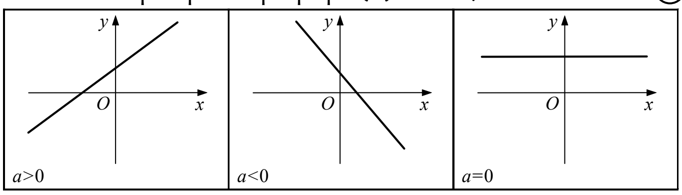
Η μονοτονία μιας συνάρτησης καθορίζεται από το πρόσημο του λόγου μεταβολής: $\lambda=\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}$

Αν C_f είναι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f τότε η γραφική παράσταση της g με:

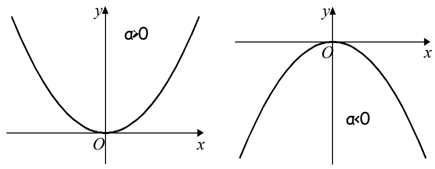
- $g(x)=f(x)+c$, $c>0$ προκύπτει από την παράλληλη μετατόπιση της C_f κατά c μονάδες πάνω
- $g(x)=f(x+c)$, $c>0$ προκύπτει από την παράλληλη μετατόπιση της C_f κατά c μονάδες αριστερά
- $g(x)=-f(x)$ είναι η συμμετρική της C_f ως προς άξονα συμμετρίας τον $x'x$.
- $g(x)=f(-x)$ είναι η συμμετρική της C_f ως προς άξονα συμμετρίας τον $y'y$.
- $g(x)=|f(x)|=\begin{cases}f(x) & \alpha\nu\ \ f(x)\ge0\\ -f(x) & \alpha\nu\ \ f(x)<0\end{cases}$

ΓΡΑΦΙΚΕΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ ΒΑΣΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

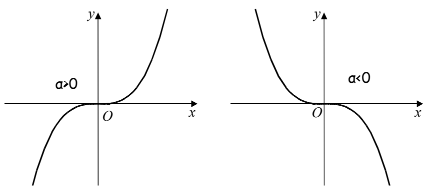
Η πολυωνυμική συνάρτηση $f(x)=\alpha x+\beta$

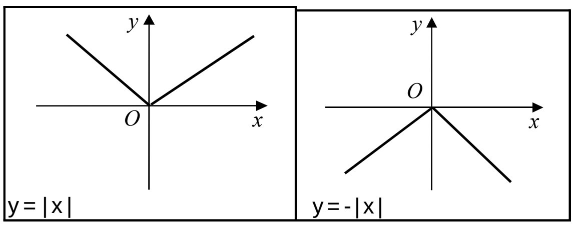


Η πολυωνυμική συνάρτηση $f(x)=\alpha x^2$, $\alpha\neq0$.

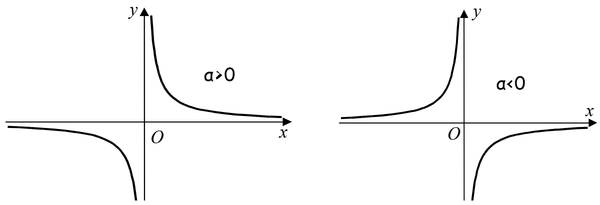


Η πολυωνυμική συνάρτηση $f(x)=\alpha x^3$, $\alpha\neq0$.

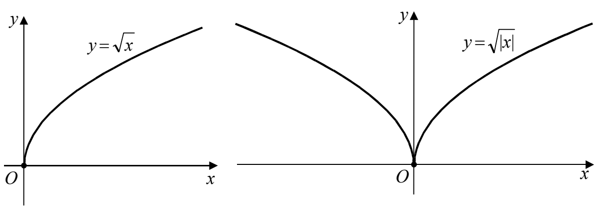


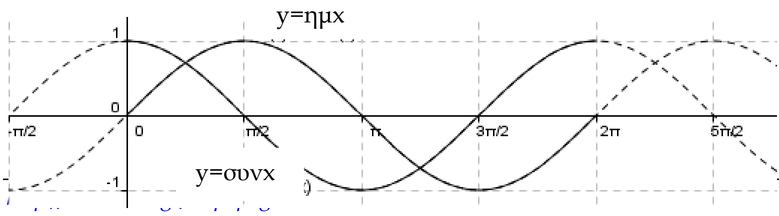


Η ρητή συνάρτηση $f(x)=\dfrac{\alpha}{x}$, $\alpha\neq0$.



Οι συναρτήσεις $f(x)=\sqrt{x}$, $g(x)=\sqrt{|x|}$.





ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ

- Πολυώνυμο είναι κάθε παράσταση που μπορεί να πάρει τη μορφή: $P(x)=\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\ldots+\alpha_1 x+\alpha_0$. με $\alpha_\nu,\ \alpha_{\nu-1},\ \ldots\alpha_1,\ \alpha_0$ σταθεροί πραγματικοί αριθμοί και $x\in R$
- Το πολυώνυμο $P(x)=0$ έχει ρίζα το ρ αν και μόνο αν $P(\rho)=0$ δηλ αν και μόνο αν $P(x)=(x-\rho)\pi(x)$.

Αν $P(x)$, $Q(x)$ δύο πολυώνυμα με $Q(x)\neq 0$ τότε υπάρχουν δύο πολυώνυμα $\pi(x)$ και $\upsilon(x)$ ώστε : $P(x)=Q(x)\pi(x)+\upsilon(x)$. Τα πολυώνυμα $\pi(x)$ και $\upsilon(x)$ βρίσκονται κάνοντας τη διαίρεση $P(x):Q(x)$

- Το πολυώνυμο $P(x)=\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\ldots+\alpha_1 x+\alpha_0$ είναι το μηδενικό αν και μόνο αν $\alpha_\nu=\alpha_{\nu-1}=\ldots=\alpha_1=\alpha_0=0$ ενώ δύο πολυώνυμα είναι ίσα αν και μόνο αν οι συντελεστές των ομοβάθμιων όρων τους είναι ίσοι.

ΤΡΙΩΝΥΜΟ

- Τριώνυμο είναι **κάθε παράσταση** που μπορεί να πάρει τη μορφή $\alpha x^2+\beta x+\gamma$ με $\alpha\neq 0$.

	ΡΙΖΕΣ	ΜΟΡΦΗ
$\Delta>0$	Έχει δύο ρίζες άνισες τις: $x_1=\frac{-\beta+\sqrt{\Delta}}{2\alpha}$, $x_2=\frac{-\beta-\sqrt{\Delta}}{2\alpha}$	$f(x)=\alpha(x-x_1)(x-x_2)$
$\Delta=0$	Έχει μια διπλή ρίζα την $x_{1,2}=-\frac{\beta}{2\alpha}$	$f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma=\alpha\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2$
$\Delta<0$	Έχει δύο μιγαδικές ρίζες τις $x_1=\frac{-\beta+i\sqrt{-\Delta}}{2\alpha}$, $x_2=\frac{-\beta-i\sqrt{-\Delta}}{2\alpha}$	$f(x)=\alpha\left[\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2+\frac{\lvert\Delta\rvert}{4\alpha^2}\right]$

ΤΟ ΠΡΟΣΗΜΟ ΤΟΥ $\alpha x+\beta$, $\alpha\neq 0$

Τιμές του x	$-\infty$		x_1		$+\infty$
Πρόσημο του $\alpha x+\beta$, $\alpha\neq 0$		ετερόσημο του α	0	ομόσημο του α	

Πρόσημο του τριωνύμου $\alpha x^2+\beta x+\gamma$, $\alpha\neq 0$

	Τιμές του x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$\Delta>0$	Πρόσημο του $\alpha x^2+\beta x+\gamma$		ομόσημο του α	0	ετερόσημο του α	0	ομόσημο του α	

	Τιμές του x	$-\infty$		$x_o=-\frac{\beta}{2\alpha}$		$+\infty$
$\Delta=0$	Πρόσημο του $\alpha x^2+\beta x+\gamma$		ομόσημο του α	0	ομόσημο του α	

	Τιμές του x	$-\infty$		$+\infty$
$\Delta<0$	Πρόσημο του $\alpha x^2+\beta x+\gamma$		ομόσημο του α	

Προσοχή!!

1. Αν για κάθε $x\in R$ είναι $\alpha x^2+\beta x+\gamma\neq 0$ τότε είναι $\Delta<0$. Στην περίπτωση αυτή το τριώνυμο $\alpha x^2+\beta x+\gamma$ είναι ομόσημο του α δηλαδή: $\alpha(\alpha x^2+\beta x+\gamma)>0$ για κάθε $x\in R$
2. Ισχύει $\alpha x^2+\beta x+\gamma\leq 0$ **για κάθε** πραγματικό αριθμό x αν και μόνο αν ισχύει: $\Delta\leq 0$ **και** $\alpha<0$
3. Ισχύει $\alpha x^2+\beta x+\gamma>0$ **για κάθε** πραγματικό αριθμό x αν και μόνο αν ισχύει: $\Delta<0$ **και** $\alpha>0$, κ.λ.π.
4. Το τριώνυμο $\alpha x^2+\beta x+\gamma$ **διατηρεί σταθερό πρόσημο για κάθε** πραγματικό x αν και μόνο αν ισχύει $\Delta<0$

Η συνάρτηση $f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$, $\alpha\neq 0$ είναι παραβολή με κορυφή το σημείο $\left(-\frac{\beta}{2\alpha},f\left(-\frac{\beta}{2\alpha}\right)=-\frac{\Delta}{4\alpha}\right)$

Σχέσεις ριζών συντελεστών: (τύποι Vietta) $S=\rho_1+\rho_2=-\frac{\beta}{\alpha}$, $P=\rho_1\cdot\rho_2=\frac{\gamma}{\alpha}$

Ενώ μια εξίσωση που έχει δοσμένες ρίζες ρ_1, ρ_2 είναι η $x^2-Sx+P=0$

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

Πίνακας τριγωνομετρικών αριθμών:

Γωνία ω	0	30^o, $\frac{\pi}{6}$	45^o, $\frac{\pi}{4}$	60^o, $\frac{\pi}{3}$	90^o, $\frac{\pi}{2}$	180, π	270, $\frac{3\pi}{2}$
ημω	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1
συνω	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
εφω	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$		0	
σφω		$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0		0

Βασικοί τριγωνομετρικοί τύποι και αριθμοί:

1. $\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x = 1$ ή $\eta\mu^2 x = 1 - \sigma\upsilon\nu^2 x$ ή $\sigma\upsilon\nu^2 x = 1 - \eta\mu^2 x$, $x \in R$, $\varepsilon\varphi x \cdot \sigma\varphi x = 1$, $x \in R - \left\{\kappa\frac{\pi}{2},\ \kappa \in Z\right\}$

2. $\varepsilon\varphi x = \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}$ για $x \in R - \left\{\kappa\pi + \frac{\pi}{2}, \kappa : \text{ακέραιος}\right\}$ $\sigma\varphi x = \frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x}$ για $x \in R - \{\kappa\pi, \kappa : \text{ακέραιος}\}$

3. $|\eta\mu x| \le 1$, $|\sigma\upsilon\nu x| \le 1$, για κάθε $x \in R$, $\varepsilon\varphi x \in R$, $\sigma\varphi x \in R$

4. $\eta\mu(\alpha \pm \beta) = \eta\mu\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\beta \pm \sigma\upsilon\nu\alpha \cdot \eta\mu\beta$, $\sigma\upsilon\nu(\alpha \pm \beta) = \sigma\upsilon\nu\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\beta \mp \eta\mu\alpha \cdot \eta\mu\beta$, $\varepsilon\varphi(\alpha \pm \beta) = \frac{\varepsilon\varphi\alpha \pm \varepsilon\varphi\beta}{1 \mp \varepsilon\varphi\alpha\varepsilon\varphi\beta}$

5. $\eta\mu 2\alpha = 2\eta\mu\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\alpha$, $\sigma\upsilon\nu 2\alpha = \sigma\upsilon\nu^2\alpha - \eta\mu^2\alpha = 2\sigma\upsilon\nu^2\alpha - 1 = 1 - 2\eta\mu^2\alpha$, $\varepsilon\varphi 2\alpha = \frac{2\varepsilon\varphi\alpha}{1 - \varepsilon\varphi^2\alpha}$

6. $\eta\mu^2 x = \frac{1 - \sigma\upsilon\nu 2x}{2}$, $\sigma\upsilon\nu^2 x = \frac{1 + \sigma\upsilon\nu 2x}{2}$, $\varepsilon\varphi^2 x = \frac{1 - \sigma\upsilon\nu 2x}{1 + \sigma\upsilon\nu 2x}$ **(Τύποι αποτετραγωνισμού)**:

7. $1 + \varepsilon\varphi^2 x = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$, $1 + \sigma\varphi^2 x = \frac{1}{\eta\mu^2 x}$ $\eta\mu\alpha = \frac{2\varepsilon\varphi\frac{\alpha}{2}}{1 + \varepsilon\varphi^2\frac{\alpha}{2}}$ $\sigma\upsilon\nu\alpha = \frac{1 - \varepsilon\varphi^2\frac{\alpha}{2}}{1 + \varepsilon\varphi^2\frac{\alpha}{2}}$ $\varepsilon\varphi\alpha = \frac{2\varepsilon\varphi\frac{\alpha}{2}}{1 - \varepsilon\varphi^2\frac{\alpha}{2}}$

ΒΑΣΙΚΕΣ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

- $\eta\mu x = \eta\mu\theta \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2\kappa\pi + \theta \\ \text{ή} \\ x = 2\kappa\pi + \pi - \theta \end{cases}$ με $\kappa \in Z$
- $\sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu\theta \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2\kappa\pi + \theta \\ \text{ή} \\ x = 2\kappa\pi - \theta \end{cases}$ με $\kappa \in Z$
- $\varepsilon\varphi x = \varepsilon\varphi\theta \Leftrightarrow x = \kappa\pi + \theta$ με $\kappa \in Z$
- $\sigma\varphi x = \sigma\varphi\theta \Leftrightarrow x = \kappa\pi + \theta$ με $\kappa \in Z$

Είναι: $\eta\mu x = 0 \Leftrightarrow x = \kappa\pi,\ \ \kappa \in Z$,

$\sigma\upsilon\nu x = 0 \Leftrightarrow x = \kappa\pi + \frac{\pi}{2},\ \ \kappa \in Z$,

$\eta\mu x = 1 \Leftrightarrow x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2},\ \ \kappa \in Z$

$\eta\mu x = -1 \Leftrightarrow x = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{2},\ \ \kappa \in Z$

$\sigma\upsilon\nu x = 1 \Leftrightarrow x = 2\kappa\pi,\ \ \kappa \in Z$

$\sigma\upsilon\nu x = -1 \Leftrightarrow x = 2\kappa\pi + \pi$

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ: λύνονται με χρήση του τριγωνομετρικού κύκλου.

1. **Νόμος ημιτόνων**: Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει ότι $\frac{\alpha}{\eta\mu A} = \frac{\beta}{\eta\mu B} = \frac{\gamma}{\eta\mu\Gamma} = 2R$

2. **Νόμος συνημιτόνων**: Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει ότι $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma\sigma\upsilon\nu A$

ΑΝΑΓΩΓΗ ΣΤΟ ΠΡΩΤΟ ΤΕΤΑΡΤΗΜΟΡΙΟ

- Οι γωνίες $2\kappa\pi + \omega$ και ω έχουν τους ίδιους τριγωνομετρικούς αριθμούς με $\kappa \in Z$.
- Οι αντίθετες γωνίες έχουν το ίδιο συνημίτονο $\sigma\upsilon\nu(-\omega) = \sigma\upsilon\nu(\omega)$, και αντίθετους τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς $\eta\mu(-\omega) = -\eta\mu(\omega)$, $\varepsilon\varphi(-\omega) = -\varepsilon\varphi\omega$, $\sigma\varphi(-\omega) = -\sigma\varphi\omega$. Δηλαδή η συνάρτηση $f(x) = \sigma\upsilon\nu x,\ x \in R$ είναι άρτια, ενώ οι $f(x) = \eta\mu x,\ x \in R$, $f(x) = \varepsilon\varphi x,\ \ x \neq \kappa\pi + \frac{\pi}{2}$, $f(x) = \sigma\varphi x,\ \ x \neq \kappa\pi$ είναι περιττές συναρτήσεις.
- Οι γωνίες της μορφής ή που μπορούν να πάρουν τη μορφή $180^o \pm \omega$, $\pi \pm \omega$ ή $360^o \pm \omega$ $2\pi \pm \omega$, έχουν τους ίδιους τριγωνομετρικούς αριθμούς με τη γωνία ω με πρόσημο $(+)$ ή $(-)$ ανάλογα με το τεταρτημόριο στο οποίο η τελική πλευρά της γωνίας τέμνει τον τριγωνομετρικό κύκλο, θεωρώντας ότι $0 < \omega < \frac{\pi}{2}$
- Οι γωνίες της μορφής ή που μπορούν να πάρουν τη μορφή $90^o \pm \omega$, $\frac{\pi}{2} \pm \omega$ ή $270^o \pm \omega$, $\frac{3\pi}{2} \pm \omega$, εναλλάσσουν τους τριγωνομετρικούς αριθμούς με τη γωνία ω, δηλαδή το ημίτονο γίνεται συνημίτονο ή αντίστροφα και εφαπτομένη γίνεται συνεφαπτομένη ή αντίστροφα με πρόσημο $(+)$ ή $(-)$ ανάλογα με το τεταρτημόριο στο οποίο η τελική πλευρά της γωνίας τέμνει τον τριγωνομετρικό κύκλο, θεωρώντας ότι $0 < \omega < \frac{\pi}{2}$

ΠΡΟΟΔΟΙ

Αριθμητική πρόοδος ονομάζεται η ακολουθία αριθμών $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_\nu$ **, ...** στην οποία κάθε όρος προκύπτει από τον προηγούμενο **προσθέτοντας** τον ίδιο αριθμό, (**διαφορά**), ω.

Ισχύουν: $\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu-1)\omega$, $\Sigma_\nu = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots + \alpha_\nu = \frac{\nu}{2}(\alpha_1 + \alpha_\nu) = \frac{\nu}{2}(2\alpha_1 + (\nu - 1)\omega)$, ενώ αναγκαία και ικανή συνθήκη για να είναι τρείς αριθμοί α, β, γ διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου είναι η $2\beta = \alpha + \gamma$

Γεωμετρική πρόοδος ονομάζεται η ακολουθία των μη μηδενικών αριθμών $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_\nu$, στην οποία κάθε όρος προκύπτει από τον προηγούμενο **πολλαπλασιάζοντας** τον ίδιο μη μηδενικό αριθμό, (**λόγος**), λ.

Ισχύουν: $\alpha_\nu = \alpha_1\lambda^{(\nu-1)}$, $\Sigma_\nu = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots + \alpha_\nu = \alpha_1\frac{\lambda^\nu - 1}{\lambda - 1}$ **εφόσον** $\lambda \neq 1$ **και** $\Sigma_\nu = \nu\alpha_1$ αν $\lambda = 1$, ενώ αναγκαία και ικανή συνθήκη για να είναι τρείς μη μηδενικοί αριθμοί α, β, γ διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου είναι η $\beta^2 = \alpha \cdot \gamma$

ΕΚΘΕΤΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

Ονομάζεται η συνάρτηση $f(x)=\alpha^x$, $0<\alpha\neq 1$ ορίζεται για κάθε $x\in R$ και παίρνει τιμές στο $(0,+\infty)$.
Αν $0<\alpha<1$ είναι γνησίως φθίνουσα ενώ αν $\alpha>1$ είναι γνησίως αύξουσα.

Ορισμός του e: $\lim\limits_{\nu\to+\infty}\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^{\nu}$ =2,71828182845904523536028747135 27...=e

ΛΟΓΑΡΙΘΜΟΙ

Ορισμός $\log_\alpha\theta=x\Leftrightarrow\alpha^x=\theta$ με $0<\alpha\neq 1$, $\theta>0$

Νεπέριος λογάριθμος λέγεται ο λογάριθμος που έχει βάση το e : $\ln x=y\Leftrightarrow e^y=x$ με $x>0$ και $y\in R$.

Δεκαδικός λογάριθμος λέγεται ο λογάριθμος που έχει βάση το 10: $\log x=y\Leftrightarrow 10^y=x$ με $x>0$ και $y\in R$.

<u>Κάθε πραγματικός αριθμός μπορεί να γραφεί ως λογάριθμος :</u> για κάθε $x\in R$ ισχύει: $x=\ln e^x$

ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

Η συνάρτηση $f(x)=\log_\alpha x$, $0<\alpha\neq 1$ ορίζεται στο $(0,+\infty)$, έχει τιμές στο IR και είναι η αντίστροφη της $f(x)=\alpha^x$
Αν $0<\alpha<1$ είναι γνησίως φθίνουσα, ενώ αν $\alpha>1$ είναι γνησίως αύξουσα

<u>ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ: --- στις επόμενες ιδιότητες – όπου δεν γράφεται – τα περιεχόμενα των λογαρίθμων είναι θετικά ενώ οι βάσεις θετικές και όχι ένα.</u>

$\ln 1=0$ $\quad \ln e=1$ $\quad \ln e^x=x$ $\quad e^{\ln x}=x$ με $x>0$ $\quad \ln e^{P(x)}=P(x)$ $\quad e^{\ln P(x)}=P(x)$ με $P(x)>0$

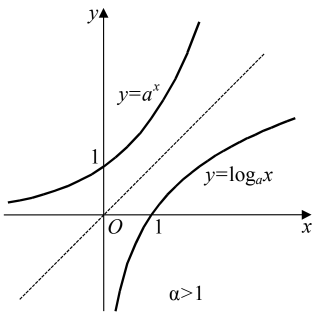
$\log_\alpha(x\cdot y)=\log_\alpha x+\log_\alpha y$ $\quad \log_\alpha x^\kappa=\kappa\log_\alpha x$ $\quad \log_\alpha\frac{x}{y}=\log_\alpha x-\log_\alpha y$ με $x>0$, $y>0$

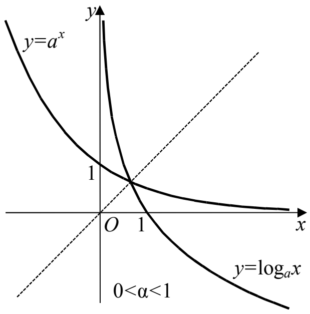
ΑΛΛΑΓΗ ΒΑΣΗΣ σε λογάριθμο: $\log_\alpha x=\frac{\ln x}{\ln\alpha}$, γενικότερα ισχύει: $\log_\beta x=\frac{\log_\alpha x}{\log_\alpha\beta}$, $0<\alpha,\beta\neq 1$, $x>0$

ΑΛΛΑΓΗ ΒΑΣΗΣ σε εκθετική συνάρτηση : $(\beta\alpha\sigma\eta)^{\varepsilon\kappa\theta\acute{\varepsilon}\tau\eta\varsigma}=e^{\varepsilon\kappa\theta\acute{\varepsilon}\tau\eta\cdot\ln(\beta\acute{\alpha}\sigma\eta\varsigma)}$ ή $\alpha^x=e^{x\ln\alpha}$

ΓΡΑΦΙΚΕΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ ΕΚΘΕΤΙΚΗΣ ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΗΣ

Οι συναρτήσεις $f(x)=\alpha^x$ και $f(x)=\log_\alpha x$ με $0<\alpha\neq 1$
Είναι αντίστροφες και έχουν γραφικές παραστάσεις που είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y=x$
(Διπλανά σχήματα)





ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

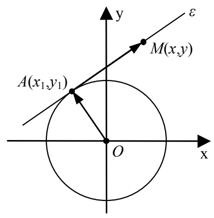
- Αν $A(x_1,y_1)$ και $B(x_2,y_2)$ τότε $\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1,y_2-y_1)$ ενώ το μέσο Μ του ΑΒ είναι το $M\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2}\right)$
- Αν $\vec{\alpha}=(x,y)$, τότε $\vec{\alpha}=x\vec{i}+y\vec{j}$, $|\vec{\alpha}|=\sqrt{x^2+y^2}$, $\lambda=\varepsilon\varphi\omega=\frac{y}{x}$, $x\neq 0$
- Έστω τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(x_1,y_1)$ και $\vec{\beta}=(x_2,y_2)$. Τότε: Ορίζουμε: $\det(\vec{\alpha},\vec{\beta})=\begin{vmatrix}x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\end{vmatrix}=x_1y_2-y_1x_2$

$\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=|\vec{\alpha}||\vec{\beta}|\sigma\upsilon\nu(\vec{\alpha},\vec{\beta})=x_1x_2+y_1y_2$, $\sigma\upsilon\nu\left(\vec{\alpha},\vec{\beta}\right)=\frac{\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}}{|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|}$, $\quad \vec{\alpha}\cdot\vec{v}=\vec{\alpha}\cdot\pi\rho o\beta_{\vec{\alpha}}\vec{v}$

- Ισχύουν $\quad \vec{\alpha}=(x_1,y_1)\perp\vec{\beta}=(x_2,y_2)\ \Leftrightarrow\ \vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=0\ \Leftrightarrow\ x_1x_2+y_1y_2=0$
- $\vec{\alpha}=(x_1,y_1)\ //\ \vec{\beta}=(x_2,y_2)\ \Leftrightarrow\ \det(\vec{\alpha},\vec{\beta})=0\ \Leftrightarrow\ x_1y_2-y_1x_2=0$

<u>**ΓΕΝΙΚΗ ΜΟΡΦΗ ΕΞΙΣΩΣΗΣ ΕΥΘΕΙΑΣ** (ε)</u> είναι η: $Ax+By+\Gamma=0$ με $A\neq 0$ ή $B\neq 0$. Ισχύουν:

- Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας που διέρχεται από τα $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$ είναι $\lambda_{AB}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$, $x_1\neq x_2$
- Η ευθεία (ε): $Ax+By+\Gamma=0$ είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{\delta}=(-B,A)$, στο διάνυσμα $\vec{\varepsilon}=(B,-A)$ και έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda=-\frac{A}{B}$, εφόσον $B\neq 0$ ενώ είναι κάθετη στο διάνυσμα . $\vec{p}=(A,B)$
- <u>**Η απόσταση**</u> ενός σημείου $M(x_o,y_o)$ από την (ε) είναι: $d(M,\varepsilon)=\frac{|Ax_o+By_o+\Gamma|}{\sqrt{A^2+B^2}}$
- <u>Το εμβαδό του</u> τριγώνου ΑΒΓ με $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$, $\Gamma(x_3,y_3)$ είναι: $(AB\Gamma)=\frac{1}{2}\left|\det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A\Gamma})\right|$

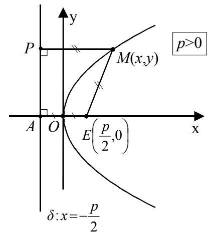


ΚΥΚΛΟΣ είναι το σύνολο των σημείων του επιπέδου Oxy τα οποία απέχουν σταθερή απόσταση ρ, (ακτίνα του κύκλου), από ένα σταθερό σημείο K, (κέντρο του κύκλου). Αν $M(x,y)$ αυτά τα σημεία και $K(x_o,y_o)$ τότε: $(x-x_o)^2+(y-y_o)^2=\rho^2$

ΓΕΝΙΚΗ ΜΟΡΦΗ ΕΞΙΣΩΣΗΣ ΚΥΚΛΟΥ $x^2+y^2+Ax+By+\Gamma=0$ με $A^2+B^2-4\Gamma>0$

Τότε έχει κέντρο το σημείο: $K=\left(-\frac{A}{2},-\frac{B}{2}\right)$ και ακτίνα $\rho=\frac{\sqrt{A^2+B^2-4\Gamma}}{2}$

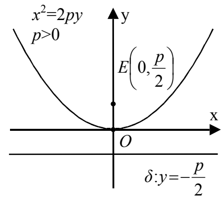
Η εξίσωση του κύκλου στο μιγαδικό επίπεδο είναι: $|z-z_o|=\rho>0$, *με* z_o *σταθερός μιγαδικός αριθμός και* $\rho\in R_+$.



ΠΑΡΑΒΟΛΗ είναι το σύνολο των σημείων του επιπέδου Oxy τα οποία **ισαπέχουν** από μια **ευθεία** δ, (διευθετούσα) και ένα σταθερό **σημείο** E, (Εστία).

Αν $M(x,y)$ αυτά τα σημεία και δ: $x=-\frac{p}{2}$, $E(\frac{p}{2},0)$ τότε: $d(M,\delta)=ME \Leftrightarrow y^2=2px$.

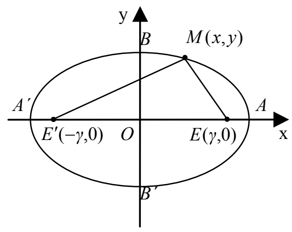
Το πάνω τμήμα είναι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y=\sqrt{2px}$, ενώ το κάτω της $y=-\sqrt{2px}$



Αν $M(x,y)$ αυτά τα σημεία και $\delta: y=-\frac{p}{2}$, $E\left(0,\frac{p}{2}\right)$ τότε: $d(M,\delta)=ME \Leftrightarrow x^2=2py$.

Αυτή η παραβολή είναι η γραφική παράσταση της συνάρτησης: $y=\frac{1}{2p}x^2$

ΈΛΛΕΙΨΗ είναι το σύνολο των σημείων $M(x,y)$ του επιπέδου Oxy τα οποία έχουν **σταθερό άθροισμα αποστάσεων,** (2α), από δύο **σταθερά σημεία** E, E' (εστίες), ($EE'=2\gamma<2\alpha$.



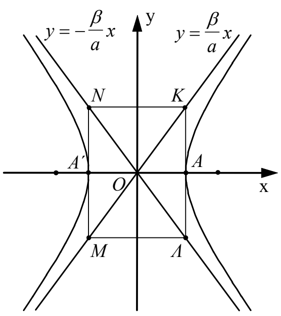
Αν είναι $E(\gamma,0)$, $E'(-\gamma,0)$ τότε: $ME+ME'=2A \Leftrightarrow \frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$, $\beta^2=\alpha^2-\gamma^2$.

Αν είναι $E(0,\gamma)$, $E'(0,-\gamma)$ τότε: $ME+ME'=2A \Leftrightarrow \frac{x^2}{\beta^2}+\frac{y^2}{\alpha^2}=1$, $\beta^2=\alpha^2-\gamma^2$.

Το πάνω τμήμα της έλλειψης $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$ είναι η γραφική παράσταση της συνάρτησης:

$y=\frac{\beta}{\alpha}\sqrt{\alpha^2-x^2}$, ενώ το κάτω της $y=-\frac{\beta}{\alpha}\sqrt{\alpha^2-x^2}$, $x\in[-\alpha,\alpha]$. Αντίστοιχα ισχύουν για την $\frac{x^2}{\beta^2}+\frac{y^2}{\alpha^2}=1$

Εκκεντρότητα της έλλειψης ονομάζεται ο αριθμός $\varepsilon=\frac{\gamma}{\alpha}<1$. Όταν $\varepsilon=\frac{\gamma}{\alpha}\to 1$ τότε η έλλειψη γίνεται ποιο πεπλατυσμένη, ενώ όταν $\varepsilon=\frac{\gamma}{\alpha}\to 0$ η έλλειψη τείνει να γίνει κύκλος



ΥΠΕΡΒΟΛΗ είναι το σύνολο των σημείων του επιπέδου τα οποία έχουν **σταθερή απόλυτη διαφορά αποστάσεων ,** (2α), από δύο **σταθερά σημεία** E, E' (εστίες), ($EE'=2\gamma>2\alpha$).

Αν $M(x,y)$ αυτά τα σημεία και $E'(-\gamma,0)$, $E(\gamma,0)$ τότε: $|ME-ME'|=2\alpha \Leftrightarrow \frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$, $\beta^2=\gamma^2-\alpha^2$.

Αν $M(x,y)$ αυτά τα σημεία και $E'(0,-\gamma)$, $E(0,\gamma)$ τότε $|ME-ME'|=2\alpha \Leftrightarrow \frac{y^2}{\alpha^2}-\frac{x^2}{\beta^2}=1$, $\beta^2=\gamma^2-\alpha^2$

Το πάνω τμήμα της υπερβολής $\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$ είναι η γραφική παράσταση της συνάρτησης:

$y=\frac{\beta}{\alpha}\sqrt{x^2-\alpha^2}$, ενώ το κάτω της $y=-\frac{\beta}{\alpha}\sqrt{x^2-\alpha^2}$, $x\in(-\infty,-\alpha]\cup[\alpha,+\infty)$, Εκκεντρότητα της υπερβολής ονομάζεται ο αριθμός $\varepsilon=\frac{\gamma}{\alpha}>1$.- Αντίστοιχα ισχύουν για την $\frac{y^2}{\alpha^2}-\frac{x^2}{\beta^2}=1$

ΑΣΥΜΠΤΩΤΕΣ ΤΗΣ ΥΠΕΡΒΟΛΗΣ

$\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$ είναι οι $y=\frac{\beta}{\alpha}x$ και $y=-\frac{\beta}{\alpha}x$ ενώ της $\frac{y^2}{\alpha^2}-\frac{x^2}{\beta^2}=1$ είναι οι $y=\frac{\alpha}{\beta}x$ και $y=-\frac{\alpha}{\beta}x$.

Ισοσκελής υπερβολή λέγεται η υπερβολή: $x^2-y^2=\alpha^2$.

ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΕΣ: των παραπάνω καμπυλών στο σημείο τους $A(x_o,y_o)$

ΚΩΝΙΚΗ	$x^2+y^2=\rho^2$	$y^2=2px$	$x^2=2py$	$\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$	$\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$
ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗ	$xx_o+yy_o=\rho^2$	$yy_o=p(x+x_o)$	$xx_o=p(y+y_o)$	$\frac{xx_o}{\alpha^2}+\frac{yy_o}{\beta^2}=1$	$\frac{xx_o}{\alpha^2}-\frac{yy_o}{\beta^2}=1$