Α΄ Ομάδα

Διαγώνισμα Α΄ τετράμηνου στα Μαθηματικά
θετικής και τεχνολογικής κατεύθυνσης Β΄ Λυκείου

Ενότητα: 1.5 Εσωτερικό γινόμενο διανυσμάτων

Εισηγητής: Πρωτοπαπάς Ελευθέριος

Ονοματεπώνυμο: …………………………………………………………………………..
Ημερομηνία: ………………………………………… Τμήμα: ……………...........................

ΘΕΜΑ 1ο (Μονάδες 10)

Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στην κόλλα αναφοράς σας "**Σ**" αν η πρόταση είναι σωστή και "**Λ**" αν η πρόταση είναι λανθασμένη, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε μία από τις προτάσεις: ***Α, Β, Γ, Δ*** και ***Ε***.

Α. Για τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$, ισχύει πάντα ότι $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = \vec{\beta}\cdot\vec{\alpha}$.

Β. Για τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$, ισχύει πάντα ότι $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = \vec{\beta}\cdot \text{προβ}_{\vec{\beta}}\vec{\alpha}$.

Γ. Για τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$, ισχύει πάντα ότι αν $\vec{\alpha} \uparrow\uparrow \vec{\beta}$, τότε $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = |\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|$.

Δ. Για τα μοναδιαία διανύσματα $\vec{i}, \vec{j}$ των αξόνων $x'x, y'y$, αντίστοιχα ισχύει ότι $\vec{j}\cdot\vec{i} = 1$.

Ε. Για τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ και για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$, ισχύει πάντα ότι $\left(\lambda\vec{\alpha}\right)\cdot\vec{\beta} = \vec{\alpha}\cdot\left(\lambda\vec{\beta}\right)$.

ΘΕΜΑ 2ο (Μονάδες 15)

Αν $\vec{\alpha} = (x_1, y_1),\ \vec{\beta} = (x_2, y_2)$, να αποδείξετε ότι $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = x_1x_2 + y_1y_2$.

ΘΕΜΑ 3ο (Μονάδες 20 – 10 – 10 – 10)

Έστω τα διανύσματα $\vec{u} = 2\vec{\alpha} + \vec{\beta}$, $\vec{x} = \text{προβ}_{\vec{\alpha}}\vec{u} + \text{προβ}_{\vec{\beta}}\vec{u}$ με $|\vec{\alpha}| = 4, |\vec{\beta}| = 3$ και $\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right) = \frac{2\pi}{3}$.

α) Να υπολογίσετε τα $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$ και $\vec{u}\cdot\vec{\alpha}$.

β) Να αποδείξετε ότι $|\vec{u}| = 7$.

γ) Να αποδείξετε ότι $\text{συν}\left(\widehat{\vec{u},\vec{\alpha}}\right) = \frac{13}{14}$.

δ) Να αποδείξετε ότι $\vec{x} = \frac{13}{8}\vec{\alpha} - \frac{1}{3}\vec{\beta}$.

ΘΕΜΑ 4ο (Μονάδες 15 – 10)

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (-3, 4)$ και $\vec{\beta} = (-1, -2)$.

α) Να αναλύσετε το $\vec{\alpha}$ σε δύο κάθετες συνιστώσες, όπου η μία να είναι παράλληλη στο $\vec{\beta}$.

β) Να βρείτε την προβολή του διανύσματος $\vec{\beta}$ πάνω στο $\vec{\alpha}$.

Καλή επιτυχία

Β΄ Ομάδα

Διαγώνισμα Α΄ τετράμηνου στα Μαθηματικά
θετικής και τεχνολογικής κατεύθυνσης Β΄ Λυκείου

Ενότητα: 1.5 Εσωτερικό γινόμενο διανυσμάτων

Εισηγητής: Πρωτοπαπάς Ελευθέριος

Ονοματεπώνυμο: ……………………………………………………………………………..
Ημερομηνία: ………………………………………… Τμήμα: ……………..........................

ΘΕΜΑ 1^o (Μονάδες 10)

Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στην κόλλα αναφοράς σας "**Σ**" αν η πρόταση είναι σωστή και "**Λ**" αν η πρόταση είναι λανθασμένη, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε μία από τις προτάσεις: ***Α, Β, Γ, Δ*** και ***Ε***.

Α. Για τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$, ισχύει πάντα ότι $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = |\vec{\beta}|\cdot|\vec{\alpha}|\cdot \text{συν}\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)$.

Β. Αν $\vec{\alpha} = (x_1, y_1)$, $\vec{\beta} = (x_2, y_2)$, τότε ισχύει πάντα ότι $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = x_1y_1 + x_2y_2$.

Γ. Για τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$, ισχύει πάντα ότι αν $\vec{\alpha} \uparrow\downarrow \vec{\beta}$, τότε $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = -|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|$.

Δ. Για τα μοναδιαία διανύσματα $\vec{i}, \vec{j}$ των αξόνων $x'x, y'y$, αντίστοιχα ισχύει ότι $\vec{i}^{\,2} = 0$.

Ε. Για τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ και για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$, ισχύει πάντα ότι $\vec{\alpha}\cdot\left(\vec{\beta}+\vec{\gamma}\right) = \vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma}$.

ΘΕΜΑ 2^o (Μονάδες 15)

Αν $\text{προβ}_{\vec{\alpha}}\vec{v}$ είναι η προβολή του $\vec{v}$ πάνω στο $\vec{\alpha}$, να αποδείξετε ότι $\vec{\alpha}\cdot\vec{v} = \vec{\alpha}\cdot\text{προβ}_{\vec{\alpha}}\vec{v}$.

ΘΕΜΑ 3^o (Μονάδες 20 – 10 – 10 – 10)

Έστω τα διανύσματα $\vec{v} = \vec{\beta} + 2\vec{\alpha}$, $\vec{x} = \text{προβ}_{\vec{\alpha}}\vec{v} + \text{προβ}_{\vec{\beta}}\vec{v}$ με $|\vec{\alpha}| = 2, |\vec{\beta}| = 4$ και $\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right) = \frac{2\pi}{3}$.

α) Να υπολογίσετε τα $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$ και $\vec{v}\cdot\vec{\alpha}$.

β) Να αποδείξετε ότι $|\vec{v}| = 4$.

γ) Να αποδείξετε ότι $\text{συν}\left(\widehat{\vec{v},\vec{\alpha}}\right) = \frac{1}{2}$.

δ) Να αποδείξετε ότι $\vec{x} = \vec{\alpha} + \frac{1}{2}\vec{\beta}$.

ΘΕΜΑ 4^o (Μονάδες 15 – 10)

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (5, -5)$ και $\vec{\beta} = (3, -1)$.

α) Να αναλύσετε το $\vec{\alpha}$ σε δύο κάθετες συνιστώσες, όπου η μία να είναι παράλληλη στο $\vec{\beta}$.

β) Να βρείτε την προβολή του διανύσματος $\vec{\beta}$ πάνω στο $\vec{\alpha}$.

Καλή επιτυχία

Απαντήσεις του διαγωνίσματος Α΄ τετράμηνου στα Μαθηματικά
θετικής και τεχνολογικής κατεύθυνσης Β΄ Λυκείου

Α΄ Ομάδα

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Σ, **Β.** Σ, **Γ.** Σ, **Δ.** Λ, **Ε.** Σ.

ΘΕΜΑ 2ο

Σχολικό βιβλίο σελίδα 42.

ΘΕΜΑ 3ο

α) Έχουμε ότι $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|\cdot\sigma\upsilon\nu\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)=4\cdot 3\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=-6$

και $\vec{u}\cdot\vec{\alpha}=\left(2\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right)\cdot\vec{\alpha}=2\vec{\alpha}^2+\vec{\beta}\cdot\vec{\alpha}=2\cdot 4^2-6=26$.

β) $|\vec{u}|^2=\vec{u}^2=\left(2\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right)^2=4\vec{\alpha}^2+4\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+\vec{\beta}^2=4\cdot 4^2+4(-6)+3^2=49$, άρα $|\vec{u}|=7$.

γ) $\sigma\upsilon\nu\left(\widehat{\vec{u},\vec{\alpha}}\right)=\frac{\vec{u}\cdot\vec{\alpha}}{|\vec{u}||\vec{\alpha}|}=\frac{26}{7\cdot 4}=\frac{26}{28}=\frac{13}{14}$.

δ) Έχουμε ότι $\pi\rho o\beta_{\vec{\alpha}}\vec{u}//\vec{\alpha}$, οπότε $\pi\rho o\beta_{\vec{\alpha}}\vec{u}=\lambda\vec{\alpha}$.

Αφού $\vec{\alpha}\cdot\vec{u}=\pi\rho o\beta_{\vec{\alpha}}\vec{u}\cdot\vec{\alpha}$, έχουμε ότι $26=\lambda\vec{\alpha}^2 \Leftrightarrow \lambda=\frac{26}{\vec{\alpha}^2}=\frac{26}{4^2}=\frac{13}{8}$,

δηλαδή $\pi\rho o\beta_{\vec{\alpha}}\vec{u}=\frac{13}{8}\vec{\alpha}$.

Έχουμε ότι $\pi\rho o\beta_{\vec{\beta}}\vec{u}//\vec{\beta}$, οπότε $\pi\rho o\beta_{\vec{\beta}}\vec{u}=\mu\vec{\beta}$.

Επίσης $\vec{u}\cdot\vec{\beta}=\left(2\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right)\cdot\vec{\beta}=2\vec{\alpha}\vec{\beta}+\vec{\beta}^2=2(-6)+3^2=-3$

Αφού $\vec{\beta}\cdot\vec{u}=\pi\rho o\beta_{\vec{\beta}}\vec{u}\cdot\vec{\beta}$, έχουμε ότι $-3=\mu\vec{\beta}^2 \Leftrightarrow \mu=\frac{-3}{\vec{\beta}^2}=\frac{-3}{3^2}=-\frac{1}{3}$,

δηλαδή $\pi\rho o\beta_{\vec{\beta}}\vec{u}=-\frac{1}{3}\vec{\beta}$.

Συνεπώς $\vec{x}=\pi\rho o\beta_{\vec{\alpha}}\vec{u}+\pi\rho o\beta_{\vec{\beta}}\vec{u}=\frac{13}{8}\vec{\alpha}-\frac{1}{3}\vec{\beta}$.

ΘΕΜΑ 4ο

α) Αναζητούμε τα $\vec{u},\vec{v}$ έτσι ώστε: $\vec{\alpha}=\vec{u}+\vec{v}$, $\vec{u}//\vec{\beta}$ και $\vec{\beta}\perp\vec{v}$.

- $\vec{u}//\vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{u}=\lambda\vec{\beta}, \lambda\in\mathbb{R} \Leftrightarrow \vec{u}=(-\lambda,-2\lambda), \lambda\in\mathbb{R}$.
- Έστω $x,y\in\mathbb{R}$ και $\vec{v}=(x,y)$, οπότε έχουμε ότι

$\vec{\beta} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{\beta}\cdot\vec{v} = 0 \Leftrightarrow -x - 2y = 0 \Leftrightarrow x = -2y$, άρα $\vec{v} = (-2y, y)$.

Τότε αφού $\vec{\alpha} = \vec{u} + \vec{v}$, έχουμε ότι

$$(-3,4) = (-\lambda, -2\lambda) + (-2y, y) \Leftrightarrow \begin{cases} -\lambda - 2y = -3 \\ -2\lambda + y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 \\ \lambda = -1 \end{cases},$$

οπότε $\vec{u} = (1,2)$ και $\vec{v} = (-4,2)$.

β) Έχουμε ότι $\text{προβ}_{\vec{\alpha}}\vec{\beta} // \vec{\alpha}$, οπότε $\text{προβ}_{\vec{\alpha}}\vec{\beta} = \lambda\vec{\alpha}$.

Αφού $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = \text{προβ}_{\vec{\alpha}}\vec{\beta}\cdot\vec{\alpha}$, έχουμε ότι

$$(-1)(-3) + 4(-2) = \lambda\vec{\alpha}^2 \Leftrightarrow \lambda = \frac{3-8}{(-3)^2 + 4^2} = \frac{-5}{25} = -\frac{1}{5},$$

δηλαδή $\text{προβ}_{\vec{\alpha}}\vec{\beta} = -\frac{1}{5}\vec{\alpha} = -\frac{1}{5}(-3,4) = \left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)$.

<u>Β΄ Ομάδα</u>

<u>ΘΕΜΑ 1ο</u>

Α. Σ, **Β.** Λ, **Γ.** Σ, **Δ.** Λ, **Ε.** Σ.

<u>ΘΕΜΑ 2ο</u>

Σχολικό βιβλίο σελίδα 45.

<u>ΘΕΜΑ 3ο</u>

α) Έχουμε ότι $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = |\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|\cdot\text{συν}\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right) = 2\cdot 4\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) = -4$

και $\vec{v}\cdot\vec{\alpha} = \left(\vec{\beta} + 2\vec{\alpha}\right)\cdot\vec{\alpha} = \vec{\beta}\cdot\vec{\alpha} + 2\vec{\alpha}^2 = -4 + 2\cdot 2^2 = 4$.

β) $|\vec{v}|^2 = \vec{v}^2 = \left(\vec{\beta} + 2\vec{\alpha}\right)^2 = \vec{\beta}^2 + 4\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} + 4\vec{\alpha}^2 = 4^2 + 4\cdot(-4) + 4\cdot 2^2 = 16$, άρα $|\vec{v}| = \sqrt{16} = 4$.

γ) $\text{συν}\left(\widehat{\vec{v},\vec{\alpha}}\right) = \dfrac{\vec{v}\cdot\vec{\alpha}}{|\vec{v}||\vec{\alpha}|} = \dfrac{4}{4\cdot 2} = \dfrac{1}{2}$.

δ) Έχουμε ότι $\text{προβ}_{\vec{\alpha}}\vec{v} // \vec{\alpha}$, οπότε $\text{προβ}_{\vec{\alpha}}\vec{v} = \lambda\vec{\alpha}$.

Αφού $\vec{\alpha}\cdot\vec{v} = \text{προβ}_{\vec{\alpha}}\vec{v}\cdot\vec{\alpha}$, έχουμε ότι $4 = \lambda\vec{\alpha}^2 \Leftrightarrow \lambda = \dfrac{4}{\vec{\alpha}^2} = \dfrac{4}{2^2} = 1$,

δηλαδή $\text{προβ}_{\vec{\alpha}}\vec{v} = \vec{\alpha}$.

Έχουμε ότι $\text{προβ}_{\vec{\beta}}\vec{v} // \vec{\beta}$, οπότε $\text{προβ}_{\vec{\beta}}\vec{v} = \mu\vec{\beta}$.

Επίσης $\vec{v}\cdot\vec{\beta} = \left(2\vec{\alpha} + \vec{\beta}\right)\cdot\vec{\beta} = 2\vec{\alpha}\vec{\beta} + \vec{\beta}^2 = 2(-4) + 4^2 = 8$

Αφού $\vec{\beta}\cdot\vec{v} = \text{προβ}_{\vec{\beta}}\vec{v}\cdot\vec{\beta}$, έχουμε ότι $8 = \mu\vec{\beta}^2 \Leftrightarrow \mu = \dfrac{8}{\vec{\beta}^2} = \dfrac{8}{4^2} = \dfrac{1}{2}$,

δηλαδή $\text{προβ}_{\vec{\beta}}\vec{v} = \dfrac{1}{2}\vec{\beta}$.

Συνεπώς $\vec{x} = \text{προβ}_{\vec{\alpha}}\vec{v} + \text{προβ}_{\vec{\beta}}\vec{v} = \vec{\alpha} + \dfrac{1}{2}\vec{\beta}$.

ΘΕΜΑ 4^{o}

α) Αναζητούμε τα $\vec{u}, \vec{v}$ έτσι ώστε: $\vec{\alpha} = \vec{u} + \vec{v}$, $\vec{u} // \vec{\beta}$ και $\vec{\beta} \perp \vec{v}$.

- $\vec{u} // \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{u} = \lambda\vec{\beta}, \lambda \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \vec{u} = (3\lambda, -\lambda), \lambda \in \mathbb{R}$.
- Έστω $x, y \in \mathbb{R}$ και $\vec{v} = (x, y)$, οπότε έχουμε ότι

  $\vec{\beta} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{\beta}\cdot\vec{v} = 0 \Leftrightarrow 3x - y = 0 \Leftrightarrow y = 3x$, άρα $\vec{v} = (x, 3x)$.

Τότε αφού $\vec{\alpha} = \vec{u} + \vec{v}$, έχουμε ότι

$$(5,-5) = (3\lambda, -\lambda) + (x, 3x) \Leftrightarrow \begin{cases} 3\lambda + x = 5 \\ -\lambda + 3x = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ \lambda = 2 \end{cases},$$

οπότε $\vec{u} = (6, -2)$ και $\vec{v} = (-1, -3)$.

β) Έχουμε ότι $\text{προβ}_{\vec{\alpha}}\vec{\beta} // \vec{\alpha}$, οπότε $\text{προβ}_{\vec{\alpha}}\vec{\beta} = \lambda\vec{\alpha}$.

Αφού $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = \text{προβ}_{\vec{\alpha}}\vec{\beta}\cdot\vec{\alpha}$, έχουμε ότι

$$5\cdot 3 + (-5)(-1) = \lambda\vec{\alpha}^2 \Leftrightarrow \lambda = \frac{15+5}{5^2 + (-5)^2} = \frac{20}{50} = \frac{2}{5},$$

δηλαδή $\text{προβ}_{\vec{\alpha}}\vec{\beta} = \dfrac{2}{5}\vec{\alpha} = \dfrac{2}{5}(5,-5) = \left(2,-2\right)$.