<u>*Α΄ Ομάδα*</u>

<u>Διαγώνισμα Α΄ τετράμηνου</u>
<u>στα Μαθηματικά Θετικής και τεχνολογικής κατεύθυνσης Β΄ Λυκείου</u>

<u>Ενότητα: Διανύσματα</u>

<u>*Εισηγητής: Πρωτοπαπάς Ελευθέριος*</u>

<u>Ονοματεπώνυμο:</u> ……………………………………………………………………..
<u>Ημερομηνία:</u> …………………………………… <u>Τμήμα:</u> ……………......

<u>Θέμα 1^{ο} (Μονάδες 15)</u>

Τι ονομάζουμε γινόμενο του μη μηδενικού πραγματικού αριθμού λ με το μη μηδενικό διάνυσμα $\vec{\alpha}$;

<u>Θέμα 2^{ο} (Μονάδες 15)</u>

Αν $\lambda \in \mathbb{R}$ να αποδείξετε ότι $\left(\lambda\vec{\alpha}\right)\cdot\vec{\beta}=\vec{\alpha}\cdot\left(\lambda\vec{\beta}\right)$.

<u>Θέμα 3^{ο} (Μονάδες 50)</u>

Δίνονται τα σημεία Α(−6, 3), Β(5, 1), Γ(−2, 0) και το σημείο Μ ώστε $5\vec{AM}=2\vec{AB}$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του $\vec{AB}$.

β) Να βρείτε το μέτρο του $\vec{A\Gamma}$.

γ) Να βρείτε σημείο Δ ώστε το τετράπλευρο ΑΒΓΔ να είναι παραλληλόγραμμο.

δ) Να αποδείξετε ότι τα σημεία Α, Β, Γ ορίζουν τρίγωνο.

ε) Να βρείτε τις συντεταγμένες του $\vec{\Gamma M}$.

στ) Να αποδείξετε ότι $\vec{\Gamma M}\perp\vec{BA}$.

ζ) Να αποδείξετε ότι $\sigma\upsilon\nu\left(\widehat{\vec{\Gamma M},\vec{\Gamma B}}\right)=\frac{\sqrt{10}}{10}$.

η) Να βρείτε τις συντεταγμένες της προβολής του $\vec{\Gamma M}$ στο $\vec{\Gamma B}$.

θ) Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{u}$ το οποίο έχει μέτρο 1 και είναι ομόρροπο του $\vec{AB}$.

ι) Να αναλύσετε το $\vec{AB}$ σε δύο κάθετες συνιστώσες εκ των οποίων η μία να είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{A\Gamma}$.

<u>Θέμα 4^{ο} (Μονάδες 20)</u>

Δίνονται τα σημεία Α, Β, Γ, Δ όπου $\left|\vec{\Delta A}\right|=1, \left|\vec{\Delta B}\right|=2, \left|\vec{\Delta\Gamma}\right|=3$ και ισχύει η σχέση $\vec{\Delta A}+2\vec{\Delta B}+3\vec{\Gamma\Delta}=\vec{0}$.

α) Να αποδείξετε ότι τα σημεία Α, Β, Γ είναι συνευθειακά.

β) Να βρείτε το είδος της γωνίας των $\vec{\Delta A},\vec{\Delta B}$.

Καλή επιτυχία

Β΄ Ομάδα

Διαγώνισμα Α΄ τετράμηνου
στα Μαθηματικά Θετικής και τεχνολογικής κατεύθυνσης Β΄ Λυκείου

Ενότητα: Διανύσματα

Εισηγητής: Πρωτοπαπάς Ελευθέριος

Ονοματεπώνυμο: ………………………………………………………………..
Ημερομηνία: …………………………………… Τμήμα: ……………......

Θέμα 1ο (Μονάδες 15)

Τι ονομάζουμε εσωτερικό γινόμενο των μη μηδενικών διανυσμάτων $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$;

Θέμα 2ο (Μονάδες 15)

Αν $\lambda \in \mathbb{R}$ και $\vec{\alpha} = (x_1, y_1)$, να αποδείξετε ότι $\lambda\vec{\alpha} = (\lambda x_1, \lambda y_1)$.

Θέμα 3ο (Μονάδες 50)

Δίνονται τα σημεία Α(2, 0), Β(4, 2) και Γ(−2, 0) και το σημείο Μ ώστε $5\vec{\Gamma M} = 3\vec{\Gamma B}$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του $\vec{AB}$.

β) Να βρείτε το μέτρο του $\vec{B\Gamma}$.

γ) Να βρείτε σημείο Δ ώστε το τετράπλευρο ΑΒΔΓ να είναι παραλληλόγραμμο.

δ) Να αποδείξετε ότι τα σημεία Α, Β, Γ ορίζουν τρίγωνο.

ε) Να βρείτε τις συντεταγμένες του $\vec{AM}$.

στ) Να αποδείξετε ότι $\vec{AM} \perp \vec{\Gamma B}$.

ζ) Να βρείτε το μέτρο της γωνίας των $\vec{AB}, \vec{A\Gamma}$.

η) Να βρείτε τις συντεταγμένες της προβολής του $\vec{\Gamma M}$ στο $\vec{\Gamma B}$.

θ) Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{u}$ το οποίο έχει μέτρο 1 και είναι αντίρροπο του $\vec{B\Gamma}$.

ι) Να αναλύσετε το $\vec{AB}$ σε δύο κάθετες συνιστώσες εκ των οποίων η μία να είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{B\Gamma}$.

Θέμα 4ο (Μονάδες 20)

Δίνονται τα σημεία Α, Β, Γ, Δ όπου $\left|\vec{\Delta A}\right| = 1, \left|\vec{\Delta B}\right| = 2, \left|\vec{\Delta \Gamma}\right| = 3$ και ισχύει η σχέση

$3\vec{A\Delta} + 2\vec{\Delta B} + \vec{\Delta\Gamma} = \vec{0}$.

α) Να αποδείξετε ότι τα σημεία Α, Β, Γ είναι συνευθειακά.

β) Να βρείτε το είδος της γωνίας των $\vec{\Delta A}, \vec{\Delta B}$.

Καλή επιτυχία

Απαντήσεις του διαγωνίσματος Α΄ τετράμηνου
στα Μαθηματικά Θετικής και τεχνολογικής κατεύθυνσης
Β΄ Λυκείου

Α΄ Ομάδα

Θέμα 1^o: Ορισμός σχολικό βιβλίο σελίδα 21.

Θέμα 2^o: Απόδειξη σχολικό βιβλίο σελίδα 43.

Θέμα 3^o

α) $\vec{AB} = \big(5-(-6), 1-3\big) = (11,-2)$.

β) $\vec{A\Gamma} = \big(-2-(-6), 0-3\big) = (4,-3)$, άρα $\left|\vec{A\Gamma}\right| = \sqrt{4^2+(-3)^2} = 5$.

γ) Για να είναι το τετράπλευρο ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμο, πρέπει $\vec{AB} = \vec{\Delta\Gamma}$.

Έστω Δ(α, β), οπότε $\vec{\Delta\Gamma} = \big(-2-\alpha, 0-\beta\big) = (-2-\alpha, -\beta)$ και

$(11, -2) = (-2 - \alpha, -\beta) \Leftrightarrow \begin{cases} -2-\alpha = 11 \\ -\beta = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -13 \\ \beta = 2 \end{cases}$ και Δ(−13, 2).

δ) $\det\left(\vec{AB}, \vec{A\Gamma}\right) = \begin{vmatrix} 11 & -2 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = -33+8 = -24 \neq 0$, άρα τα σημεία Α, Β, Γ ορίζουν τρίγωνο.

ε) Έστω Μ(γ, δ), οπότε $\vec{AM} = \big(\gamma-(-6), \delta-3\big) = (\gamma+6, \delta-3)$ και από την $5\vec{AM} = 2\vec{AB}$ έχουμε:

$5(\gamma+6, \delta-3) = 2(11,-2) \Leftrightarrow \begin{cases} 5\gamma+30 = 22 \\ 5\delta-15 = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \gamma = -\dfrac{8}{5} \\ \delta = \dfrac{11}{5} \end{cases}$, άρα $M\left(-\dfrac{8}{5}, \dfrac{11}{5}\right)$.

Συνεπώς: $\vec{\Gamma M} = \left(-\dfrac{8}{5}-(-2), \dfrac{11}{5}-0\right) = \left(\dfrac{2}{5}, \dfrac{11}{5}\right)$.

στ) $\vec{\Gamma M}\cdot\vec{BA} = \left(\dfrac{2}{5}, \dfrac{11}{5}\right)\cdot(-11,2) = \dfrac{2}{5}\cdot(-11) + \dfrac{11}{5}\cdot 2 = 0$, άρα $\vec{\Gamma M} \perp \vec{BA}$.

ζ) $\vec{\Gamma B} = \big(5-(-2), 1-0\big) = (7,1)$ και $\left|\vec{\Gamma B}\right| = \sqrt{7^2+1^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$.

Επιπλέον έχουμε $\vec{\Gamma M}\cdot\vec{\Gamma B} = \left(\dfrac{2}{5}, \dfrac{11}{5}\right)\cdot(7,1) = \dfrac{2}{5}\cdot 7 + \dfrac{11}{5}\cdot 1 = \dfrac{25}{5} = 5$ και

$\left|\vec{\Gamma M}\right| = \sqrt{\left(\dfrac{2}{5}\right)^2 + \left(\dfrac{11}{5}\right)^2} = \sqrt{\dfrac{125}{25}} = \sqrt{5}$.

Συνεπώς $\sigma\upsilon\nu\left(\widehat{\vec{\Gamma M},\vec{\Gamma B}}\right)=\dfrac{\vec{\Gamma M}\cdot\vec{\Gamma B}}{\left|\vec{\Gamma M}\right|\cdot\left|\vec{\Gamma B}\right|}=\dfrac{5}{\sqrt{5}\cdot5\sqrt{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{10}}=\dfrac{\sqrt{10}}{10}$.

η) Ισχύει $\vec{\Gamma M}\cdot\vec{\Gamma B}=\pi\rho o\beta_{\vec{\Gamma B}}\vec{\Gamma M}\cdot\vec{\Gamma B}$ και

$\pi\rho o\beta_{\vec{\Gamma B}}\vec{\Gamma M}/\!/\vec{\Gamma B}$, οπότε $\pi\rho o\beta_{\vec{\Gamma B}}\vec{\Gamma M}=\lambda\vec{\Gamma B}=(7\lambda,\lambda),\ \lambda\in\mathbb{R}$.

Συνεπώς:

$5=(7\lambda,\lambda)(7,1)\ \Leftrightarrow\ 5=49\lambda+\lambda\ \Leftrightarrow\ \lambda=\dfrac{1}{10}$

και $\pi\rho o\beta_{\vec{\Gamma B}}\vec{\Gamma M}=\left(\dfrac{7}{10},\dfrac{1}{10}\right)$.

θ) Έστω $\vec{u}=(x,y)$, με $\left|\vec{u}\right|=\sqrt{x^2+y^2}=1$ και αφού $\vec{u}\uparrow\uparrow\vec{AB}$ υπάρχει $k>0$ ώστε

$\vec{u}=k\vec{AB}=(11k,-2k)$.

Συνεπώς $\sqrt{(11k)^2+(-2k)^2}=1\ \Leftrightarrow\ 125k^2=1\ \Leftrightarrow\ k^2=\dfrac{1}{125}$,

άρα $k=\sqrt{\dfrac{1}{125}}=\dfrac{1}{5\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{5}}{25}$ και $\vec{u}=\left(\dfrac{11\sqrt{5}}{25},-\dfrac{2\sqrt{5}}{25}\right)$.

ι) Αναζητούμε διανύσματα $\vec{v},\vec{w}$ έτσι ώστε: $\begin{cases}\vec{AB}=\vec{v}+\vec{w}\\ \vec{A\Gamma}/\!/\vec{v}\\ \vec{A\Gamma}\perp\vec{w}\end{cases}$.

Αφού $\vec{A\Gamma}/\!/\vec{v}$ υπάρχει $m\in\mathbb{R}$ ώστε $\vec{v}=m\vec{A\Gamma}=(4m,-3m)$.

Έστω $\vec{w}=(\chi,\psi)$ και αφού $\vec{A\Gamma}\perp\vec{w}$ ισχύει $\vec{A\Gamma}\cdot\vec{w}=0\ \Leftrightarrow\ (4,-3)(\chi,\psi)=0\ \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\ 4\chi-3\psi=0\ \Leftrightarrow\ \chi=\dfrac{3}{4}\psi$, άρα $\vec{w}=\left(\dfrac{3}{4}\psi,\psi\right)$.

Τέλος:

$\vec{AB}=\vec{v}+\vec{w}\ \Leftrightarrow\ (11,-2)=(4m,-3m)+\left(\dfrac{3}{4}\psi,\psi\right)\ \Leftrightarrow\ \begin{cases}11=4m+\dfrac{3}{4}\psi\\ -2=-3m+\psi\end{cases}\ \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\ \begin{cases}16m+3\psi=44\\ \psi=3m-2\end{cases}\ \Leftrightarrow\ \begin{cases}16m+9m-6=44\\ \psi=3m-2\end{cases}\ \Leftrightarrow\ \begin{cases}m=2\\ \psi=4\end{cases}$.

Συνεπώς:

$\vec{v}=(8,-6)$ και $\vec{w}=(3,4)$ ώστε $\vec{AB}=\vec{v}+\vec{w}$.

Θέμα 4ο

α) $\vec{\Delta A}+2\vec{\Delta B}+3\vec{\Gamma\Delta}=\vec{0} \Leftrightarrow \vec{\Delta A}+2\left(\vec{\Delta A}+\vec{AB}\right)+3\left(\vec{A\Delta}-\vec{A\Gamma}\right)=\vec{0} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \vec{\Delta A}+2\vec{\Delta A}+2\vec{AB}+3\vec{A\Delta}-3\vec{A\Gamma}=\vec{0} \Leftrightarrow 2\vec{AB}=3\vec{A\Gamma} \Leftrightarrow \vec{AB}=\frac{3}{2}\vec{A\Gamma}$, δηλαδή τα σημεία Α, Β, Γ είναι συνευθειακά.

β) $\vec{\Delta A}+2\vec{\Delta B}+3\vec{\Gamma\Delta}=\vec{0} \Leftrightarrow -3\vec{\Gamma\Delta}=\vec{\Delta A}+2\vec{\Delta B}$,

οπότε $\left(-3\vec{\Gamma\Delta}\right)^2=\left(\vec{\Delta A}+2\vec{\Delta B}\right)^2 \Leftrightarrow 9\vec{\Gamma\Delta}^2=\vec{\Delta A}^2+4\vec{\Delta A}\cdot\vec{\Delta B}+4\vec{\Delta B}^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4\vec{\Delta A}\cdot\vec{\Delta B}=9\left|\vec{\Gamma\Delta}\right|^2-\left|\vec{\Delta A}\right|^2-4\left|\vec{\Delta B}\right|^2$,

άρα

$4\vec{\Delta A}\cdot\vec{\Delta B}=9\cdot3^2-1^2-4\cdot2^2=81-1-16=64$

και

$\vec{\Delta A}\cdot\vec{\Delta B}=16>0$.

Αφού $\vec{\Delta A}\cdot\vec{\Delta B}\neq\left|\vec{\Delta A}\right|\cdot\left|\vec{\Delta B}\right|$, η γωνία των $\vec{\Delta A},\vec{\Delta B}$ είναι οξεία.

Β΄ Ομάδα

Θέμα 1ο: Ορισμός σχολικό βιβλίο σελίδα 41.

Θέμα 2ο: Απόδειξη σχολικό βιβλίο σελίδα 32.

Θέμα 3ο

α) $\vec{AB}=(4-2,2-0)=(2,2)$.

β) $\vec{B\Gamma}=(-2-4,0-2)=(-6,-2)$, άρα $\vec{B\Gamma}=\sqrt{(-6)^2+(-2)^2}=\sqrt{40}=2\sqrt{10}$.

γ) Για να είναι το τετράπλευρο ΑΒΔΓ παραλληλόγραμμο, πρέπει $\vec{AB}=\vec{\Gamma\Delta}$.

Έστω Δ(α, β), οπότε $\vec{\Gamma\Delta}=\left(\alpha-(-2),\beta-0\right)=(\alpha+2,\beta)$ και

(2, 2) = (α + 2, β) $\Leftrightarrow \begin{cases}\alpha+2=2\\ \beta=2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha=0\\ \beta=2\end{cases}$ και Δ(0, 2).

δ) $\det\left(\vec{BA},\vec{B\Gamma}\right)=\begin{vmatrix}-2 & -2\\ -6 & -2\end{vmatrix}=4-12=-8\neq0$, άρα τα σημεία Α, Β, Γ ορίζουν τρίγωνο.

ε) Έστω Μ(γ, δ), οπότε $\vec{\Gamma M}=\left(\gamma-(-2),\delta-0\right)=(\gamma+2,\delta)$ και από την

$5\vec{\Gamma M}=3\vec{\Gamma B}$ έχουμε:

$5(\gamma+2,\delta)=3(6,2) \Leftrightarrow \begin{cases}5\gamma+10=18\\ 5\delta=6\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\gamma=\frac{8}{5}\\ \delta=\frac{6}{5}\end{cases}$, άρα $M\left(\frac{8}{5},\frac{6}{5}\right)$.

Συνεπώς: $\vec{AM} = \left(\frac{8}{5} - 2, \frac{6}{5} - 0\right) = \left(-\frac{2}{5}, \frac{6}{5}\right)$.

στ) $\vec{AM} \cdot \vec{\Gamma B} = \left(-\frac{2}{5}, \frac{6}{5}\right) \cdot (6,2) = 0$, οπότε $\vec{AM} \perp \vec{\Gamma B}$.

ζ) $\vec{A\Gamma} = (-2-2, 0-0) = (-4,0)$ και $|\vec{A\Gamma}| = \sqrt{(-4)^2 + 0^2} = \sqrt{16} = 4$.

Επιπλέον έχουμε $\vec{A\Gamma} \cdot \vec{AB} = (-4,0) \cdot (2,2) = -8$ και

$|\vec{AB}| = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.

Συνεπώς $\text{συν}\left(\widehat{\vec{AB}, \vec{A\Gamma}}\right) = \frac{\vec{A\Gamma} \cdot \vec{AB}}{|\vec{A\Gamma}| \cdot |\vec{AB}|} = \frac{-8}{4 \cdot 2\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Αφού $\text{συν}\frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $0 \le \left(\widehat{\vec{\Gamma M}, \vec{\Gamma B}}\right) \le \pi$, έχουμε ότι $\left(\widehat{\vec{\Gamma M}, \vec{\Gamma B}}\right) = \frac{3\pi}{4}$.

η) Ισχύει $\vec{\Gamma M} \cdot \vec{\Gamma B} = \text{προβ}_{\vec{\Gamma B}} \vec{\Gamma M} \cdot \vec{\Gamma B}$ και

$\text{προβ}_{\vec{\Gamma B}} \vec{\Gamma M} // \vec{\Gamma B}$, οπότε $\text{προβ}_{\vec{\Gamma B}} \vec{\Gamma M} = \lambda \vec{\Gamma B} = (6\lambda, 2\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$,

ενώ $\vec{\Gamma M} \cdot \vec{\Gamma B} = \left(\frac{18}{5}, \frac{6}{5}\right) \cdot (6,2) = \frac{120}{5} = 24$.

Συνεπώς:

$24 = (6\lambda, 2\lambda)(6,2) \Leftrightarrow 24 = 40\lambda \Leftrightarrow \lambda = \frac{24}{40} = \frac{3}{5}$

και $\text{προβ}_{\vec{\Gamma B}} \vec{\Gamma M} = \left(\frac{18}{5}, \frac{6}{5}\right)$.

θ) Έστω $\vec{u} = (x,y)$, με $|\vec{u}| = \sqrt{x^2 + y^2} = 1$ και αφού $\vec{u} \uparrow\downarrow \vec{B\Gamma}$ υπάρχει $k < 0$ ώστε

$\vec{u} = k\vec{B\Gamma} = (-6k, -2k)$.

Συνεπώς $\sqrt{(-6k)^2 + (-2k)^2} = 1 \Leftrightarrow 40k^2 = 1 \Leftrightarrow k^2 = \frac{1}{40}$,

άρα $k = -\sqrt{\frac{1}{40}} = -\frac{1}{2\sqrt{10}} = -\frac{\sqrt{10}}{20}$ και $\vec{u} = \left(\frac{3\sqrt{10}}{10}, \frac{\sqrt{10}}{10}\right)$.

ι) Αναζητούμε διανύσματα $\vec{v}, \vec{w}$ έτσι ώστε: $\begin{cases} \vec{AB} = \vec{v} + \vec{w} \\ \vec{B\Gamma} // \vec{v} \\ \vec{B\Gamma} \perp \vec{w} \end{cases}$.

Αφού $\vec{B\Gamma} // \vec{v}$ υπάρχει $m \in \mathbb{R}$ ώστε $\vec{v} = m\vec{B\Gamma} = (-6m, -2m)$.

Έστω $\vec{w} = (\chi, \psi)$ και αφού $\vec{B\Gamma} \perp \vec{w}$ ισχύει $\vec{B\Gamma} \cdot \vec{w} = 0 \Leftrightarrow (-6,-2)(\chi,\psi) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -6\chi - 2\psi = 0 \Leftrightarrow \psi = -3\chi$, άρα $\vec{w} = (\chi, -3\chi)$.

Τέλος:

$$\vec{AB} = \vec{v} + \vec{w} \Leftrightarrow (2,2) = (-6m,-2m) + (\chi,-3\chi) \Leftrightarrow \begin{cases} 2 = -6m + \chi \\ 2 = -2m - 3\chi \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \chi = 6m + 2 \\ 2 = -2m - 18m - 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \chi = 6m + 2 \\ m = -\dfrac{8}{20} = -\dfrac{2}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \chi = -\dfrac{2}{5} \\ m = -\dfrac{2}{5} \end{cases}.$$

Συνεπώς:

$\vec{v} = \left(\dfrac{12}{5}, \dfrac{4}{5}\right)$ και $\vec{w} = \left(-\dfrac{2}{5}, \dfrac{6}{5}\right)$ ώστε $\vec{AB} = \vec{v} + \vec{w}$.

<u>Θέμα 4^ο^</u>

α) $3\vec{A\Delta} + 2\vec{\Delta B} + \vec{\Delta\Gamma} = \vec{0} \Leftrightarrow 3\vec{A\Delta} + 2\left(\vec{AB} - \vec{A\Delta}\right) + \left(\vec{A\Gamma} - \vec{A\Delta}\right) = \vec{0} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3\vec{A\Delta} + 2\vec{AB} - 2\vec{A\Delta} + \vec{A\Gamma} - \vec{A\Delta} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{A\Gamma} = -2\vec{AB}$, δηλαδή τα σημεία Α, Β, Γ είναι συνευθειακά.

β) $3\vec{A\Delta} + 2\vec{\Delta B} + \vec{\Delta\Gamma} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{\Delta\Gamma} = -3\vec{A\Delta} - 2\vec{\Delta B}$,

οπότε $\vec{\Delta\Gamma}^2 = \left(-3\vec{A\Delta} - 2\vec{\Delta B}\right)^2 \Leftrightarrow \vec{\Delta\Gamma}^2 = 9\vec{A\Delta}^2 + 12\vec{A\Delta} \cdot \vec{\Delta B} + 4\vec{\Delta B}^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 12\vec{\Delta A} \cdot \vec{\Delta B} = 9\left|\vec{A\Delta}\right|^2 + 4\left|\vec{\Delta B}\right|^2 - \left|\vec{\Delta\Gamma}\right|^2$,

άρα

$12\vec{\Delta A} \cdot \vec{\Delta B} = 9 \cdot 1^2 + 4 \cdot 2^2 - 3^2$

και

$\vec{\Delta A} \cdot \vec{\Delta B} = \dfrac{16}{12} = \dfrac{4}{3} > 0$.

Αφού $\vec{\Delta A} \cdot \vec{\Delta B} \neq \left|\vec{\Delta A}\right| \cdot \left|\vec{\Delta B}\right|$, η γωνία των $\vec{\Delta A}, \vec{\Delta B}$ είναι οξεία.