2ο ΓΕΝΙΚΟ ΛΥΚΕΙΟ ΚΟΡΙΝΘΟΥ **Σχολικό έτος 2012-2013**

Ά τετράμηνο

Τάξη Β΄ (ομάδα Α)

ΩΡΙΑΙΑ ΓΡΑΠΤΗ ΔΟΚΙΜΑΣΙΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΘΕΜΑ 1

Α. Να αποδειξετε ότι αν $\mathrm{M}(x_{\mathrm{M}}, \psi_{\mathrm{M}})$ το μεσο του ευθυγραμμου τμηματος AB με $\mathrm{A}(x_1, \psi_1)$ και $\mathrm{B}(x_2, \psi_2)$ τοτε $x_{\mathrm{M}} = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$ και $\psi_{\mathrm{M}} = \dfrac{\psi_1 + \psi_2}{2}$

(μονάδες 10)

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Θεωρια από το σχολικο βιβλιο

Β. Να χαρακτηρίσετε σωστές ή λάθος τις παρακάτω προτάσεις:

1. Αν τα διανυσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ είναι διαδοχικα και σχηματιζουν τριγωνο τοτε $\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma} = \vec{0}$
2. Αν O το σημειο τομης των διαγωνιων του παραλληλογραμμου $\mathrm{AB\Gamma\Delta}$ τοτε $\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}} + \overrightarrow{\mathrm{O\Gamma}} + \overrightarrow{\mathrm{O\Delta}} = \vec{0}$
3. Αν $\vec{\alpha} = (1,2)$ και $\vec{\beta} = (2,1)$ τοτε $\vec{\alpha} // \vec{\beta}$
4. Αν $\mathrm{A}(\alpha, \beta)$ και $\mathrm{B}(\beta, \alpha)$ τοτε οι συντεταγμενες του μεσου του ευθυγραμμου τμηματος AB είναι ισες μεταξυ τους

(μονάδες 5 Χ 4 = 20)

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Σ , Σ , Λ , Σ

ΘΕΜΑ 2

Δινονται τα σημεια $\mathrm{P}, \mathrm{A}, \mathrm{B}, \Gamma$ του επιπεδου και το διανυσμα $\vec{x} = 2\overrightarrow{\mathrm{PA}} + \overrightarrow{\mathrm{P}B} - 3\overrightarrow{\mathrm{P\Gamma}}$

Α. Να αποδειξετε ότι το διανυσμα $\vec{x}$ είναι ανεξαρτητο του σημειου P .

(μοναδες 15)

Β. Να αποδειξετε την προταση: Αν $\vec{x} = \vec{0}$ τοτε τα σημεια $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \Gamma$ είναι συνευθειακα.

(μοναδες 15)

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:

Α. Είναι

$$\begin{aligned}\vec{x} &= 2\overrightarrow{\mathrm{PA}} + \overrightarrow{\mathrm{P}B} - 2\overrightarrow{\mathrm{P\Gamma}} - \overrightarrow{\mathrm{P\Gamma}} = \\ &= 2\overrightarrow{\mathrm{PA}} - 2\overrightarrow{\mathrm{P\Gamma}} + \overrightarrow{\mathrm{P}B} - \overrightarrow{\mathrm{P\Gamma}} = \\ &= 2(\overrightarrow{\mathrm{PA}} - \overrightarrow{\mathrm{P\Gamma}}) + \overrightarrow{\mathrm{P}B} - \overrightarrow{\mathrm{P\Gamma}} = \\ &= 2\overrightarrow{\Gamma\mathrm{A}} - \overrightarrow{\Gamma\mathrm{B}}\end{aligned}$$

οποτε το διανυσμα $\vec{x}$ εκφραζεται χωρις τη βοηθεια του σημειου P

Β. Είναι από το Α ερωτημα $\vec{x} = 2\overrightarrow{\Gamma A} - \overrightarrow{\Gamma B}$ **και επειδη** $\vec{x} = \vec{0}$ **εχουμε :**

$2\overrightarrow{\Gamma A} - \overrightarrow{\Gamma B} = \vec{0}$ **οποτε** $\overrightarrow{\Gamma B} = 2\overrightarrow{\Gamma A}$ **και επομενως** $\overrightarrow{\Gamma B} // \overrightarrow{\Gamma A}$ **με κοινο σημειο το** Γ**,**
που σημαινει ότι τα σημεια $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \Gamma$ **είναι συνευθειακα.**

<u>ΘΕΜΑ 3</u>

Δινονται τα σημεια $\mathrm{A}(\kappa,0)$, $\mathrm{B}(0,\lambda)$, $\Gamma(\kappa,\lambda)$ τετοια ώστε να ισχυει η ισοτητα:

$$2\det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A\Gamma}) + \kappa^2 + \lambda^2 = 0 \text{ με } \kappa,\lambda \neq 0.$$

Α. Να υπολογισετε τις συντεταγμενες των διανυσματων $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Gamma}$

(μοναδες 20)

Β. Να αποδειξετε ότι $\det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A\Gamma}) = -\kappa\lambda$

(μοναδες 10)

Β. Να αποδειξετε ότι το σημειο Γ ανηκει στη μεσοκαθετο του τμηματος AB

(μοναδες 10)

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:

Α. Είναι $\overrightarrow{AB} = (0-\kappa, \lambda-0) = (-\kappa,\lambda)$ **και** $\overrightarrow{A\Gamma} = (\kappa-\kappa, \lambda-0) = (0,\lambda)$

Β. Είναι $\det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A\Gamma}) = \begin{vmatrix} -\kappa & 0 \\ \lambda & \lambda \end{vmatrix} = -\kappa\lambda - 0\lambda = -\kappa\lambda$

Γ. Η δοσμενη ισοτητα για $\det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A\Gamma}) = -\kappa\lambda$ **γραφεται**

$-2\kappa\lambda + \kappa^2 + \lambda^2 = 0 \Rightarrow (\kappa-\lambda)^2 = 0 \Rightarrow \kappa = \lambda$ **οποτε είναι**
$\mathrm{A}(\kappa,0), \mathrm{B}(0,\kappa), \Gamma(\kappa,\kappa)$ **. Το σημειο** Γ **ανηκει στη μεσοκαθετο του** AB **αν δειχθει ότι** $d(\mathrm{A},\Gamma) = d(\mathrm{B},\Gamma)$.

α) τροπος : η ισοτητα ισχυει αν υπολογισουμε τις $d(\mathrm{A},\Gamma), d(\mathrm{B},\Gamma)$ **από τον τυπο υπολογισμου της αποστασης δυο σημειων. Δηλαδη**

$$d(\mathrm{A},\Gamma) = d(\mathrm{B},\Gamma) \Leftrightarrow \sqrt{(\kappa-\kappa)^2 + (\kappa-0)^2} = \sqrt{(\kappa-0)^2 + (\kappa-\kappa)^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\kappa^2} = \sqrt{\kappa^2} \Leftrightarrow |\kappa| = |\kappa|$$

με την τελευταια ισοτητα να ισχυει

β) τροπος: (ισως πιο ενδιαφερον)
Σε ορθοκανονικο συστημα συντεταγμενων τα σημεια
$\mathrm{O}(0,0)$ $\mathrm{A}(\kappa,0), \mathrm{B}(0,\kappa), \Gamma(\kappa,\kappa)$ **οριζουν τετραγωνο οπου βεβαια η διαγωνιος** $\mathrm{O}\Gamma$ **είναι μεσοκαθετος της αλλης διαγωνιου** AB **.**
(δοκιμαστε να σχεδιασετε το σχημα μονοι σας)

2ο ΓΕΝΙΚΟ ΛΥΚΕΙΟ ΚΟΡΙΝΘΟΥ **Σχολικό έτος 2012-2013**
Ά τετράμηνο

Τάξη Β΄ (ομάδα Β)

ΩΡΙΑΙΑ ΓΡΑΠΤΗ ΔΟΚΙΜΑΣΙΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΘΕΜΑ 1

Α. Να αποδειξετε ότι αν $\vec{\alpha} = (x,\psi)$ τοτε $|\vec{\alpha}| = \sqrt{x^2 + \psi^2}$

(μονάδες 10)

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Θεωρια από το σχολικο βιβλιο

Β. Να χαρακτηρίσετε σωστές ή λάθος τις παρακάτω προτάσεις:

1. Αν τα διανυσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ είναι διαδοχικα και σχηματιζουν τριγωνο τοτε $\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma} \neq \vec{0}$
2. Αν O το σημειο τομης των διαγωνιων του παραλληλογραμμου $\mathrm{AB\Gamma\Delta}$ τοτε $\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}} + \overrightarrow{\mathrm{O\Gamma}} + \overrightarrow{\mathrm{O\Delta}} = \vec{0}$
3. Αν $\vec{\alpha} = (-1,2)$ και $\vec{\beta} = (2,-1)$ τοτε $\vec{\alpha} // \vec{\beta}$
4. Αν $\mathrm{A}(\alpha,\alpha)$ και $\mathrm{B}(\beta,\beta)$ τοτε οι συντεταγμενες του μεσου του ευθυγραμμου τμηματος AB είναι ισες μεταξυ τους

(μονάδες 5 Χ 4 = 20)

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Λ , Σ , Λ , Σ

ΘΕΜΑ 2

Δινονται τα σημεια $\mathrm{P}, \mathrm{A}, \mathrm{B}, \Gamma$ του επιπεδου και το διανυσμα $\vec{x} = \overrightarrow{\mathrm{PA}} + 2\overrightarrow{\mathrm{P}B} - 3\overrightarrow{\mathrm{P\Gamma}}$

Α. Να αποδειξετε ότι το διανυσμα $\vec{x}$ είναι ανεξαρτητο του σημειου P .

(μοναδες 15)

Β. Να αποδειξετε την προταση: Αν $\vec{x} = \vec{0}$ τοτε τα σημεια $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \Gamma$ είναι συνευθειακα.

(μοναδες 15)

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:
Α. Είναι

$$\vec{x} = \overrightarrow{\mathrm{PA}} + \overrightarrow{2\mathrm{P}B} - 2\overrightarrow{\mathrm{P\Gamma}} - \overrightarrow{\mathrm{P\Gamma}} =$$
$$= \overrightarrow{\mathrm{PA}} - \overrightarrow{\mathrm{P\Gamma}} + \overrightarrow{2\mathrm{P}B} - \overrightarrow{2\mathrm{P\Gamma}} =$$
$$= 2(\overrightarrow{\mathrm{PB}} - \overrightarrow{\mathrm{P\Gamma}}) + \overrightarrow{\mathrm{PA}} - \overrightarrow{\mathrm{P\Gamma}} =$$
$$= 2\overrightarrow{\mathrm{\Gamma B}} - \overrightarrow{\mathrm{\Gamma A}}$$

οποτε το διανυσμα $\vec{x}$ εκφραζεται χωρις τη βοηθεια του σημειου P

Β. Είναι από το Α ερωτημα $\vec{x} = 2\overrightarrow{\Gamma B} - \overrightarrow{\Gamma A}$ **και επειδη** $\vec{x} = \vec{0}$ **εχουμε :**
$2\overrightarrow{\Gamma B} - \overrightarrow{\Gamma A} = \vec{0}$ **οποτε** $\overrightarrow{\Gamma A} = 2\overrightarrow{\Gamma B}$ **και επομενως** $\overrightarrow{\Gamma B} // \overrightarrow{\Gamma A}$ **με κοινο σημειο το** Γ**,**
που σημαινει ότι τα σημεια A, B, Γ **είναι συνευθειακα.**

ΘΕΜΑ 3

Δινονται τα σημεια $A(0,\kappa)$, $B(\lambda,0)$, $\Gamma(\lambda,\kappa)$ τετοια ώστε να ισχυει η ισοτητα:

$$-2\det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A\Gamma}) + \kappa^2 + \lambda^2 = 0 \text{ με } \kappa,\lambda \neq 0.$$

Α. Να υπολογισετε τις συντεταγμενες των διανυσματων $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Gamma}$

(μοναδες 20)

Β. Να αποδειξετε ότι $\det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A\Gamma}) = \kappa\lambda$

(μοναδες 10)

Β. Να αποδειξετε ότι το σημειο Γ ανηκει στη μεσοκαθετο του τμηματος AB

(μοναδες 10)

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:

Α. Είναι $\overrightarrow{AB} = (\lambda - 0, 0 - \kappa) = (\lambda, -\kappa)$ **και** $\overrightarrow{A\Gamma} = (\lambda - 0, \kappa - \kappa) = (\lambda, 0)$

Β. Είναι $\det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A\Gamma}) = \begin{vmatrix} \lambda & -\kappa \\ \lambda & 0 \end{vmatrix} = 0 - (-\kappa\lambda) = \kappa\lambda$

Γ. Η δοσμενη ισοτητα για $\det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A\Gamma}) = \kappa\lambda$ **γραφεται**

$-2\kappa\lambda + \kappa^2 + \lambda^2 = 0 \Rightarrow (\kappa - \lambda)^2 = 0 \Rightarrow \kappa = \lambda$ **οποτε είναι**
$A(0,\kappa)$, $B(\kappa,0)$, $\Gamma(\kappa,\kappa)$ **. Το σημειο** Γ **ανηκει στη μεσοκαθετο του** AB **αν δειχθει ότι** $d(A,\Gamma) = d(B,\Gamma)$**.**

α) τροπος : η ισοτητα ισχυει αν υπολογισουμε τις $d(A,\Gamma), d(B,\Gamma)$ **από τον τυπο υπολογισμου της αποστασης δυο σημειων. Δηλαδη**

$$d(A,\Gamma) = d(B,\Gamma) \Leftrightarrow \sqrt{(\kappa-0)^2 + (\kappa-\kappa)^2} = \sqrt{(\kappa-\kappa)^2 + (\kappa-0)^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\kappa^2} = \sqrt{\kappa^2} \Leftrightarrow |\kappa| = |\kappa|$$

με την τελευταια ισοτητα να ισχυει

β) τροπος: (ισως πιο ενδιαφερον)
Σε ορθοκανονικο συστημα συντεταγμενων τα σημεια
$O(0,0)$ $A(0,\kappa)$, $B(\kappa,0)$, $\Gamma(\kappa,\kappa)$ **οριζουν τετραγωνο οπου βεβαια η διαγωνιος** $O\Gamma$ **είναι μεσοκαθετος της αλλης διαγωνιου** BA **.**
(δοκιμαστε να σχεδιασετε το σχημα μονοι σας)