

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΜΑ 1°

A. Να αποδείξετε τη σχέση: $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = \vec{\alpha} \cdot \text{προβ}_{\vec{\alpha}} \vec{\beta}$ **(10 μονάδες)**

B. Ποια είναι η μέγιστη και ποια η ελάχιστη τιμή του εσωτερικού γινομένου δύο διανυσμάτων; **(9 μονάδες)**

Γ. Να χαρακτηρίσετε ως «Σωστό» ή «Λάθος» τις παρακάτω προτάσεις:

α. Ισχύει η ισοδυναμία: $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = \vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma} \Leftrightarrow \vec{\beta} = \vec{\gamma}$

β. Ισχύει ότι: $2\vec{i} \cdot 3\vec{j} = 0$

γ. Ισχύει πάντα η σχέση: $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = \vec{\beta} \cdot \vec{\alpha}$ **(6 μονάδες)**

ΘΕΜΑ 2°

Αν για τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ ισχύουν οι σχέσεις:

$\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 8$, $\text{προβ}_{\vec{\alpha}} \vec{\beta} = 2 \cdot \vec{\alpha}$ και $\text{προβ}_{\vec{\beta}} \vec{\alpha} = \frac{1}{2} \cdot \vec{\beta}$, τότε:

A. Να υπολογίσετε τα $|\vec{\alpha}|$ και $|\vec{\beta}|$ **(15 μονάδες)**

B. Να βρείτε τη γωνία των διανυσμάτων $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ και να δείξετε ότι $\vec{\beta} = 2 \cdot \vec{\alpha}$

(15 μονάδες)

Γ. Να βρείτε τον αριθμό χ ώστε να ισχύει: $\vec{a} \perp (\chi \cdot \vec{a} - 2\vec{\beta})$ **(15 μονάδες)**

ΘΕΜΑ 3°

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ με $|\vec{\alpha}| = 2, |\vec{\beta}| = 1$ και $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{2\pi}{3}$.

A. Να βρείτε σαν συνάρτηση των $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ το διάνυσμα $\vec{\chi}$ για το οποίο ισχύουν οι

σχέσεις: $\vec{\chi} \parallel (\vec{\alpha} - \vec{\beta})$ και $(\vec{\chi} - 3\vec{\beta}) \perp 2\vec{\alpha}$ **(10 μονάδες)**

B. Αν για ένα διάνυσμα $\vec{\nu}$ ισχύει $|\vec{\nu} - \vec{\alpha}| \cdot \vec{\nu} = 4\vec{\alpha}$, τότε

i) να δικαιολογήσετε ότι τα διανύσματα $\vec{\nu}$ και $\vec{\alpha}$ είναι ομόρροπα **(10 μονάδες)**

ii) να βρείτε το διάνυσμα $\vec{\nu}$ σαν συνάρτηση του διανύσματος $\vec{\alpha}$ **(10 μονάδες)**

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Β' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΜΑ 1°

- A. Να αποδείξετε τη σχέση: $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta} \Rightarrow \lambda_{\vec{\alpha}} \cdot \lambda_{\vec{\beta}} = -1$ **(10 μονάδες)**
- B. Πότε το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων παίρνει τη μέγιστη και πότε την ελάχιστη τιμή του και ποια είναι αυτή σε κάθε περίπτωση; **(9 μονάδες)**
- Γ. Να χαρακτηρίσετε ως «Σωστό» ή «Λάθος» τις παρακάτω προτάσεις:
- α. Ισχύει η ισοδυναμία: $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = \vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma} \Leftrightarrow \vec{\alpha} \perp \vec{\beta} - \vec{\gamma}$
- β. Ισχύει ότι: $-3\vec{i} \cdot 2\vec{j} = 0$
- γ. Για μοναδιαία διανύσματα ισχύει πάντα η σχέση: $|\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}| = |\vec{\beta}| \cdot |\vec{\alpha}|$ **(6 μονάδες)**

ΘΕΜΑ 2°

- Αν για τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ ισχύουν οι σχέσεις:
- $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = -12$, $\text{προβ}_{\vec{\alpha}} \vec{\beta} = -3 \cdot \vec{\alpha}$ και $\text{προβ}_{\vec{\beta}} \vec{\alpha} = -\frac{1}{3} \cdot \vec{\beta}$, τότε:
- A. Να υπολογίσετε τα $|\vec{\alpha}|$ και $|\vec{\beta}|$ **(15 μονάδες)**
- B. Να βρείτε τη γωνία των διανυσμάτων $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ και να δείξετε ότι $\vec{\beta} = -3 \cdot \vec{\alpha}$ **(15 μονάδες)**
- Γ. Να βρείτε τον αριθμό χ ώστε να ισχύει: $\vec{a} \perp (\chi \cdot \vec{a} + 3 \cdot \vec{\beta})$ **(15 μονάδες)**

ΘΕΜΑ 3°

- Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ με $|\vec{\alpha}| = 1$, $|\vec{\beta}| = 2$ και $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{\pi}{3}$.
- A. Να βρείτε σαν συνάρτηση των $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ το διάνυσμα $\vec{\chi}$ για το οποίο ισχύουν οι σχέσεις: $\vec{\chi} \perp (\vec{\alpha} + \vec{\beta})$ και $(\vec{\chi} - 2\vec{\beta}) \perp \vec{\alpha}$ **(10 μονάδες)**
- B. Αν για ένα διάνυσμα $\vec{\nu}$ ισχύει $|2\vec{\nu} - \vec{\alpha}| \cdot \vec{\nu} = 3\vec{\alpha}$, τότε
- i) να δικαιολογήσετε ότι τα διανύσματα $\vec{\nu}$ και $\vec{\alpha}$ είναι ομόρροπα **(10 μονάδες)**
- ii) να βρείτε το διάνυσμα $\vec{\nu}$ σαν συνάρτηση του διανύσματος $\vec{\alpha}$ **(10 μονάδες)**