Β Λυκείου

Θετικών Σπουδών

4ο ΓΛΧ

2015-2016

Μ. Παπαγρηγοράκης

Χανιά

Μαθηματικά

Θετικών Σπουδών

Ταξη: Β Γενικού Λυκείου
Μαθηματικά Θετικών Σπουδών
Έκδοση 15.07

Μίλτος Παπαγρηγοράκης
Μαθηματικός MEd
Χανιά 2015

Ιστοσελίδα: http://users.sch.gr/mipapagr

1 ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

Ορισμοί – Πράξεις

1.01 Σε ορθογώνιο $ΑΒΓΔ$ να σημειώσετε:

Α) Δύο ζεύγη ίσων διανυσμάτων.

Β) Δύο μη συγγραμμικά διανύσματα, τα οποία έχουν ίσα μέτρα.

Γ) Δύο ζεύγη αντίθετων διανυσμάτων.

1.02 Για τα σημεία $Α,Β,Γ,Δ$ να αποδείξετε ότι:

Α) $\overrightarrow{ΑΒ}+\overrightarrow{ΔΓ}=\overrightarrow{ΔΒ}-\overrightarrow{ΓΑ}$

Β) $\overrightarrow{ΑΔ}+\overrightarrow{ΒΓ}=\overrightarrow{ΑΓ}+\overrightarrow{ΒΔ}$

1.03 Έστω τα σημεία $Α,Β,Γ,Δ$ που ανά τρία δεν είναι συνευθειακά. Αν για κάθε σημείο $Ο$ ισχύει $\overrightarrow{ΟΑ}+\overrightarrow{ΟΓ}=\overrightarrow{ΟΒ}+\overrightarrow{ΟΔ}$ να αποδείξετε ότι το $ΑΒΓΔ$ είναι παραλληλόγραμμο.

1.04 Δίνεται τρίγωνο $ΑΒΓ$ και τα σημεία $Δ,Ε$ ώστε $\overrightarrow{ΑΔ}=\overrightarrow{ΒΓ}$ και $\overrightarrow{ΒΕ}=\overrightarrow{ΑΓ}$. Να αποδείξετε ότι τα σημεία $Γ,Δ,Ε$ είναι συνευθειακά.

1.05 Δίνεται τρίγωνο $ΑΒΓ$ και το μέσο $Μ$ της $ΑΓ$. Θεωρούμε τα διανύσματα $\overrightarrow{ΜΚ}=\overrightarrow{ΓΒ}$ και $\overrightarrow{ΜΛ}=\overrightarrow{ΒΑ}$. Να αποδείξετε ότι τα σημεία $Κ,Α,Λ$ είναι συνευθειακά

1.06 Δίνεται παραλληλόγραμμο $ΑΒΓΔ$ και τυχαίο σημείο $Ρ$. Να αποδειχθεί ότι

$\vec{ΡΑ}+\vec{ΡΓ}=\vec{ΡΒ}+\vec{ΡΔ}$

1.07 Τι συμπεραίνετε για τις διαγώνιες ενός τετραπλεύρου $ΑΒΓΔ$,στο οποίο ισχύει ότι:

$|\vec{ΟΑ}-\vec{ΟΓ}|=|\vec{ΟΒ}-\vec{ΟΔ}|$ για κάθε σημείο $Ο$;

1.08 Δίνεται τρίγωνο $ΑΒΓ$ και τυχαίο σημείο $Ρ$ της πλευράς $ΒΓ$. Αν $Μ$ είναι σημείο τέτοιο, ώστε: $\vec{ΡΜ}=\vec{ΑΡ}+\vec{ΡΒ}+\vec{ΡΓ}$, να αποδείξετε ότι το $ΑΒΜΓ$ είναι παραλληλόγραμμο.

1.09 Δίνεται τρίγωνο $ΑΒΓ$. Να βρείτε σημείο $Δ$ ώστε να ισχύει $\overrightarrow{ΑΔ}=\overrightarrow{ΑΒ}+\overrightarrow{ΑΓ}$ και να αποδείξετε ότι: $\overrightarrow{ΜΒ}+\overrightarrow{ΜΓ}=\overrightarrow{ΜΔ}+\overrightarrow{ΜΑ}$ για κάθε σημείο $Μ$.

1.10 Δίνονται τα σημεία $Α,Β,Γ,Δ$ του χώρου, για τα οποία ισχύει ότι: $\overrightarrow{ΑΓ}+\overrightarrow{ΔΕ}=\overrightarrow{ΔΓ}+\overrightarrow{ΒΕ}$ Να αποδείξετε ότι τα σημεία $Α$ και $Β$ ταυτίζονται.

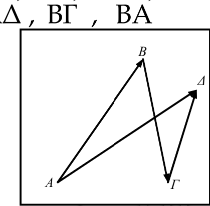
1.11 Εξωτερικά ενός τριγώνου $ΑΒΓ$ κατασκευάζουμε παραλληλόγραμμα $ΑΒΔΕ$, $ΑΛΚΓ$, $ΒΓΝΜ$. Να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{ΕΛ}+\overrightarrow{ΚΝ}+\overrightarrow{ΜΔ}=\vec{0}$

1.12 Στο παρακάτω σχήμα να γράψετε

Α) το $\overrightarrow{ΑΒ}$ συναρτήσει των $\overrightarrow{ΑΔ}$, $\overrightarrow{ΒΓ}$, $\overrightarrow{ΓΔ}$

Β) το $\overrightarrow{ΓΒ}$ συναρτήσει των $\overrightarrow{ΑΔ}$, $\overrightarrow{ΑΒ}$, $\overrightarrow{ΓΔ}$

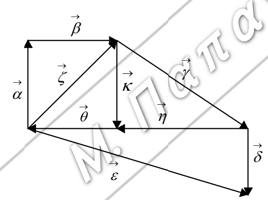
Γ) το $\overrightarrow{ΓΔ}$ συναρτήσει των $\overrightarrow{ΑΔ}$, $\overrightarrow{ΒΓ}$, $\overrightarrow{ΒΑ}$



1.13 Στο παρακάτω σχήμα να γράψετε:

Α) το $\vec{γ}$ συναρτήσει των $\vec{ε},\vec{δ},\vec{ζ}$

Β) το $\vec{θ}$ με συναρτήσει των $\vec{γ},\vec{δ},\vec{ε},\vec{κ}$



Γινόμενο αριθμού με διάνυσμα

1.14 Έστω Κ, Λ τα μέσα των πλευρών ΑΒ, ΓΔ τετραπλεύρου ΑΒΓΔ, να αποδείξετε ότι $\vec{A\Gamma}+\vec{B\Delta}=2\vec{K\Lambda}$

1.15 Αν Μ, Ν είναι τα μέσα των διαγωνίων ΑΓ και ΒΔ ενός τετράπλευρου ΑΒΓΔ να αποδείξετε ότι: $\vec{AB}+\vec{\Gamma\Delta}=2\vec{MN}$

1.16 Έστω Ο, Α, Β, Γ, Δ σημεία τέτοια ώστε $\vec{OA}=\vec{\alpha}$, $\vec{OB}=\vec{\beta}$, $\vec{O\Gamma}=\vec{\alpha}+2\vec{\beta}$ και $\vec{O\Delta}=2\vec{\alpha}-\vec{\beta}$. Να εκφράσετε συναρτήσει των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.τα διανύσματα $\vec{AB}$, $\vec{B\Gamma}$, $\vec{\Gamma\Delta}$, $\vec{A\Gamma}$, $\vec{B\Delta}$

1.17 Σε ένα παραλληλόγραμμο ΟΑΒΓ είναι $\vec{OA}=\vec{\alpha}$ και $\vec{O\Gamma}=\vec{\gamma}$. Ένα σημείο Δ βρίσκεται στην πλευρά ΑΒ, έτσι ώστε $\Delta B=2A\Delta$. Να εκφράσετε τα $\vec{\Gamma B}$, $\vec{B\Gamma}$, $\vec{AB}$, $\vec{A\Delta}$, $\vec{O\Delta}$, $\vec{\Delta\Gamma}$ συναρτήσει των $\vec{\alpha}$, $\vec{\gamma}$.

1.18 Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και ένα σημείο Δ ώστε $\vec{A\Delta}=x\vec{AB}+y\vec{A\Gamma}$, με $x+y=1$. Να δείξετε ότι το Δ είναι σημείο της ευθείας ΒΓ.

1.19 Έστω παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και τα σημεία Ε, Ζ της ΑΓ ώστε $4AE=4Z\Gamma=A\Gamma$. Αν $\vec{AB}=\vec{\alpha}$, $\vec{B\Gamma}=\vec{\beta}$ δείξτε ότι το ΕΒΖΔ είναι παρ/μο

1.20 Αν $2\vec{A\Lambda}+3\vec{B\Lambda}+2\vec{MB}=\vec{AK}+\vec{AM}+\vec{BK}$, να αποδείξετε ότι $\vec{K\Lambda}\nearrow\swarrow\vec{M\Lambda}$.

1.21 Αν για τα σημεία Ο, Α, Β, Γ ισχύει $3\vec{OA}+4\vec{OB}=7\vec{O\Gamma}$. Να δείξετε ότι τα Α, Β, Γ είναι συνευθειακά και ότι το Γ βρίσκεται μεταξύ των Α και Β

1.22 Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Να προσδιοριστεί σημείο Ρ ώστε να ισχύει: $\vec{AP}+3\vec{BP}=\vec{\Gamma P}$

1.23 Αν για τα σημεία Α, Β, Γ, Δ, Ε ισχύει ότι $3\vec{EB}+5\vec{AB}+7\vec{EA}+2\vec{A\Delta}-10\vec{E\Gamma}=\vec{0}$, να αποδείξετε ότι τα σημεία Β, Γ, Δ είναι συνευθειακά.

1.24 Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και τα σημεία Δ, Ε, Ζ ώστε: $3\vec{A\Delta}=\vec{AB}$, $2\vec{\Gamma E}=\vec{B\Gamma}$ και $5\vec{AZ}=3\vec{A\Gamma}$. Να αποδείξετε ότι τα Δ, Ε, Ζ είναι συνευθειακά.

1.25 Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ με $\vec{\alpha}\nparallel\vec{\beta}$ και τα σημεία Α, Β, Γ, Ο. Αν $\vec{OA}=2\vec{\alpha}+3\vec{\beta}$, $\vec{OB}=5\vec{\alpha}+\vec{\beta}$, $\vec{O\Gamma}=11\vec{\alpha}-3\vec{\beta}$, να αποδείξετε ότι τα Α, Β, Γ είναι συνευθειακά και ότι $B\Gamma=2AB$.

1.26 Δίνονται τα σημεία Α, Β, Γ με διανύσματα θέσης ,ως προς σημείο αναφοράς το Ο, τα $\vec{OA}=\vec{\alpha}$, $\vec{OB}=\vec{\beta}$, $\vec{O\Gamma}=3\vec{\alpha}-2\vec{\beta}$ όπου $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ μη συγγραμικά. Να δείξετε ότι τα Α, Β, Γ είναι συνευθειακά .

1.27 Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και τα σημεία Δ, Ε, Ζ ώστε: $3\vec{A\Delta}=\vec{AB}$, $2\vec{\Gamma E}=\vec{B\Gamma}$ και $5\vec{AZ}=3\vec{A\Gamma}$. Να αποδείξετε ότι τα Δ, Ε, Ζ είναι συνευθειακά

1.28 Αν Ο, Ο′ είναι τα κέντρα δύο παραλληλογράμων ΑΒΓΔ και Α′Β′Γ′Δ′ να αποδείξετε ότι $AA'+BB'+\Gamma\Gamma'+\Delta\Delta'=4OO'$

1.29 Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και τα μέσα Ε και Ζ των πλευρών του ΒΓ και ΓΔ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι $2\vec{AE}+2\vec{AZ}=3\vec{A\Gamma}$

1.30 Αν τα τμήματα ΑΔ, ΒΕ και ΓΖ έχουν κοινό μέσον να αποδείξετε ότι $\vec{AB}+\vec{A\Gamma}+\vec{AE}+\vec{AZ}=2\vec{A\Delta}$

1.31 Τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ δεν είναι συγγραμικά και ισχύει ότι $\kappa\vec{\alpha}+\lambda\vec{\beta}=0$. Να δείξετε ότι $\kappa=\lambda=0$

1.32 Αν E και Z είναι τα μέσα των πλευρών AB, $\Gamma\Delta$ αντίστοιχα, τετραπλεύρου $AB\Gamma\Delta$ και K είναι το μέσον του EZ, να αποδείξετε ότι

Α) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A\Gamma}+\overrightarrow{A\Delta}=4\overrightarrow{AK}$

Β) $\overrightarrow{A\Gamma}+\overrightarrow{B\Delta}=2\overrightarrow{EZ}$

Γ) $\overrightarrow{A\Delta}+\overrightarrow{B\Gamma}=2\overrightarrow{EZ}$

1.33 Αν AB και $\Gamma\Delta$ είναι χορδές ενός κύκλου κέντρου O που είναι κάθετες μεταξύ τους και Σ το σημείο τομής τους να αποδείξετε ότι:

$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{O\Delta}=2\overrightarrow{O\Sigma}$

1.34 Δίνεται ευθύγραμμο τμήμα AB και ένα εσωτερικό του σημείο Δ τέτοιο ώστε $A\Delta=\frac{2}{5}\Delta B$.

Αν τα διανύσματα θέσης των A και B είναι $\overrightarrow{OA}=\vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{OB}=\vec{\beta}$, να δείξετε ότι $\overrightarrow{A\Delta}=\frac{2}{7}(\vec{\beta}-\vec{\alpha})$

και $\overrightarrow{O\Delta}=\dfrac{5\vec{\alpha}+2\vec{\beta}}{7}$

1.35 Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και σημείο M ώστε να ισχύει $\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{A\Gamma}$ και $\overrightarrow{BM}=\lambda\overrightarrow{A\Gamma}+\mu\overrightarrow{BA}$ με $\lambda,\mu\in R^*$. Να αποδείξετε ότι $\lambda=\mu=\frac{1}{2}$.

1.36 Δίνεται τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ και ένα μεταβλητό σημείο M. Να αποδείξετε ότι το διάνυσμα $\vec{\alpha}=\overrightarrow{MA}+4\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{M\Gamma}-3\overrightarrow{M\Delta}$ είναι σταθερό

1.37 Αν τα τμήματα $A\Delta$, BE και ΓZ έχουν κοινό μέσον να αποδείξετε ότι

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A\Gamma}+\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AZ}=2\overrightarrow{A\Delta}$

1.38 Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων M του επιπέδου ώστε να ισχύει:

Α) $|\overrightarrow{MA}|=|\overrightarrow{B\Gamma}|$ Β) $|\overrightarrow{MA}|=|\overrightarrow{MB}|$

Γ) $|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}|=|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{M\Gamma}|$

1.39 Α) Τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ δεν είναι συγγραμμικά και ισχύει $\kappa\vec{\alpha}+\lambda\vec{\beta}=0$. Να δείξετε ότι $\kappa=\lambda=0$

Β) Να βρείτε μη μηδενικούς πραγματικούς αριθμούς κ,λ,μ έτσι ώστε να ισχύει

$\kappa\vec{\alpha}+\lambda(\vec{\alpha}-\vec{\beta})+\mu(\vec{\alpha}+\vec{\beta})=\vec{0}$ για κάθε ζεύγος διανυσμάτων $\vec{\alpha},\vec{\beta}$.

1.40 Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$, η διάμεσος AM και σημείο Δ στην πλευρά $A\Gamma$ ώστε: $\Gamma\Delta=2\Delta A$. Οι $B\Delta$, AM τέμνονται στο Ε. Να αποδείξετε ότι το Ε είναι μέσο της AM και $BE=3E\Delta$.

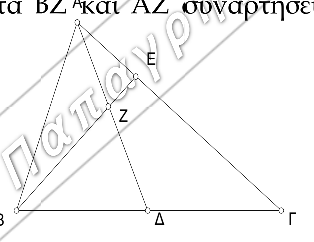
1.41 Έστω παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$. Αν E είναι σημείο της AB ώστε $3\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}$ και Σ το σημείο τομής των $A\Gamma$, ΔE να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{A\Gamma}=4\overrightarrow{A\Sigma}$.

1.42 Δίνεται τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$. Να βρεθεί σημείο M, ώστε: $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{M\Gamma}+\overrightarrow{M\Delta}=\vec{0}$

1.43 Έστω τρίγωνο OAB. Θεωρούμε σημεία Δ,E ώστε $\overrightarrow{O\Delta}=\frac{1}{3}\overrightarrow{\Delta A}$ και $\overrightarrow{OE}=\frac{2}{3}\overrightarrow{OB}$. Αν P είναι το σημείο τομής των ευθειών AE και $B\Delta$, να εκφράσετε το διάνυσμα OP συναρτήσει των διανυσμάτων $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$

1.44 Στο διπλανό τρίγωνο είναι το Δ μέσον του $B\Gamma$ και $3AE=E\Gamma$

Αν είναι $\overrightarrow{AB}=\vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{A\Gamma}=\vec{\beta}$, να εκφράσετε τα διανύσματα $\overrightarrow{BZ}$ και $\overrightarrow{AZ}$ συναρτήσει των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.



Συντεταγμένες διανύσματος

1.45 Δίνεται το σημείο $A\left(\lambda^2-4\lambda+3,\lambda^2-\lambda-6\right)$, $\lambda\in R$. Να βρείτε τις τιμές του λ, ώστε:

Α) Το A να είναι σημείο του άξονα $x'x$.

Β) Το A να είναι σημείο μόνο του άξονα $y'y$.

1.46 Έστω το σημείο $A(-2,3)$. Να βρείτε το σημείο

Α) B όταν τα A,B είναι συμμετρικά ως προς $K(0,1)$

Β) B όταν τα A,B είναι αντιδιαμετρικά σημεία κύκλου με κέντρο το $K(-1,0)$

1.47 Να βρείτε τα $\kappa,\lambda\in R$ ώστε τα σημεία $A(-\kappa+1,2)$ $B(-\lambda+2,\lambda)$ να είναι συμμετρικά ως προς

Α) το $O(0,0)$

Β) τον άξονα $x'x$

Γ) την ευθεία $y=x$

1.48 Αν τα σημεία $A(-3,5)$, $B(1,7)$ είναι οι διαδοχικές κορυφές παραλληλογράμμου και $M(1,1)$ το σημείο τομής των διαγωνίων του, να βρείτε τις άλλες κορυφές του.

1.49 Έστω σημείο $A(-1,2)$. Να βρείτε:

Α) Το διάνυσμα $\vec{AB}$ όταν $B(-3,0)$

Β) Το Γ όταν $\vec{A\Gamma}=(-3,-5)$

Γ) Το Δ όταν $2\vec{A\Delta}=3\vec{\Delta E}$ και $E(3,-1)$

1.50 Να βρείτε τα $x,y\in R$, ώστε τα διανύσματα $\vec{\alpha}=\left(x^3+y^3,x+y\right)$ και $\vec{\beta}=(-7,-1)$ να είναι αντίθετα.

1.51 Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(-2,4)$ και $\vec{\beta}=(3,-2)$. Να βρεθεί διάνυσμα $\vec{u}=(x,y)$ ώστε να είναι:

Α) $\vec{u}=\vec{\alpha}+\vec{\beta}$ Β) $\vec{u}+\vec{\alpha}=\vec{\beta}$

Γ) $\vec{u}=\kappa\vec{\alpha}$, $\kappa\in R$ Δ) $\vec{u}=\kappa\vec{\alpha}+\lambda\vec{\beta}$, $\kappa,\lambda\in R$

1.52 Να βρείτε τις τιμές του $x\in R$ ώστε τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(x,1)$ και $\vec{\beta}=(9,x)$ να είναι αντίρροπα.

1.53 Οι τετμημένες των σημείων A και B είναι ρίζες της εξίσωσης: $x^2-(\lambda^2-3\lambda+2)x-199=0$. Να βρείτε τις τιμές του $\lambda\in R$, ώστε το μέσο του ευθυγράμμου τμήματος AB να έχει τετμημένη ίση με 3.

1.54 Δίνονται τα σημεία $A(2,9)$, $B(3,4)$ $\Gamma(5,7)$ και το διάνυσμα $\vec{x}=(\kappa-2,\lambda-5)$.

Α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\vec{AB}$, $\vec{B\Gamma}$ και $\vec{A\Gamma}$.

Β) Να βρείτε τις τιμές των πραγματικών κ,λ για τις οποίες ισχύει: $\vec{x}=\vec{B\Gamma}-2\vec{AB}$

Γ) Να υπολογίσετε το μέτρο του $\vec{B\Gamma}-2\vec{AB}$

Δ) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο στο Γ.

1.55 Να υπολογίσετε τη γωνία που σχηματίζει καθένα από τα διανύσματα $\vec{\alpha}=\left(\sqrt{2},-\sqrt{2}\right)$, $\vec{\beta}=(0,-1)$, $\vec{\gamma}=(-2,0)$, $\vec{\delta}=\left(-1,-\sqrt{3}\right)$ με τον άξονα $x'x$

1.56 Να χωρίσετε το ευθύγραμμο τμήμα με άκρα τα σημεία Α(-1,2) και Β(3,5) σε τρία ίσα μέρη

1.57 Αν $\vec{\alpha}=\left(x^2-5x+6,x^2-9\right)$, να βρείτε τις τιμές του $x\in R$, έτσι ώστε

Α) $\vec{\alpha}=\vec{0}$ Β) $\vec{\alpha}//x'x$ και $\vec{\alpha}\neq\vec{0}$

1.58 Έστω τα σημεία $A(3,2)$, $B(5,-4)$. Να βρείτε:

Α) σημείο M της ευθείας $y=x+1$ ώστε το τρίγωνο MAB να είναι ισοσκελές $MA=MB$

Β) σημείο N του $x'x$, ώστε το τρίγωνο NAB να είναι ορθογώνιο στο N

1.59 Για κάθε $\alpha,\beta\in R$, να εξετάσετε αν τα σημεία $M_1(\alpha+\beta,\alpha-\beta)$, $M_2(\alpha-\beta,\alpha+\beta)$ και $M_3(\alpha+2\beta,\alpha-2\beta)$ είναι συνευθειακά

1.60 Να βρείτε τις τιμές του μ∈R, ώστε τα σημεία $A(1,0)$, $B\left(-\mu^2,3\right)$, $B(-5\mu,9)$ να είναι συνευθειακά

1.61 Να βρείτε για ποιες τιμές του φ , τα σημεία Α(κσυνφ,λημφ), Β (κημφ - λσυνφ) και Γ (κ, λ),με κ,λ∈R* και 0<φ<π, είναι συνευθειακά.

1.62 Να γραφεί το διάνυσμα $\vec{u}=(-2,6)$ ως γραμμικός συνδυασμός των $\vec{v}=(2,-1)$ και $\vec{w}=(3,1)$

1.63 Να βρείτε το μοναδιαίο διάνυσμα το οποίο είναι ομόρροπο με το $\vec{\alpha}=2\vec{i}-\vec{j}$.

1.64 Να βρείτε διάνυσμα $\vec{\beta}$ αντίρροπο του $\vec{\alpha}=(-6,8)$ με μέτρο τριπλάσιο του $|\vec{\alpha}|$.

1.65 Να βρείτε τα $\alpha,\beta\in R$ αν ισχύει ότι $(\alpha-3)\vec{i}-\beta\vec{j}\parallel y'y$ και $(\alpha+1)\vec{i}+2\beta\vec{j}\parallel\vec{i}+\vec{j}$

1.66 Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{\alpha}$ αν ισχύει ότι $\vec{\alpha}=\left(|\vec{\alpha}|-4,8\right)$

1.67 Να βρείτε τις τιμές του μ∈R, ώστε τα σημεία $A(1,0)$, $B\left(-\mu^2,3\right)$, $\Gamma(-5\mu,9)$ να είναι συνευθειακά.

1.68 Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{v}$ αν είναι γνωστό ότι σχηματίζει μη κυρτή γωνία με τον ημιάξονα Ox, έχει $|\vec{v}|=10$ και είναι παράλληλο προς το διάνυσμα $\vec{u}=(3,-4)$

1.69 Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(x+1,2)$ και $\vec{\beta}=(x,2x+1)$ με $x\in R$

Α) Να αποδείξετε ότι τα διανύσματα δεν είναι συγγραμμικά για κάθε $x\in R$

Β) Αν $x=-3$ να βρείτε τη γωνία που σχηματίζει το $\vec{\alpha}$ με τον άξονα $x'x$

Γ) Αν $x=-1$, να γράψετε το διάνυσμα $\vec{\gamma}=3\vec{i}$ ως γραμμικό συνδυασμό των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$

Δ) Αν $x=-2$, να βρείτε διάνυσμα αντίρροπο του $\vec{\alpha}$ που να έχει μέτρο $\sqrt{10}$.

1.70 Έστω $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, μη μηδενικά διανύσματα. Δείξτε ότι το διάνυσμα $\dfrac{\vec{\alpha}}{|\vec{\alpha}|}+\dfrac{\vec{\beta}}{|\vec{\beta}|}$ είναι παράλληλο στη διχοτόμο της γωνίας των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$

1.71 Θεωρούμε τα σημεία $A(3,4)$, $B(5,3)$, $\Gamma(-1,-1)$ και $\Delta\left(-\dfrac{13}{3},-\dfrac{1}{2}\right)$. Να αποδείξετε ότι το μέσον του τμήματος $A\Gamma$ είναι σημείο της ευθείας $B\Delta$

ΕΣΩΤΕΡΙΚΟ ΓΙΝΟΜΕΝΟ

1.72 Αν $x^2+y^2=36$, να βρείτε την ελάχιστη και τη μέγιστη τιμή του $6x-8y$

1.73 Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ όπου: $(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})=\frac{\pi}{6}$, $|\vec{\alpha}|=\sqrt{2}$ και $|\vec{\beta}|=2\sqrt{2}$ να βρεθούν τα $(\vec{\alpha}+\vec{\beta})^2$ και $(2\vec{\alpha}+3\vec{\beta})(\vec{\alpha}-\vec{\beta})$

1.74 Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ με $|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|=|\vec{\alpha}-\vec{\beta}|$. Να αποδείξετε ότι: $\vec{\alpha}\perp\vec{\beta}$

1.75 Έστω τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ με $|\vec{\alpha}|=\sqrt{3}$ και $|\vec{\beta}|=1$ και $(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})=\frac{\pi}{6}$. Να βρείτε το $|\vec{\alpha}-\vec{\beta}|$

1.76 Αν $|\vec{\alpha}|=1$, $|\vec{\beta}|=2$, $(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})=\frac{\pi}{3}$, $\vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{\gamma}=\vec{0}$, να βρείτε το $|\vec{\gamma}|$ και το $\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma}+\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma}$

1.77 Αν τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ έχουν ίσα μέτρα και είναι κάθετα να αποδείξετε ότι και τα $2\vec{\alpha}+\vec{\beta}$, $\vec{\alpha}-2\vec{\beta}$ είναι κάθετα και έχουν ίσα μέτρα.

1.78 Έστω τα μη μηδενικά διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ με $|\vec{\beta}|=2|\vec{\alpha}|$ και $\vec{\alpha}\perp(\vec{\alpha}-\vec{\beta})$. Δείξτε ότι ότι $(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})=\frac{\pi}{3}$

1.79 Αν $\vec{\alpha}\perp\vec{\beta}$, $(\vec{\alpha}+\vec{\beta})\perp(\vec{\alpha}-3\vec{\beta})$ και $|\vec{\alpha}-\vec{\beta}|=2$, να δείξετε ότι $|\vec{\alpha}|=\sqrt{3}$ και $|\vec{\beta}|=1$

1.80 Αν $\vec{\alpha}=(\sqrt{3}(x-1),2x)$, $\vec{\beta}=(-\sqrt{3},1)$ και $(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})=\pi/3$, να βρείτε το x

1.81 Έστω τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ με $(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})=\frac{2\pi}{3}$, $2|\vec{\alpha}|=|\vec{\beta}|=2\sqrt{5}$. Να βρείτε τη γωνία των διανυσμάτων $2\vec{\alpha}+\vec{\beta}$ και $\vec{\alpha}$

1.82 Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ με $|\vec{\alpha}|=|\vec{\beta}|=1$, $(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})=\pi/3$. Να βρείτε το $\vec{x}$ αν $\vec{x}//(\vec{\alpha}+\vec{\beta})$ και $\vec{\beta}\perp(\vec{\alpha}+\vec{x})$

1.83 Έστω τα διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}$ με $|\vec{\alpha}|=1$, $|\vec{\beta}|=2$, $|\vec{\gamma}|=3$ και $\vec{\alpha}-2\vec{\beta}+\vec{\gamma}=0$. Να αποδείξετε ότι $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma}-3\vec{\gamma}\cdot\vec{\alpha}=-1$

1.84 Αποδείξτε ότι το διάνυσμα $\vec{\beta}$ είναι κάθετο στο διάνυσμα $\frac{\vec{\beta}\cdot\vec{x}}{\vec{\beta}^2}\cdot\vec{\beta}-\vec{x}$ για κάθε διάνυσμα $\vec{x}$.

1.85 Αν $\vec{\alpha}=(-3,4)$, $\vec{\beta}=(2,-5)$. Να βρείτε διάνυσμα $\vec{x}$ ώστε $\vec{x}\cdot\vec{\alpha}=5$ και $\vec{x}\cdot\vec{\beta}=-8$.

1.86 Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$. Αν $|\vec{\alpha}|=1$, $|\vec{\beta}|=2$, $|\vec{\gamma}|=5$, $2\vec{\alpha}+3\vec{\beta}-\vec{\gamma}=\vec{0}$ να βρείτε το $|\vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{\gamma}|$.

1.87 Έστω τα μοναδιαία διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$. Αν τα διανύσματα $\vec{\gamma}=2\vec{\alpha}+4\vec{\beta}$, $\vec{\delta}=\vec{\alpha}-\vec{\beta}$ σχηματίζουν γωνία $2\pi/3$ να βρείτε την γωνία των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$

1.88 Αναλύσετε το διάνυσμα $\vec{\beta}=(-9,19)$ σε δύο κάθετες μεταξύ τους συνιστώσες, από τις οποίες η μια έχει τη διεύθυνση του $\vec{\alpha}=(5,-3)$.

1.89 Αν $\vec{\alpha}=(2,3)$ και $\vec{\beta}=(-1,4)$, να βρείτε την προβολή του $\vec{\alpha}-\vec{\beta}$ στο $\vec{\alpha}+\vec{\beta}$.

1.90 Έστω τα σημεία $A(-3,5)$, $B(4,-2)$:

Α) Να βρείτε το σημείο Μ του άξονα yy' που ισαπέχει από τα Α και Β

Β) Να αναλύσετε το διάνυσμα $\overrightarrow{AM}$ σε δύο κάθετες μεταξύ τους συνιστώσες, μια από τις οποίες έχει τη διεύθυνση του $\overrightarrow{MB}$

1.91 Έστω $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ μη μηδενικά διανύσματα. Αν $\text{προβ}_{\vec{\beta}}\vec{\alpha}=4\vec{\beta}$ και $4\,\text{προβ}_{\vec{\alpha}}\vec{\beta}=\vec{\alpha}$ να δείξετε ότι

$$\vec{\alpha}\vec{\beta}=\left(2\vec{\beta}\right)^2 \quad \text{και} \quad \left|\vec{\alpha}\right|=4\left|\vec{\beta}\right|$$

1.92 Αν $\vec{\alpha}=(1,2)$ και $\vec{\beta}=(3,4)$ να βρεθούν τα διανύσματα $\vec{p}$ και $\vec{q}$ ώστε να ισχύουν: $\vec{\alpha}=\vec{p}+\vec{q}$ και $\vec{p}//\vec{\beta}$ και $\vec{q}\perp\vec{\beta}$

1.93 Να βρεθεί διάνυσμα $\vec{\delta}$ με $\left|\vec{\delta}\right|=\sqrt{40}$ που έχει αναλυθεί σε δύο κάθετες συνιστώσες, από τις οποίες η μία είναι η $(4,2)$

1.94 Αν $1+\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}\neq 0$, να λύσετε ως προς $\vec{x}$ την εξίσωση: $\vec{x}+(\vec{x}\cdot\vec{\alpha})\cdot\vec{\beta}=\vec{\gamma}$

1.95 Σε πλαγιογώνιο σύστημα αξόνων τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(1,2)$, $\vec{\beta}=(3,0)$ είναι κάθετα. Να βρείτε την γωνία των μοναδιαίων διανυσμάτων των αξόνων.

1.96 Αν για τα διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}$ ισχύει: $\vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{\gamma}=\vec{0}$ και $6\left|\vec{\alpha}\right|=3\left|\vec{\beta}\right|=2\left|\vec{\gamma}\right|$ να δειχτεί ότι $\vec{\beta}$ είναι ομόρροπο του $\vec{\alpha}$ και αντίρροπο του του $\vec{\gamma}$

1.97 Αν ισχύει $\left|\vec{\alpha}\right|=\left|\vec{\beta}\right|=\frac{1}{2}\cdot\left|\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right|$, να δείξετε ότι $\vec{\alpha}=\vec{\beta}$

1.98 Αν $\left|\vec{\alpha}\right|=\left|\vec{\beta}\right|=\left|\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right|$, να αποδείξετε ότι $\left|\vec{\alpha}-\vec{\beta}\right|=\left|\vec{\alpha}\right|\sqrt{3}$.

1.99 Αν $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ μη συγγραμικά διανύσματα, να δείξετε ότι είναι αδύνατη η εξίσωση

$$\left(1+\left(\vec{\alpha}\right)^2\right)x^2-2\left|\vec{\alpha}-\vec{\beta}\right|x+\left(1+\left(\vec{\beta}\right)^2\right)=0$$

1.100 Έστω ΑΔ διάμεσος του τριγώνου ΑΒΓ. Αν ισχύει $(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Gamma})\overrightarrow{A\Gamma}=(\overrightarrow{A\Delta}\cdot\overrightarrow{B\Gamma})\overrightarrow{AB}$ να αποδείξετε ότι το ΑΒΓ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές με κορυφή το Α.

1.101 Να δείξετε ότι για κάθε $\nu\in\mathbb{N}^*$ ισχύει

$$\frac{1}{\vec{\alpha}\cdot\text{προβ}_{\vec{\alpha}}\vec{\beta}}+\frac{1}{\vec{\alpha}\cdot\text{προβ}_{2\vec{\alpha}}\vec{\beta}}+\ldots+\frac{1}{\vec{\alpha}\cdot\text{προβ}_{\nu\vec{\alpha}}\vec{\beta}}=\frac{\nu}{\vec{\alpha}\vec{\beta}}$$

1.102 Αν τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ σχηματίζουν οξεία γωνία, δείξτε ότι $\left|\vec{\alpha}\right|\left|\vec{\beta}\right|\eta\mu\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)=\left|\det\left(\vec{\alpha},\vec{\beta}\right)\right|$

1.103 Δίνεται το διάνυσμα $\vec{\alpha}\neq\vec{0}$. Να λύσετε την εξίσωση $\left|\vec{x}-\vec{\alpha}\right|\cdot\vec{x}=\left|\vec{x}+8\vec{\alpha}\right|\cdot\vec{\alpha}$

1.104 Αν ισχύει $\left|\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right|+\left|\vec{\alpha}-\vec{\beta}\right|=2$ να δείξετε ότι $\left|\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right|-\left|\vec{\alpha}-\vec{\beta}\right|=2\vec{\alpha}\vec{\beta}$

1.105 Αν $\vec{\alpha}=\left(\sqrt{3},1-\vec{\alpha}\vec{\beta}\right)$ και $\vec{\beta}=\left(\sqrt{3},\dfrac{|\vec{\beta}|}{2}\right)$

Α) Να βρείτε τη γωνία των $\vec{\alpha},\vec{\beta}$.

Β) Να βρείτε την προβολή του διανύσματος $\vec{\beta}$ στο διάνυσμα $\vec{\alpha}$

1.106 Για τις διανυσματικές ακτίνες $\overrightarrow{OA}=\vec{\alpha}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{\beta}$ και $\overrightarrow{O\Gamma}=\vec{\gamma}$ των σημείων Α, Β και Γ ισχύει ότι: $|\vec{\alpha}|=|\vec{\beta}|=3$, $|\vec{\gamma}|=\sqrt{7}$ και $\vec{\alpha}+2\vec{\beta}-3\vec{\gamma}=\vec{0}$

Α) Δείξτε ότι τα Α, Β, Γ είναι συνευθειακά

Β) Να υπολογίσετε τα $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$, $\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma}$, $\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma}$ καθώς και την γωνία των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$

Γ) Αν για το διάνυσμα $\vec{x}$ ισχύουν οι : $\vec{x}\,//(\vec{\beta}-\vec{\gamma})$ και $(\vec{x}+\vec{\alpha})\perp(\vec{\beta}+\vec{\gamma})$ να δείξετε ότι $\vec{x}=-\dfrac{21}{4}(\vec{\beta}-\vec{\gamma})$ και να βρείτε το $|\vec{x}|$

1.107 Έστω $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ δύο μη συγγραμμικά διανύσματα. Αν ισχύει ότι $\left(\vec{\alpha}\vec{\beta}-|\vec{\alpha}|\right)\vec{\alpha}=\left(2-|\vec{\beta}|\right)\vec{\beta}$ να υπολογίσετε την γωνία των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ και να αποδείξετε ότι η $\text{προβ}_{\vec{\alpha}}\vec{\beta}$ είναι μοναδιαίο διάνυσμα ομόρροπο του $\vec{\alpha}$.

1.108 Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}$ με $|\vec{\alpha}|=|\vec{\beta}|=|\vec{\gamma}|=1$ και $\vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{\gamma}=\vec{0}$

Α. Να αποδείξετε ότι:

α. $|\vec{\alpha}-\vec{\beta}|=|\vec{\beta}-\vec{\gamma}|=|\vec{\gamma}-\vec{\alpha}|$

β. $|\vec{\alpha}-\vec{\beta}|^2\le 4$ και $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}\ge -1$

Β. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων Α, Β, Γ για τα οποία ισχύει ότι $\overrightarrow{OA}=\vec{\alpha}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{\beta}$, $\overrightarrow{O\Gamma}=\vec{\gamma}$, καθώς και το είδος του τριγώνου ΑΒΓ

1.109 Για τα διανύσματα $\vec{\alpha}=\overrightarrow{KA}$, $\vec{\beta}=\overrightarrow{KB}$, $\vec{\gamma}=\overrightarrow{K\Gamma}$ όπου τα Α, Β, Γ είναι σημεία του κύκλου με κέντρο Κ και ακτίνα 1 ισχύει ότι $\vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{\gamma}=\vec{0}$. Έστω ότι Ε είναι το αντιδιαμετρικό σημείο του Β. Να δείξετε ότι:

Α) $|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|=1$ Β) $\overrightarrow{EA}=\vec{\alpha}+\vec{\beta}$

Γ) $|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{3}$ Δ) Το ΑΒΓ είναι ισόπλευρο.

1.110 Έστω Ο ένα σημείο αναφοράς και $\vec{\alpha}=\overrightarrow{OA}$, $\vec{\beta}=\overrightarrow{OB}$, $\vec{\gamma}=\overrightarrow{O\Gamma}$, $\vec{\delta}=\overrightarrow{O\Delta}$, $\vec{\varepsilon}=\overrightarrow{OE}$ διανύσματα, ώστε $\vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{\gamma}=\vec{0}$, $|\vec{\alpha}|=|\vec{\beta}|=|\vec{\gamma}|=1$.

Να δείξετε ότι: Α)

$$|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|=|\vec{\beta}+\vec{\gamma}|=|\vec{\gamma}+\vec{\alpha}|=1$$

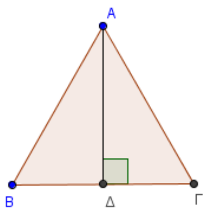
Β) $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma}=\vec{\gamma}\cdot\vec{\alpha}=-\dfrac{1}{2}$

Γ) $|\vec{\alpha}-\vec{\beta}|=|\vec{\beta}-\vec{\gamma}|=|\vec{\gamma}-\vec{\alpha}|=\sqrt{3}$

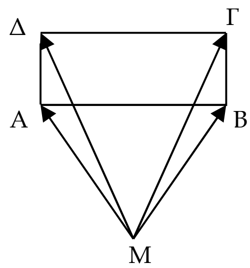
Δ) Τα διανύσματα $\vec{\alpha}+\vec{\beta}$ και $\vec{\alpha}-\vec{\beta}$ είναι κάθετα μεταξύ τους.

Ε) Αν φ είναι η γωνία $\vec{\alpha}+\vec{\beta}$ και $\vec{\beta}+\vec{\gamma}$ και ω είναι η γωνία των $\vec{\alpha}-\vec{\beta}$ και $\vec{\beta}-\vec{\gamma}$ τότε $2\text{συν}\varphi=2\text{συν}\omega=-1$

1.111 Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο και $AB=10$. Να υπολογίσετε τα $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Gamma}$, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{\Gamma B}$, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Delta}$, $\overrightarrow{B\Gamma}\cdot\overrightarrow{A\Delta}$, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{B\Gamma}$



1.112 Στο διπλανό σχήμα το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο. Να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{MA}\bullet\overrightarrow{M\Gamma}=\overrightarrow{MB}\bullet\overrightarrow{M\Delta}$



2 ΕΥΘΕΙΑ

Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας (ε) όταν:

2.01 Διέρχεται από σημείο Α (x_0, y_0) και είναι παράλληλη σε ευθεία (ε΄).
Εφαρμογή: Α (1, - 1) και (ε΄): 2x+y - 1 = 0

2.02 Διέρχεται από σημείο Α (x_0, y_0) και είναι κάθετη σε ευθεία (ε΄).
Εφαρμογή: Α (- 1, 1) και (ε΄): 2x+y+1=0

2.03 Διέρχεται από σημείο Α (x_0, y_0) και σχηματίζει γωνία φ με τον x΄x. Εφαρμογή:

α) Α (- 2, 3) και $\varphi = 30°$

β) Α (4, - 5) και $\varphi = 90°$

2.04 Είναι μεσοκάθετη σε γνωστό τμήμα:
Εφαρμογή: Α (- 2, 1) και Β (2, 3)

2.05 Διέρχεται από το Α (x_0, y_0) και είναι παράλληλη σε διάνυσμα $\vec{v}$. Εφαρμογή: Α (3, - 2) και $\vec{v}$ = (0, 1)

2.06 Διέρχεται από το Α (x_0, y_0) και είναι κάθετη σε διάνυσμα $\vec{v}$. Εφαρμογή: Α (5, - 2) και $\vec{v}$ = (-1, 3)

2.07 Διέρχεται από το Α και σχηματίζει δοσμένη γωνία με γνωστή ευθεία (ε)
Εφαρμογή: Α (3,-1) $\omega = 45^o$, $(\varepsilon): y = 2x$

2.08 Απέχει απόσταση d από γνωστή ευθεία (ε΄). Εφαρμογή:
$d = \sqrt{2}$ από (ε΄): 2x+y-1= 0

2.09 Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών που είναι παράλληλες προς την ευθεία 2x - 3y - 12 = 0 και ορίζουν με τους άξονες τρίγωνο με εμβαδόν 12 τ.μ.

2.10 Διέρχεται από το (-1,2) και σχηματίζει με τους άξονες τρίγωνο εμβαδού 3 τμ

2.11 Έστω οι ευθείες ε_1: 2x - 3y + 1 = 0, ε_2: -x+4y+3=0 και το σημείο Α (1, - 2). Να βρεθεί σημείο Μ της ε_1, ώστε το μέσο του ΑΜ να ανήκει στην ε_2.

2.12 Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με Α (- 1, 2), Β (3, - 2) και Γ (1, 4). Να βρεθούν οι οι συντεταγμένες του ορθοκέντρου του βαρυκέντρου του εκκέντρου του και του περικέντρου του.

2.13 Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $2y^2-3xy-2x^2=0$ παριστάνει ζεύγος δύο ευθειών. Ποια είναι η σχετική θέση τους;

2.14 Να βρεθούν οι κορυφές τριγώνου ΑΒΓ αν είναι $B(1,2)$, $A\Gamma: 2x+y=5$ και η διάμεσος $AM: x-2y=1$

2.15 Φωτεινή ακτίνα διερχόμενη από το σημείο Σ (2, 3) και προσπίπτουσα στην ευθεία x +y+1=0, μετά την ανάκλασή της διέρχεται από το σημείο Μ (1, 1). Να βρεθούν οι εξισώσεις της προσπίπτουσας και της ανακλώμενης ακτίνας.

2.16 Τριγώνου ΑΒΓ δίνονται η κορυφή Α (1, 2) και οι εξισώσεις x-3y+1= 0 και y-1=0 δύο διαμέσων του. Να βρείτε τις εξισώσεις των πλευρών του τριγώνου ΑΒΓ.

2.17 Σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ είναι $A(1,1)$. Η διάμεσος ΒΜ και το ύψος ΓΔ έχουν αντίστοιχα εξισώσεις $x-y+4=0$ και $3x+y+4=0$. Να βρείτε τις εξισώσεις των πλευρών του τριγώνου .

2.18 * Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1 : x+y=0$ και $\varepsilon_2 : 2x+y=3$ και το σημείο $\Delta(5,2)$. Αν A η τομή των δύο ευθειών να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που περνά από το Δ και τέμνει την ε_1 στο Γ και την ε_2 στο B έτσι ώστε $(\Gamma B)=(AB)$

2.19 Να βρείτε την εξίσωση της πλευράς $B\Gamma$ ενός τριγώνου $AB\Gamma$, αν $A(2,3)$ και δύο διαμέσοι έχουν εξισώσεις $(\varepsilon_1): x-4y-4=0$ και (ε_2): $4x+5y=9$

2.20 **Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ με $B(-1,3)$ οι εξισώσεις του ύψους $A\Delta$ και της διχοτόμου AE είναι αντίστοιχα $x+2y=4$ και $x+y=3$. Να βρεθούν οι συντεταγμένες των άλλων κορυφών του.

2.21 Ένα τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ έχει την πλευρά AB στην ευθεία: $x+y-1=0$. Αν το κέντρο K έχει συντεταγμένες $K(1,2)$ να βρείτε τις κορυφές του τετραγώνου.

2.22 Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει ευθεία που να διέρχεται από το σημείο $M(1,2)$ και να σχηματίζει με τους αρνητικούς ημιάξονες τρίγωνο

2.23 Δίνεται ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$. Έστω M μεταβλητό σημείο της πλευράς $B\Gamma$. Αν Δ και E είναι οι προβολές του M στις AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι η μεσοκάθετος του ΔE διέρχεται από σταθερό σημείο.

2.24 Είναι τα σημεία $(1,-2)$ και $(-2,1)$ προς το ίδιο μέρος της ευθείας $3x-5y=2$;

2.25 Να βρείτε το συμμετρικό του σημείου $(3,1)$ ως προς την ευθεία $2y=x-1$

2.26 Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων, τα οποία ισαπέχουν από τις ευθείες $3x-2y+4=0$ και $3x-2y+6=0$

2.27 Ένα σημείο P του επιπέδου κινείται στην ευθεία y = x. Να δείξετε ότι το συμμετρικό σημείο του P ως προς την ευθεία x+2y-1=0 κινείται στην ευθεία 7x-y-2=0

2.28 Το σημείο Α (3,-1) είναι κορυφή του τετραγώνου, του οποίου μία πλευρά έχει εξίσωση 3x-2y-5=0. Να βρεθούν οι εξισώσεις των άλλων πλευρών του.

2.29 Να βρεθεί η μεσοπαράλληλη των ευθειών 3x-y+1= 0 και -6x+2y-3=0

2.30 Έστω οι ευθείες $(\varepsilon): 5x-12y+10=0$ και (ζ): $5x-12y-20=0$. Να βρείτε την ευθεία (η), που είναι παράλληλη αυτές και η απόσταση των (η), (ε) είναι διπλάσια από την απόσταση των (η) και (ζ).

2.31 Να βρείτε τις κορυφές B και Δ, τετραγώνου $AB\Gamma\Delta$, αν $A(3,3)$ και $\Gamma(-1,3)$

2.32 Δίνονται οι εξισώσεις $(\varepsilon): (\lambda+1)x+(\lambda-4)y+\lambda^2-3\lambda+2=0$ και $(\eta): (\lambda+2)x+3\lambda y+\lambda-4=0$ με $\lambda \in R$.

Α) Να αποδείξετε ότι (ε) και (η) παριστάνουν ευθεία, για κάθε τιμή του λ.

Β) Να βρείτε τις τιμές λ, έτσι ώστε οι ευθείες να είναι κάθετες.

Γ) Να αποδείξετε ότι η ευθεία (η) διέρχεται από σταθερό σημείο

2.33 Να αποδείξετε ότι η εξίσωση: $(\alpha^2+\beta^2-\gamma\alpha)x+(\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma)y+2\alpha\beta\gamma=0$ με $|\alpha|+|\beta|+|\gamma|\neq 0$, παριστάνει ευθεία

2.34 Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $(\lambda^2+3\lambda-2)x+(2\lambda^2+3\lambda-1)y=7\lambda^2+12\lambda-5$ παριστάνει ευθεία που διέρχεται από σταθερό σημείο για κάθε $\lambda\in IR$.

2.35 Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (x+y-5)+λ(2x+y-7)=0 παριστάνει οικογένεια ευθεών που διέρχεται από σταθερό σημείο για κάθε $\lambda\in IR$. Να εξετάσετε αν οι ευθείες x+y=5 και 2x+y=7 ανήκουν στην οικογένεια αυτή.

2.36 Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $x\sigma\upsilon\nu^2\frac{\theta}{2}+y\eta\mu^2\frac{\theta}{2}+\sigma\upsilon\nu\theta-1=0$, $\theta\in[0,\pi]$ παριστάνει ευθεία που διέρχεται από σταθερό σημείο

2.37 Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $(3\lambda^2+\lambda+2)x-(5\lambda^2+\lambda+1)y+7\lambda^2+\lambda=0$ παριστάνει ευθεία που διέρχεται από σταθερό σημείο για κάθε $\lambda\in IR$.

2.38 Να βρείτε τον μ, ώστε η γωνία των ευθειών(μ + 1) x +(μ + 2)y=0 και μx - (3μ+2)y+7=0 να είναι 90°

2.39 Για ποιες τιμές των $\lambda,\mu\in R$ οι ευθείες (μ + 1) x - 2μy = λ και (μ - 1) x - 3y =2λ-1:
A) τέμνονται B) ταυτίζονται

2.40 Να υπολογίσετε την οξεία γωνία των ευθειών $x^2-2xy-3y^2=0$

2.41 Να εξετάσετε αν η ευθεία $x+1998y=4$ ανήκει στην οικογένεια ευθειών $(x+y-4)+\lambda(x-3y-4)=0$.

2.42 Να προσδιοριστούν οι γεωμετρικοί τόποι επάνω στους οποίους κινούνται τα σημεία $A(-2+5\lambda,1+2\lambda)$ και $B(6+7\mu,3+\mu)$ όταν $\lambda,\mu\in R$. Στη συνέχεια να προσδιοριστεί το κοινό σημείο αυτών των γεωμετρικών τόπων.

2.43 Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $x^2-y^2-4\lambda y-2\lambda x-3\lambda^2=0$, $\lambda\in R$ παριστάνει δύο ευθείες κάθετες μεταξύ τους. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος του σημείου τομής τους

2.44 Να βρείτε τη διχοτόμο της οξείας γωνίας που σχηματίζουν οι ευθείες $3x+y+1=0$ και $x+3y-5=0$.

2.45 Έστω τρίγωνο ΑΒΓ με κορυφές Α(5,3), Β(0,0) και Γ (6, 0) και ευθεία παράλληλη προς τη ΒΓ που τέμνει τις ευθείες ΑΒ και ΑΓ στα Ε και Δ αντίστοιχα. Να βρεθεί η εξίσωση της γραμμής στην οποία κινείται το σημείο τομής των ΒΔ και ΓΕ.

2.46 Δίνεται η οικογένεια ευθειών $(-\lambda^2-1)x+(\lambda^2+\lambda+1)y=0$, $\lambda\in R$ (1). Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων M, από τα οποία διέρχεται μια μόνο ευθεία που ορίζεται από την (1)

2.47 Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων $M(\lambda^2,2\lambda^2+3)$, $\lambda\in R$.

2.48 Να αποδείξετε ότι αν οι ευθείες (ε): $(\lambda^2+1)x+(\lambda^2-1)y=\lambda$ και (ζ): $(\lambda+1)x+(\lambda-1)y=\lambda^2$. έχουν ένα ακριβώς κοινό σημείο, τότε αυτό κινείται σε μια ευθεία .

3 ΚΥΚΛΟΣ

3.01 Να βρείτε τις εφαπτόμενες του κύκλου $x^2+y^2=5$, που διέρχονται από το $A(3,1)$ και να αποδείξετε ότι οι εφαπτόμενες αυτές είναι κάθετες

3.02 Να βρεθεί η εξίσωση του κύκλου που έχει διάμετρο το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ με Α(1,3) και Β (- 3, 5)

3.03 Να βρεθεί η εξίσωση του κύκλου που έχει κέντρο το σημείο (8,- 6) και διέρχεται από την αρχή των αξόνων

3.04 Να βρεθεί η εξίσωση του κύκλου που είναι εγγεγραμμένος στο τρίγωνο που σχηματίζει η ευθεία x+y - 6 = 0 με τους άξονες x΄x και y΄y.

3.05 Να βρεθεί η εξίσωση του κύκλου που διέρχεται από το σημείο (2,1) και εφάπτεται στις ευθείες 3x+y+6=0 και
3x + y - 12 = 0.

3.06 Να βρεθεί η εξίσωση του κύκλου που έχει κέντρο το σημείο (3, 3) και εφάπτεται των αξόνων x΄x και y΄y

3.07 Να βρεθεί η εξίσωση του κύκλου που έχει κέντρο το σημείο (- 3, 2), εφάπτεται στον άξονα y΄y

3.08 Να βρεθεί η εξίσωση του κύκλου που έχει το κέντρο του στην ευθεία
2x +y+1= 0 και διέρχεται από τα σημεία Α(-1, 2) και Β (3,0).

3.09 Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου με ακτίνα 2, έχει το κέντρο του στην ευθεία $y=2x$ και εφάπτεται στον $x'x$

3.10 Να βρείτε τις εξισώσεις των κύκλων που διέρχονται από τα σημεία $A(1,1)$ και $B(3,1)$ και αποκόπτουν από την ευθεία $x+3y=16$ χορδή μήκους $\sqrt{10}$

3.11 Να βρεθεί η εξίσωση του κύκλου που έχει ακτίνα 4, εφάπτεται στον άξονα x΄x και διέρχεται από το σημείο (5, 4)

3.12 Να βρεθεί η εξίσωση του κύκλου που διέρχεται από τα σημεία (3, 1), (- 1, 3) και έχει κέντρο πάνω στην ευθεία y = 3x-2

3.13 Να βρεθεί ο κύκλος που περνά από τα σημεία (-3,4), (5,0) και $(2,9)$

3.14 Να βρεθούν τα σημεία Μ της ευθείας $x-y+3=0$, από τα οποία οι εφαπτόμενες προς τον κύκλο $(x-2)^2+(y+3)^2=50$, είναι κάθετες μεταξύ τους

3.15 Βρείτε την εξίσωση της χορδής του κύκλου $x^2+y^2=9$ που έχει μέσο το $(1,2)$

3.16 Να βρείτε την εξίσωση της χορδής του κύκλου $x^2+y^2=25$ που διέρχεται από το σημείο $(-1,3)$ και έχει μήκος ίσο με 8 μονάδες

3.17 Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων του κύκλου $x^2+y^2=4$ που είναι παράλληλες στην ευθεία x+y=0

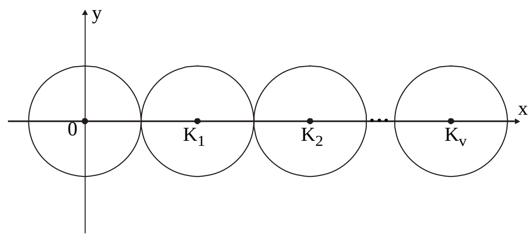
3.18 Να βρείτε τις εξισώσεις των κύκλων, οι οποίοι εφάπτονται στον κύκλο: $x^2+y^2=25$ στο σημείο Α(3,4) και έχουν ακτίνα R=10.

3.19 Βρείτε την εξίσωση του κύκλου με κέντρο την αρχή των αξόνων, για τον οποίο τα εφαπτόμενα τμήματα που άγονται από τα σημεία Α(1,3) και Β(4,2) να είναι παράλληλα μεταξύ τους

3.20 Θεωρούμε τον κύκλο $x^2+y^2+4y=0$ και το σημείο Α (-1,-1). Να βρεθεί η εξίσωση ευθείας που ορίζει στον κύκλο χορδή, με μέσον το Α.

3.21 Δίνεται ο κύκλος C: $x^2 + y^2 = 4$ και το σημείο Α(8, -6). Να βρείτε σημείο Μ του κύκλου C τέτοιο ώστε η απόσταση (ΑΜ) να είναι ελάχιστη

3.22 Να αποδειχθεί ότι οι κύκλοι $(x-2)^2+y^2 = 4$ και $x^2 - 2x + y^2 = 0$ εφάπτονται εσωτερικά.



3.23 Στο παραπάνω σχήμα ο πρώτος κύκλος C0 έχει εξίσωση $x^2 + y^2 = \rho^2$ και όλοι οι κύκλοι είναι ίσοι. Να βρεθούν:

Α) οι εξισώσεις των κύκλων $C_1, C_2, \dots, C_\nu$ (συναρτήσει του ρ)

Β) το άθροισμα των αποστάσεων των κέντρων $K_1, K_2, \dots, K_\nu$ από το κέντρο Ο

Γ) οι κοινές εφαπτόμενες όλων των κύκλων.

3.24 Α. Να αποδείξετε ότι για κάθε πραγματική τιμή του θ, η εξίσωση

$C: x^2+y^2-2x\sigma\upsilon\nu\theta-2y\eta\mu\theta=1$, $0\leq\theta<2\pi$

παριστάνει κύκλο, του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα.

Β Να αποδείξετε ότι για τις διάφορες τιμές του θ τα κέντρα των παραπάνω κύκλων βρίσκονται σε κύκλο με κέντρο Ο(0,0) και ακτίνα ρ = 1.

3.25 Αποδείξτε ότι για κάθε $\lambda\in[-1,1]$, οι ευθείες $\lambda x+\sqrt{1-\lambda^2}\,y=1$, εφάπτονται σε σταθερό κύκλο,.

3.26 Δίνονται οι ευθείες

$(\varepsilon): (\eta\mu\theta)x+(\sigma\upsilon\nu\theta)y=\eta\mu2\theta$ και

$(\eta): (\sigma\upsilon\nu\theta)x+(\eta\mu\theta)y=\sigma\upsilon\nu2\theta$, με $\theta\in R$.

Να αποδείξετε ότι οι ευθείες (ε), (η) τέμνονται, για κάθε τιμή του $\theta\in R$ και ότι το σημείο τομής τους κινείται σε κύκλο.

3.27 Α) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που εφάπτεται του άξονα $y'y$ στο σημείο $A(0,-2)$ και αποκόπτει από την ευθεία $x+y+1=0$ τμήμα μήκους 2. Έστω C_1, C_2 είναι οι κύκλοι που βρήκατε

Β) Να αποδείξετε ότι οι C_1, C_2 εφάπτονται εξωτερικά.

Γ) Να βρεθούν οι εξισώσεις των κοινών εφαπτομένων των C_1, C_2

3.28 Να δειχθεί ότι η εξίσωση $x^2 + y^2 + \lambda x = 0$ παριστάνει κύκλο για κάθε $\lambda\in R^*$. Να βρεθεί η γραμμή στην οποία βρίσκονται τα κέντρα αυτών των κύκλων

3.29 Δίνεται η ευθεία $(\varepsilon): y=x+2$ και ο κύκλος $(C): x^2+y^2-2\lambda x-2\lambda^2 y=0$ με $\lambda\in R^*$. Να βρείτε το λ ώστε η (ε) να ορίζει στον κύκλο (C), χορδή η οποία να φαίνεται από την αρχή των αξόνων υπό ορθή γωνία.

3.30 Αν η ευθεία $|\vec{\alpha}|^2 x+|\vec{\beta}|^2 y=4\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$ σχηματίζει με τους άξονες τρίγωνο με εμβαδόν 8 τ.μ τότε να δείξετε πως $\vec{\alpha}\parallel\vec{\beta}$. (τα $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ είναι μη μηδενικά διανύσματα)

3.31 Δίνονται οι κύκλοι C₁: $x^2+y^2=1$ και

C₂: $(x-3)^2+(y-2)^2=4$

Α) Να δείξετε ότι δεν έχουν κοινό σημείο.

Β) Από όλα τα ζεύγη σημείων (Α, Β), όπου το Α ανήκει στον C_1 και το Β στον C_2, να βρεθεί αυτό για το οποίο τα Α, Β απέχουν τη μικρότερη απόσταση.

Δ) Να βρεθεί το ζεύγος σημείων (Γ, Δ) (Γ στον C_1, Δ στον C_2) με τη μεγαλύτερη απόσταση.

3.32 Για κάθε $\kappa \in R$, δίνεται η εξίσωση $C: x^2+y^2+2x-3y-1+\kappa(x+y-2)=0$.

Α) Να αποδείξετε ότι η C παριστάνει κύκλο για κάθε $\kappa \in R$

Β) Βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των κέντρων των κύκλων.

Γ) Να αποδείξετε ότι όλοι οι κύκλοι διέρχονται από δύο σταθερά σημεία.

3.33 Θεωρούμε τον κύκλο C: $x^2+y^2=4$ και την ευθεία ε: y=2x+ 5.

Α) Να δείξετε ότι ο κύκλος και η ευθεία δεν έχουν κοινά σημεία.

Β) Από ένα σημείο Μ της ευθείας ε φέρνουμε τις εφαπτομένες στον κύκλο και ονομάζουμε Α και Β τα σημεία επαφής. Να δείξετε ότι, όταν το σημείο Μ διαγράφει την ευθεία ε, η ευθεία ΑΒ διέρχεται από σταθερό σημείο.

3.34 Να δείξετε ότι η εξίσωση $x^2-4xy+y^2$ παριστάνει δύο ευθείες που καθεμιά σχηματίζει με την $x-y=0$ γωνία 30^o

3.35 Να δείξετε ότι για κάθε για κάθε $A, B \in \mathbf{R}$ τέτοια ώστε $|A|+|B|\neq 0$, η ευθεία $\varepsilon: Ax+By+2\sqrt{A^2+B^2}=0$ εφάπτεται σε έναν σταθερό κύκλο (απ¨ $x^2+y^2=4$)

3.36 Δίνονται τα σημεία Α(-2,0), Β(2,0), $M_1(1, \sqrt{3})$

Α) Να δείξετε ότι $M_1A \perp M_1B$.

Β) Να βρεθεί η εξίσωση του κύκλου που περνά από τα σημεία Α, Β, M_1.

Γ) Να δείξετε ότι κάθε σημείο Μ (x_o,y_o) για το οποίο ισχύει ΜΑ $\perp$ ΜΒ, ανήκει στον κύκλο του ερωτήματος (Β).

3.37 Δίνεται το σημείο $A(1,1)$ και ο κύκλος $(x-1)^2+(y-7)^2=9$

Α) Να αποδείξετε ότι το Α είναι εξωτερικό σημείο του κύκλου

Β) Βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων του κύκλου που άγονται από το Α

Γ) Να βρείτε την οξεία γωνία των δύο εφαπτομένων

Δ) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείουν οι εφαπτόμενες και ο κύκλος.

3.38 Έστω οι κύκλοι: C_1 : $(x-\alpha)^2+(y-1)^2=\rho^2$ και $C_2: x^2+(y-\alpha)^2=\rho^2$ με $\rho>0$. Αν η ευθεία $\varepsilon: 4x+3y+2=0$ είναι κοινή εφαπτομένη των κύκλων C_1, C_2, να αποδείξετε ότι $\alpha=-1$ και $\rho=\frac{1}{5}$ ή $\alpha=-3$ και $\rho=\frac{7}{5}$ (www.mathematica.gr)

3.39 Να βρεθούν οι εξισώσεις των κύκλων καθένας από τους οποίους εφάπτεται στους άξονες και στην ευθεία $y=-\frac{3}{4}x+5$.

3.40 Δίνεται η οικογένεια κύκλων : $(x+1-3\lambda)^2+(y-4\lambda)^2=25$, $\lambda \in R$ Να αποδείξετε ότι όλοι οι παραπάνω κύκλοι εφάπτονται σε δύο σταθερές ευθείες, . (απ: 4x-3y=-29 και 4x-3y = -21)
(www.mathematica.gr)

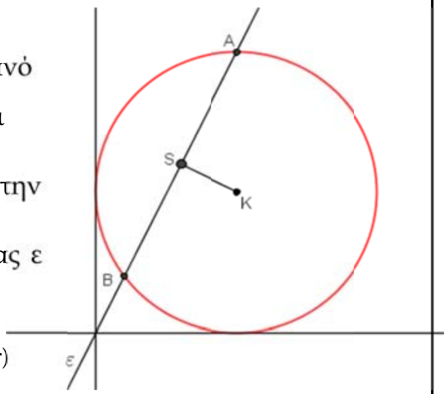
3.41 Βρείτε την εξίσωση μιας κοινής εξωτερικής εφαπτομένης ευθείας στους κύκλους με εξισώσεις : $x^2+y^2=1$ και $(x-6)^2+y^2=9$

(απ: $y=\frac{\sqrt{2}}{4}(x+3)$) (www.mathematica.gr)

3.42 Στο διπλανό σχήμα δίνεται ότι $KS=\frac{AB}{4}$, βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε

(απ: $y=2x$)

(www.mathematica.gr)



3.43 Να αποδείξετε ότι οι κύκλοι $C_1: x^2+y^2=\alpha^2$, $C_2:(x-\kappa\alpha)^2+y^2=(\kappa-1)^2\alpha^2$ όπου $\alpha>0, \kappa>1$, εφάπτονται εξωτερικά.

3.44 Να βρείτε τις εξισώσεις των κύκλων που διέρχονται από το σημείο $M(3,4)$ και εφάπτονται στις ευθείες $(\epsilon_1): 3x+4y=0$, $(\epsilon_2): 3x+4y-50=0$

3.45 Από τυχαίο σημείο Μ του επιπέδου Oxy φέρνουμε τη ΜΑ καθετη στον $y'y$ και τη ΜΒ κάθετη στην ευθεία $y=x$. Αν $(AB)=4$ να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος του σημείου Μ είναι ο κύκλος $x^2+y^2=32$

(www.mathematica.gr)

3.46 Δίνεται η εξίσωση

(C): $x^2+y^2+2tx-2ty-4=0$

α. Να αποδείξετε ότι για κάθε $t\in R$ η (C) παριστάνει κύκλο, το κέντρο του οποίου κινείται σε σταθερή ευθεία όταν το t διατρέχει R.

β. Αν η ευθεία $y=2$ τέμνει τον κύκλο (C) στα σημεία Α και Β έτσι ώστε $\vec{OA}\perp\vec{OB}$ (Ο είναι η αρχή των αξόνων), να προσδιορίστε τον πραγματικό αριθμό t

3.47 Δίνεται ο κύκλος με εξίσωση: $x^2+y^2=49$ και το εσωτερικό σημείο του $M(3,4)$.Να βρεθεί το ελάχιστο μήκος της χορδής του κύκλου που διέρχεται από το Μ

3.48 Αν Α,Β δύο σημεία στη γραφική παράσταση της $f(x)=\sqrt{x-x^2}$ να αποδειχθεί ότι $|\vec{AB}|\le 1$.

3.49 Δίνονται οι κύκλοι $x^2+y^2=2$ και $(x+1)^2+(y+1)^2=4$. Να βρείτε την οξεία γωνία που σχηματίζουν οι εφαπτόμενες σε ένα από τα κοινά σημεία τους. (www.mathematica.gr)

3.50 Να λυθεί το σύστημα: $x+y>5$ και $x^2+y^2<25$

3.51 ** Δίνεται η εξίσωση:

$C: x^2+y^2-4+\lambda(x-y+3)=0$ (1)

Α Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda\in R$ η (1) παριστάνει κύκλο.

Β Να αποδείξετε ότι δύο οποιοιδήποτε από τους παραπάνω κύκλους δεν έχουν κοινά σημεία.

Γ Να αποδείξετε ότι κανένας από τους κύκλους (C) δεν εφάπτεται στην ευθεία: $y=x+2$

Δ Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου από τα οποία δεν διέρχεται κανένας από τους παραπάνω κύκλους.

3.52 Δίνεται ο κύκλος με εξίσωση: $C: x^2+y^2=49$ και το εσωτερικό σημείο του $M(3,4)$.Να βρεθεί το ελάχιστο μήκος της χορδής του κύκλου που διέρχεται από το Μ .

4 ΠΑΡΑΒΟΛΗ

4.01 Να βρεθεί η εξίσωση της παραβολής με κορυφή το (0, 0) όταν:

Α) είναι συμμετρική ως προς το θετικό ημιάξονα Οx και έχει παράμετρο p = 5

Β) είναι συμμετρική ως προς τον άξονα Οx και διέρχεται από το σημείο (-1,4)

Γ) είναι συμμετρική ως προς τον άξονα Οy και διέρχεται από το σημείο (2, 2)

Δ) έχει άξονα συμμετρίας τον Οy και εστία Ε(0,-4)

Ε) έχει εστία Ε (- 2, 0) και διευθετούσα : x= 2

4.02 Να βρεθεί η εξίσωση της παραβολής με κορυφή το (0, 0) όταν έχει άξονα συμμετρίας τον Οx και εφάπτεται της ευθείας y = 4x + 1

4.03 Ισόπλευρο τρίγωνο ΟΑΒ είναι εγγεγραμμένο στην παραβολή $y^2 = 4px$ με κορυφή το Ο. Να βρεθούν οι εξισώσεις των πλευρών του.

4.04 Εστω η παραβολή $y^2 = 4x$. Να βρείτε

Α) τις ευθείες που διέρχονται από την εστία της παραβολής και απέχουν από την αρχή των αξόνων απόσταση ίση με $\frac{\sqrt{2}}{2}$

Β) την εξίσωση της εφαπτομένης της που είναι παράλληλη στην ευθεία y=x–1

4.05 Έστω η παραβολή $C: y^2 = 2px$ και μια χορδή της ΑΒ παράλληλη με τον άξονα $y'y$, η οποία περνάει από την εστία. Να αποδειχθεί ότι:

Α) $(AB) = 2(EK)$, όπου Κ το σημείο που τέμνει ο άξονας $x'x$ τη διευθετούσα

Β) οι εφαπτόμενες στα Α και Β διέρχονται από το Κ

4.06 Να βρείτε την εξίσωση της χορδής της παραβολής $y^2 = 12x$ που έχει μέσο το $M(3,2)$

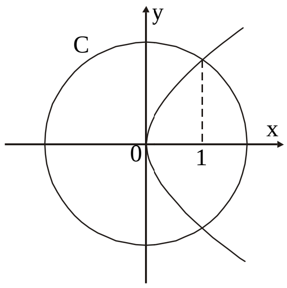
4.07 Δίνεται η παραβολή $y^2 = 4x$ και η ευθεία $(\varepsilon): y = x - 1$.

Α) Να βρείτε τα κοινά σημεία Α, Β της (ε) και της παραβολής.

Β) Να δείξετε ότι οι εφαπτόμενες της παραβολής στα Α, Β είναι κάθετες.

Γ) Να δείξετε ότι κάθε ευθεία που περνά από την εστία και τέμνει την παραβολή σε δύο σημεία έχει την ιδιότητα (Γ).

4.08 Ο κύκλος του διπλανού σχήματος διέρχεται από την εστία της παραβολής. Να βρεθούν οι εξισώσεις του κύκλου και της παραβολής.



4.09 Από το σημείο $(-2, 3)$ προς την παραβολή $y^2 = 8x$ γράφονται δύο εφαπτόμενες ευθείες. Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων αυτών ευθειών και να αποδείξετε ότι είναι κάθετες.

4.10 ** Δίνεται η παραβολή $C: y^2 = 2px$ και δύο χορδές ΟΒ, ΟΓ, ώστε γωνία $B\hat{O}\Gamma = 90^o$. Να αποδειχθεί ότι η ΒΓ διέρχεται από σταθερό σημείο.

4.11 Να αποδείξετε ότι ο κύκλος $x^2 + y^2 - 6x + 1 = 0$ εφάπτεται στην παραβολή $y^2 = 4x$.

5 ΕΛΛΕΙΨΗ

5.01 Να βρείτε την εξίσωση της έλλειψης με εστίες $E'(-4,0)$, $E(4,0)$ και μήκος του μεγάλου άξονα ίσο με 10

5.02 Να βρείτε την εξίσωση της έλλειψης με κορυφές τα σημεία Κ(8,0), Λ(-8,0), Μ(0,10) και Ν(0,-10).

5.03 Να βρεθεί η εκκεντρότητα και οι εστίες καθεμιάς από τις ελλείψεις:

Α) $4x^2 + 9y^2 = 36$

Β) $9x^2 + 25y^2 = 225$

5.04 Να βρεθεί η μορφή της εξίσωσης της έλλειψης με εκκεντρότητα $\varepsilon = \frac{\sqrt{2}}{2}$

5.05 Ο κύκλος με κέντρο το Ο (0, 0) και ακτίνα β διέρχεται από τις εστίες της έλλειψης $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$ με α>β. Να βρεθεί η εκκεντρότητά της.

5.06 Να αποδείξετε ότι οι ελλείψεις $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$ και $\frac{\kappa^2x^2}{\alpha^2}+\frac{\kappa^2y^2}{\beta^2}=1$ έχουν την ίδια εκκεντρότητα.

5.07 Για κάθε $\theta \in R$, δίνονται οι εξισώσεις (ε_1) $:(2\sigma\upsilon\nu\theta)x+(\eta\mu\theta)y=2$ (ε_2): $(2\eta\mu\theta)x-2(\sigma\upsilon\nu\theta)y+2\eta\mu\theta\sigma\upsilon\nu\theta=0$. Δείξτε ότι:

Α) Οι (ε_1) και (ε_2) παριστάνουν ευθείες.

Β) Οι (ε_1) και (ε_2) τέμνονται σε σημείο, το οποίο κινείται σε έλλειψη.

5.08 Να αποδείξετε ότι για κάθε $\lambda \in R$, το σημείο $M\left(2\frac{1-\lambda^2}{1+\lambda^2},\frac{6}{1+\lambda^2}\right)$ κινείται σε έλλειψη.

5.09 Να βρεθούν οι εξισώσεις των εφαπτομένων της έλλειψης $9x^2+4y^2=36$, που σχηματίζουν με τους άξονες τρίγωνο εμβαδού 6 τμ

5.10 Να βρεθούν οι εφαπτόμενες της έλλειψης $9x^2+16y^2 = 144$ που είναι:

Α) παράλληλες προς την ευθεία (ε): x + y = 0

Β) κάθετες στην ευθεία (ε).

5.11 Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων Μ του επιπέδου των οποίων η απόσταση από το σημείο $E(1,0)$ είναι ίσο με το μισό της απόστασής του από την ευθεία $x-4=0$. Να βρείτε τις εστίες της γραμμής που θα προκύψει.

5.12 Αν ο κύκλος κέντρου Ο(0, 0) και ακτίνα β διέρχεται από τις εστίες της έλλειψης $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$ $\alpha>\beta>0$, βρείτε την εκκεντρότητα της έλλειψης

5.13 Δίνεται η έλλειψη $\frac{x^2}{\kappa+1}+\frac{y^2}{2\kappa-3}=1$ με εστίες στον άξονα $x'x$

Α) Να βρεθούν οι δυνατές τιμές του κ

Β) Για ποιες τιμές του κ η έλλειψη είναι όμοια με την $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$;

Γ) Για τη μικρότερη ακέραια τιμή του κ να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της έλλειψης η οποία είναι παράλληλη στην ευθεία $y=-x$.

6 ΥΠΕΡΒΟΛΗ

6.01 Ο κύκλος με εξίσωση $x^2 + y^2 = 16$ διέρχεται από τις κορυφές της υπερβολής C του διπλανού σχήματος, της οποίας η μια ασύμπτωτη έχει εξίσωση $y=-\frac{4}{3}x$. Να βρεθούν:

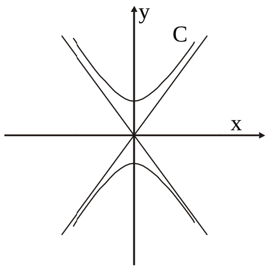
6.02 Α) οι εστίες της υπερβολής

Β) η εστιακή της απόσταση

Γ) η εξίσωσή της

Δ) να προσδιοριστεί το ορθογώνιο βάσης της υπερβολής

Ε) η εκκεντρότητά της.



6.03 Να βρείτε την εξίσωση της υπερβολής που έχει τις εστίες της στον άξονα x'x συμμετρικές ως προς την αρχή των αξόνων και ακόμα:

Α) έχει εστιακή απόσταση (Ε'Ε)=6 και $\varepsilon=\frac{3}{2}$

Β) έχει εστιακή απόσταση (Ε'Ε) = 20 και ασύπτωτες τις $y = \frac{4}{3}x$ και $y=-\frac{4}{3}x$

6.04 Να βρείτε την υπερβολή, η οποία διέρχεται από τα σημεία $(3,1)$ και $(9,5)$

6.05 Να βρεθούν οι εξισώσεις των εφαπτομένων της υπερβολής $2x^2-4y^2=100$ που είναι παράλληλες προς την ευθεία $3x-y=0$.

6.06 Δίνεται η παραβολή με εστία $E(2p,0)$, $p>0$. Να βρείτε την εξίσωση της υπερβολής της οποίας η μια εστία της συμπίπτει με την εστία της παραβολής, και η μια κορυφή της με το μέσο του OE όπου O η αρχή των αξόνων. Βρείτε τα σημεία της παραβολής και της υπερβολής

6.07 Να βρείτε την εξίσωση της ισοσκελούς υπερβολής που έχει τις ίδιες εστίες με την έλλειψη $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$

6.08 Δίνεται η υπερβολή $C: \frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$ και $M(x_1,y_1)$ ένα σημείο της διαφορετικό από τις κορυφές της. Αν η κάθετη (ε') της εφαπτομένης (ε) στο M τέμνει τους άξονες $x'x$, $y'y$ στα Γ και Δ αντίστοιχα

Α) να βρεθεί συναρτήσει των x_1, y_1 η εξίσωση της (ε') καθώς και οι συντεταγμένες των Γ και Δ

Γ) να βρεθούν οι συντεταγμένες του μέσου N του ΓΔ

Δ) να αποδειχθεί ότι ο γεωμετρικός τόπος του N είναι μια υπερβολή C_1

Ε) να αποδειχθεί ότι οι υπερβολές C και C_1 έχουν τις ίδιες εκκεντρότητες, αλλά τις εστίες σε διαφορετικούς άξονες.

6.09 Δίνεται η υπερβολή $\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$ με κλάδους C_1 και C_2 και τυχαίο σημείο της $M(x_1,y_1)$ στον κλάδο C_1, $(y_1 \neq 0)$.

Α) Να γράψετε την εξίσωση της εφαπτόμενης (ε) στο σημείο M και να βρείτε τα σημεία τομής της (ε) με τους άξονες.

Β) Να δείξετε ότι η (ε) τέμνει τον x'x σε σημείο μεταξύ των κορυφών της υπερβολής

Γ) Αν η (ε) τέμνει τον κλάδο C_2 στο $M'(x_2,y_2)$, να δείξετε ότι $y_1y_2<0$.

7 ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΙ ΤΟΠΟΙ – ΣΥΝΟΛΑ ΣΗΜΕΙΩΝ

7.01 Στο επίπεδο να προσδιορίσετε το σύνολο των σημείων $M(x,y)$ για τα οποία ισχύει κάθε μια από τις παρακάτω σχέσεις:

Α) $x=4$ και $y\in R$

Β) $-2<y<-1$ και $x\in R$

Γ) $x=2$ και $-2<y\le 2$

Δ) $-3<y\le 3$ και $2<x<4$

7.02 Στο επίπεδο να προσδιορίσετε το σύνολο των σημείων $M(x,y)$ για τα οποία ισχύει κάθε μια από τις παρακάτω σχέσεις:

Α) $M\left(3,\left(\alpha^2+4\alpha+1\right)\right)$, $\alpha\in R$

Β) $M(2\kappa-1,5+5\kappa)$, , $\kappa\in[-1,2]$

Γ) $M(\varepsilon\varphi\theta,-2)$, $\theta\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$.

Δ) $M(3,\sigma\upsilon\nu\theta)$, $\theta\in[0,\pi)$,

7.03 Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων σε κάθε μια από τις παρακάτω περιπτώσεις για κάθε $\lambda,\mu,t\in R$

Α) $M(\lambda-2,\lambda+2)$ Β) $M(2,\lambda)$

Γ) $M\left(\eta\mu\theta,\left(\lambda^2-1\right)\right)$ για κάθε $\theta\in R$, $\lambda\in R$

7.04 Στο επίπεδο να προσδιορίσετε το σύνολο των σημείων $M(x,y)$ για τα οποία ισχύει κάθε μια από τις παρακάτω σχέσεις:

Α) $M\left(\lambda^2-2,\lambda^2+2\right)$, $\lambda\in R$

Β) $M\left(\frac{1}{\lambda-1},\frac{1}{1-\lambda}+1\right)$, $\lambda\in R-\{1\}$

7.05 Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων Μ για τα οποία ισχύει $\left|\overrightarrow{MA}\right|=2$, όπου Α(2, 1)

7.06 Έστ το σημείο $M(\lambda-3,2\lambda+1)$ με $\lambda\in R$.

Α) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων M για τις διάφορες τιμές του παραγματικού λ

Β) Να βρείτε το σημείο M που απέχει ελάχιστα από την αρχή των αξόνων.

7.07 Να βρείτε το γεωμετρικό τόποτων σημείων Μ για τα οποία ισχύει $MA\perp MB$, όπου Α(1, 0) και Β(-1, 0)

7.08 Να βρείτε το γεωμετρικό τόποτων σημείων Μ για τα οποία ισχύει (ΜΑ)=2(ΜΒ) όπου Α(1, 2) και Β(3, 1)

7.09 Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των μέσων Μ των ευθύγραμμων τμημάτων ΑΒ μήκους 8, των οποίων τα άκρα Α και Β κινούνται στους άξονες x'x και y'y αντίστοιχα.

7.10 Να αποδείξετε ότι για κάθε $\varphi\in R$ τα σημεία $M(2+3\sigma\upsilon\nu\varphi, 3\eta\mu\varphi-4)$ βρίσκονται σε κύκλο και να προσδιορίσετε το κέντρο και την ακτίνα του.

7.11 Από τυχαίο σημείο Μ του επιπέδου Oxy φέρνουμε τη $MA\perp y'y$ και τη ΜΒ κάθετη στην ευθεία y=x. Αν (ΑΒ)=4 να βρείτε το γεωμετρικό τόπο του Μ

7.12 Δίνεται κύκλος C: $x^2+y^2=4$ και σημείο Κ(5,0). Από το Κ φέρνουμε τυχαία ευθεία που τέμνει τον C στα σημεία Α και Β. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των μέσων των χορδών ΑΒ.

7.13 Βρείτε τη γραμμή όπου ανήκει το σημείο Μ όταν $M(\eta\mu\theta-1,2-\sigma\upsilon\nu\theta)$, $\theta\in R$

7.14 Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων από τα οποία οι εφαπτόμενες προς τον κύκλο $x^2+y^2=4$ είναι κάθετες

7.15 Να βρείτε τη γραμμή C στην οποία ανήκει το σημείο M σε κάθε μια από τις περιπτώσεις

A) $M(\varepsilon\varphi\theta,\eta\mu\theta)$, $\theta\in R-\left\{\kappa\pi+\frac{\pi}{2},\ \kappa\in Z\right\}$

B) $M(1-\sigma\upsilon\nu\theta,2+\eta\mu\theta)$, $\theta\in R$

7.16 Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των μέσων των χορδών του κύκλου $C:x^2+y^2-2x=0$, που διέρχονται από την αρχή των αξόνων.

7.17 Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των μέσων των χορδών του κύκλου $x^2+y^2=169$, που διέρχονται από το $(-4,2)$

7.18 Να βρείτε τη γραμμή C στην οποία ανήκει το σημείο M όταν $M\left(\frac{1}{\lambda},-\frac{1}{\lambda^2}\right)$ για κάθε $\lambda\in R^*$

7.19 Θεωρούμε το τρίγωνο ΑΒΓ. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων M του επιπέδου του για τα οποία ισχύει κάθε μια από τις παρακάτω σχέσεις: A) $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$

B) $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{AB}=0$ Γ) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{A\Gamma}\cdot\overrightarrow{AM}=0$

7.20 Δίνονται τα σημεία $A(2,-1)$) και $B(1,3)$. Να βρείτε το σύνολο των σημείων M για τα οποία ισχύουν: $(MAB)=3$ τμ

7.21 Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων M, των οποίων το τετράγωνο της απόστασης από το σημείο $A(1,0)$ είναι ίσο με το εξαπλάσιο της απόστασης από την ευθεία $y=1$

7.22 Να βρείτε τη γραμμή C στην οποία ανήκει το σημείο M σε κάθε μια από τις επόμενες περιπτώσεις

A) $M\left(\frac{1}{\sigma\upsilon\nu\theta},\varepsilon\varphi\theta\right)$, $\theta\in R-\left\{\kappa\pi+\frac{\pi}{2},\kappa\in Z\right\}$

B) $M\left(\frac{4}{\sigma\upsilon\nu\theta},3\varepsilon\varphi\theta\right)$ $\theta\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$

7.23 Έστω τα σημεία $A(-1,2)$ και $B(0,1)$. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων M, των οποίων ο λόγος των αποστάσεων από τα σημεία $A(-1,2)$ και $B(0,1)$ είναι ίσος με 3

7.24 Έστω τα σημεία $A(1,-2)$, $B(0,1)$. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων M για τα οποία ισχύει: $\overrightarrow{MA}^2+\overrightarrow{MB}^2=3\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}$

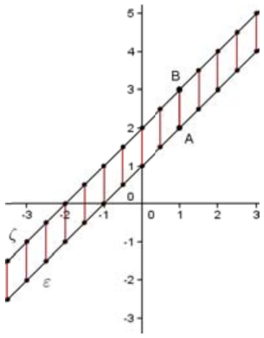
7.25 Δίνεται ο κύκλος $C:x^2+y^2+6x=0$. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των κέντρων M των κύκλων που έχουν ακτίνα ρ=2 και εφάπτονται του κύκλου C: α) εξωτερικά β) εσωτερικά

7.26 Έστω τα σημεία $A(1,-2)$, $B(-3,4)$. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων M του επιπέδου ώστε $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{MA}^2$.

7.27 Δίνεται το σημείο $A(3,0)$. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων M του επιπέδου για τα οποία ισχύει: $\overrightarrow{OM}\cdot\left(\overrightarrow{OM}-2\overrightarrow{OA}\right)=7$

7.28 Έστω τα σημεία $A(0,1)$, $B(-1,2)$ και $\Gamma(1,-2)$. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων M για τα οποία ισχύουν: $(MAB)=3(AB\Gamma)$

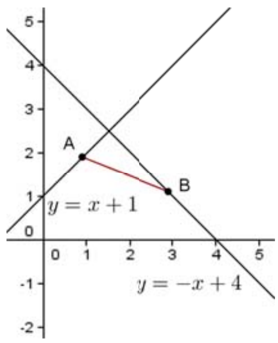
ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΙ ΤΟΠΟΙ ΚΑΙ ΑΚΡΟΤΑΤΑ



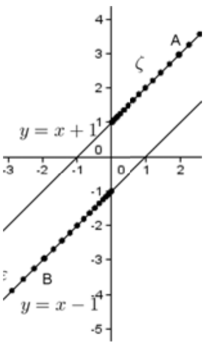
7.29 Για κάθε $\kappa \in R$ δίνονται τα σημεία $A(\kappa,\kappa+1)$ και $B(\kappa,\kappa+2)$

A) Να βρείτε τους γεωμετρικούς τόπους των σημείων A και B στο επίπεδο

B) Να βρείτε το μέγιστο και το ελάχιστο $|\overrightarrow{AB}|$



7.30 Για κάθε $\kappa \in R$ δίνονται τα σημεία $A(\kappa,\kappa+1)$ και $B(\kappa+2,2-\kappa)$



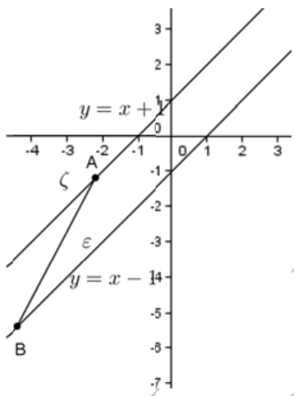
A) Βρείτε τους γεωμετρικούς τόπους των A και B στο επίπεδο

B) Να βρείτε το ελάχιστο $|\overrightarrow{AB}|$

7.31 Για κάθε $\kappa \in R$ δίνονται τα σημεία $A(\kappa^2,\kappa^2+1)$ και $B(\kappa^2,\kappa^2-1)$

A) Να βρείτε τους γεωμετρικούς τόπους των σημείων A και B στο επίπεδο

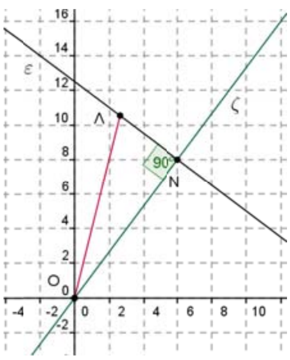
B) Να βρείτε το ελάχιστο $|\overrightarrow{AB}|$



7.32 Για κάθε $\kappa \in R$ δίνονται τα σημεία $A(\kappa,\kappa+1)$ και $B(2\kappa,2\kappa-1)$

A) Να βρείτε τους γεωμετρικούς τόπους των σημείων
A και B στο επίπεδο

B) Να βρείτε το ελάχιστο $|\overrightarrow{AB}|$



7.33 Για κάθε $\lambda \in R$ δίνονται τα σημεία $\Lambda\left(4\lambda, \frac{50}{4} - 3\lambda\right)$

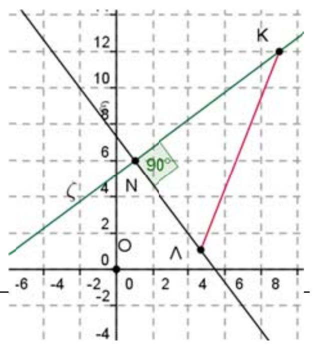
A) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων Λ στο επίπεδο

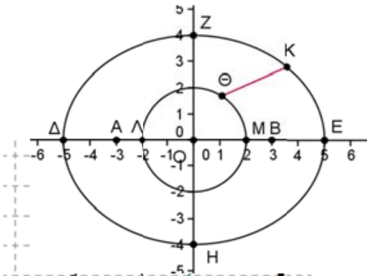
B) Αν O είναι η αρχή των αξόνων να βρείτε ελάχιστο $|\overrightarrow{O\Lambda}|$ καθώς ο $\lambda \in R$

7.34 Για κάθε $\lambda \in R$ δίνονται τα σημεία $\Lambda\left(3\lambda, \frac{22}{3} - 4\lambda\right)$

A) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων Λ στο επίπεδο

B) Αν K είναι το σημείο $K(9,12)$ να βρείτε το ελάχιστο $|\overrightarrow{K\Lambda}|$ καθώς ο $\lambda \in R$

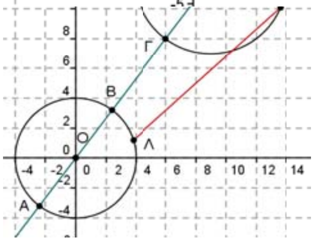




7.35 Για κάθε $\kappa \in R$ δίνονται τα σημεία $M(9-\sigma\upsilon\nu\kappa, 12-\eta\mu\kappa)$

A) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των M στο επίπεδο

B) Αν $\Lambda(-3,3)$ να βρείτε το ελάχιστο και μέγιστο $|\overrightarrow{\Lambda M}|$

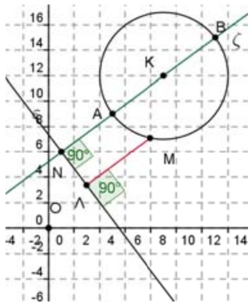


7.36 Για κάθε $\kappa \in R$ και $\lambda \in R$ δίνονται τα σημεία $M(9-\sigma\upsilon\nu\kappa, 12-\eta\mu\kappa)$ και $\Lambda(\sigma\upsilon\nu\lambda, \eta\mu\lambda)$

A) Να βρείτε τους γεωμετρικούς τόπους των σημείων Λ και M στο επίπεδο

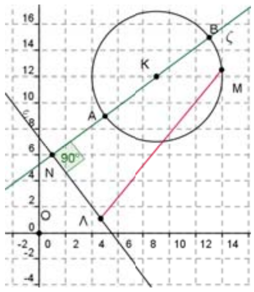
B) Να βρείτε το ελάχιστο και μέγιστο $|\overrightarrow{\Lambda M}|$

7.37 Για κάθε $\kappa \in R$ δίνονται τα σημεία $M(9-\sigma\upsilon\nu\kappa, 12-\eta\mu\kappa)$ και η ευθεία $(\varepsilon): 4x+3y=22$



A) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων M στο επίπεδο

B) Για κάθε $\kappa \in R$, να βρείτε την ελάχιστη και τη μέγιστη απόσταση των σημείων M από την ευθεία (ε)

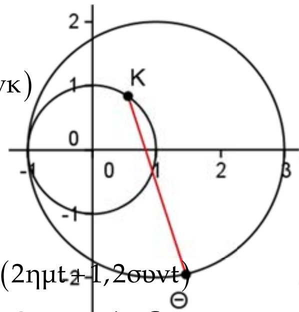


7.38 Για κάθε $\kappa \in R$ και $\lambda \in R$ δίνονται τα σημεία $M(9-\sigma\upsilon\nu\kappa, 12-\eta\mu\kappa)$ και $\Lambda\left(3\lambda, \frac{22}{3} - 4\lambda\right)$

A) Να βρείτε τους γεωμετρικούς τόπους των σημείων M και N στο επίπεδο

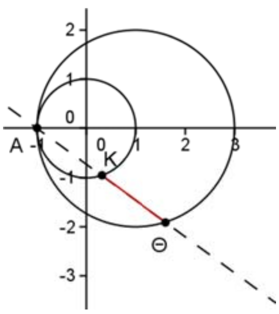
B) να βρείτε το ελάχιστο $|\overrightarrow{\Lambda M}|$ καθώς ο $\kappa \in R$ και ο $\lambda \in R$

7.39 Για κάθε $\kappa \in R$ και $t \in R$ δίνονται τα σημεία $K(\eta\mu t, \sigma\upsilon\nu t)$ και $\Theta(2\eta\mu\kappa+1, 2\sigma\upsilon\nu\kappa)$



A) Να βρείτε τους γεωμετρικούς τόπους των σημείων K και Θ στο επίπεδο

B) Να βρείτε ελάχιστο και το μέγιστο $|\overrightarrow{\Theta K}|$ καθώς ο $t \in R$ και ο $\kappa \in R$



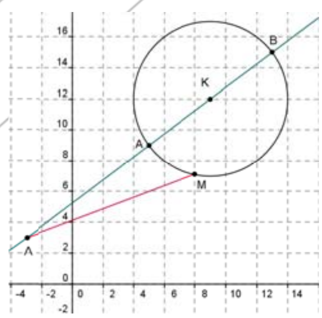
7.40 Για κάθε $t \in R$ δίνονται τα σημεία $K(\eta\mu t, \sigma\upsilon\nu t)$ και $\Theta(2\eta\mu t+1, 2\sigma\upsilon\nu t)$

A) Να βρείτε τους γεωμετρικούς τόπους των σημείων K και Θ στο επίπεδο

B) Να αποδείξετε ότι τα σημεία A, K και Θ είναι συνευθειακά

Γ) Να βρείτε ελάχιστο και το μέγιστο $|\overrightarrow{\Theta K}|$ καθώς ο $t \in R$

7.41 Για κάθε $\kappa \in R$ και $t \in R$ δίνονται τα σημεία $K(5\sigma\upsilon\nu t, 4\eta\mu t)$ και $\Theta(2\eta\mu t, 2\sigma\upsilon\nu t)$



A) Να βρείτε τους γεωμετρικούς τόπους των σημείων K και Θ στο επίπεδο

B) Να βρείτε ελάχιστο και το μέγιστο $|\overrightarrow{\Theta K}|$ καθώς ο $t \in R$ και ο $\kappa \in R$

8 ΓΕΝΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ

8.01 Για τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ ισχύουν οι σχέσεις $2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta} = (4, -2)$ και $\vec{\alpha} - 3\vec{\beta} = (-7, 8)$.

Α) Να δείξετε ότι $\vec{\alpha} = (-1, 2)$ και $\vec{\beta} = (2, -2)$

Β) Να βρεθεί ο πραγματικός αριθμός κ, ώστε τα διανύσματα $\kappa\vec{\alpha} + \vec{\beta}$ και $2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta}$ να είναι κάθετα.

Γ) Να αναλυθεί το διάνυσμα $\vec{\gamma} = (3, -1)$ σε δύο κάθετες συνιστώσες, από τις οποίες η μία να είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{\alpha}$

8.02 Σε καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων xOy, η εξίσωση ευθείας $(\lambda-1)x+(\lambda+1)y-\lambda-3=0$, όπου $\lambda \in R$, περιγράφει τη φωτεινή ακτίνα που εκπέμπει ένας περιστρεφόμενος φάρος Φ.

Α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του φάρου Φ.

Β) Τρία πλοία βρίσκονται στα σημεία $K(2,2)$, $\Lambda(-1,5)$ και $M(1,3)$. Να βρείτε τις εξισώσεις των φωτεινών ακτίνων που διέρχονται από τα πλοία K, Λ και M.

Γ) Να υπολογίσετε ποιο από τα πλοία K και Λ βρίσκεται πλησιέστερα στη φωτεινή ακτίνα που διέρχεται από το πλοίο M.

Δ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν της περιοχής που ορίζεται από το φάρο Φ και τα πλοία Λ και M.

8.03 Δίνεται η εξίσωση $(\varepsilon): (\lambda^2-1)x+2\lambda y-\lambda^2-2\lambda-\gamma=0$ με $\lambda,\mu \in R$

Α) Να αποδείξετε ότι για κάθε τιμή του λ η εξίσωση παριστάνει ευθεία γραμμή.

Β) Αν $\gamma=-1$,να αποδείξετε ότι όλες οι ευθείες που ορίζονται από την (ε) διέρχονται από το ίδιο σημείο.

Γ) Αν $\gamma=1$ να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων εκείνων που από το καθένα διέρχεται μόνο μια ευθεία η οποία επαληθεύει την παραπάνω εξίσωση

8.04 Α Δίνεται η εξίσωση $(x-1)(x-3)+(y-3)(y-5)=0$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση αυτή παριστάνει κύκλο και να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του.

Β Σε τοπογραφικό σχεδιάγραμμα, με καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων xOy τα σημεία $A(1,3)$, $B(3,3)$, $\Gamma(3,5)$ και $\Delta(1,5)$ παριστάνουν τις θέσεις τεσσάρων δήμων. Να αποδείξετε ότι μπορεί να χαραχθεί περιφερειακός κυκλικός δρόμος που να διέρχεται από τους τέσσερις δήμους.

Γ Αν θεωρήσουμε ότι στο ίδιο σύστημα αξόνων του ερωτήματος Β, οι συντεταγμένες ενός αυτοκινήτου K για κάθε χρονική στιγμή t, $(t>0)$ είναι $(t,t+2)$, να βρείτε αν η γραμμή, στην οποία κινείται το αυτοκίνητο K, συναντά τον κυκλικό περιφερειακό δρόμο και αν ναι, σε ποια σημεία;

8.05 Σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων Oxy δίνονται τα σημεία $A(2,3)$ και $B(3,-2)$.

Α Να δείξετε ότι το τρίγωνο OAB είναι ορθογώνιο και ισοσκελές.

Β Να βρείτε σημείο Μ του άξονα $x'x$, ώστε τα σημεία A, M, B να είναι συνευθειακά.

8.06 Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ για το οποίο γνωρίζουμε ότι Α(-4,3) και η μια διαγώνιος του έχει εξίσωση x-ψ+1=0. Να προσδιορίσετε τις συντεταγμένες των κορυφών του καθώς και το μήκος της πλευράς του.

8.07 Δίνεται ο κύκλος C: $x^2+y^2=25$ και $(\varepsilon_1),(\varepsilon_2)$ οι εφαπτόμενες του κύκλου από το σημείο $M(0,-10)$. Αν A και B είναι τα σημεία επαφής των $(\varepsilon_1),(\varepsilon_2)$ με τον κύκλο,να βρείτε

Α) τις εξισώσεις των εφαπτομένων $(\varepsilon_1),(\varepsilon_2)$

Β) τις συντεταγμένες των σημείων επαφής A και B

Γ) την εξίσωση της παραβολής που έχει κορυφή την αρχή των αξόνων και διέρχεται από τα σημεία A και B.

8.08 Αν $\vec{PA}+\vec{PB}-2\vec{P\Gamma}=\vec{0}$ και $|\vec{PA}|=6$, $|\vec{PB}|=|\vec{P\Gamma}|=2\sqrt{3}$ να δείξετε ότι:

Α τα σημεία A, B, Γ είναι συνευθειακά και ότι το σημείο Γ είναι ανάμεσα στα A, B

Β η γωνία APB είναι 90^o

Γ το διάνυσμα $\vec{v}=\vec{PB}+\vec{P\Gamma}$ είναι κάθετο στο $\vec{A\Gamma}$.

8.09 Ενός παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$, η πλευρά AB ανήκει στην ευθεία με εξίσωση $3x-7y+27=0$ και η πλευρά ΑΔ στην ευθεία $4x+y+5=0$. Οι διαγώνιοι $A\Gamma$, $B\Delta$ του παραλληλογράμμου τέμνονται στο σημείο $K\left(2,\frac{5}{2}\right)$.

Α Να αποδείξετε ότι η κορυφή Γ έχει συντεταγμένες $(6,2)$.

Β Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας στην οποία ανήκει η πλευρά $B\Gamma$.

Γ Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας στην οποία ανήκει η διαγώνιος $B\Delta$.

8.10 Η παραβολή με εξίσωση $y^2=\alpha x$ διέρχεται από το σημείο $A(2,4)$, όπου $\alpha\in R$.

Α. Να αποδείξετε ότι η εστία της παραβολής είναι το σημείο $E(2,0)$.

Β. Έστω Ε' το συμμετρικό της εστίας E ως προς τον άξονα $y'y$. Αν $M(x,y)$ είναι ένα οποιοδήποτε σημείο για το οποίο ισχύει $\vec{ME}^2=\vec{ME}\cdot\vec{E'E}$ να αποδείξετε ότι το σημείο $M(x,y)$ ανήκει στον κύκλο με κέντρο την αρχή των αξόνων $O(0,0)$ και ακτίνα 2

Γ Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων του παραπάνω κύκλου που διέρχονται από το σημείο A.

8.11 Δίνεται η εξίσωση $(\varepsilon): x^2+y^2-2x\sigma\upsilon\nu\theta-2y\eta\mu\theta-1=0$, $0\le\theta<2\pi$

Α. Να αποδείξετε ότι για κάθε θ η (ε) παριστάνει κύκλο του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα

Β. Αν $\theta=\frac{\pi}{2}$, να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου στο σημείο $M(1,2)$.

Γ. Να αποδείξετε ότι για τις διάφορες τιμές του θ τα κέντρα των παραπάνω κύκλων βρίσκονται σε κύκλο με κέντρο $O(0,0)$ και ακτίνα $\rho=1$.

8.12 Δίνεται η παραβολή $y^2=4x$. Να βρείτε:

Α. τις ευθείες που διέρχονται από την εστία Ε και απέχουν από το $(0,0)$ απόσταση ίση με $\frac{\sqrt{2}}{2}$

Β την εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής που είναι παράλληλη στην ευθεία $y=x-1$.

8.13 Δίνονται τα σημεία του επιπέδου $A(1,1)$ και $B(5,3)$.

Α Να αποδείξετε ότι ο συντελεστής διεύθυνσης του διανύσματος $\vec{AB}$ είναι ίσος με $\frac{1}{2}$

Β Να αποδείξετε ότι η μεσοκάθετος του ευθ. τμήματος ΑΒ είναι η ευθεία ε: $y=-2x+8$.

Γ Έστω M το μέσο του τμήματος AB και Γ, Δ τα σημεία τομής του άξονα $x'x$ με την ευθεία AB και την μεσοκάθετο ε αντίστοιχα. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που διέρχεται από τα σημεία M, Γ και Δ.

8.14 Α. Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 + 6\mu x + 8\lambda y = 0$, όπου μ, λ πραγματικοί αριθμοί διάφοροι του μηδενός. Να δείξετε ότι, για κάθε τιμή των μ, λ, η παραπάνω εξίσωση παριστάνει κύκλο που διέρχεται το $O(0,0)$.

Β. Έστω ότι για τους πραγματικούς αριθμούς μ, λ ισχύει η σχέση $3\mu + 2\lambda = 0$.

α. Να δείξετε ότι, όλοι οι κύκλοι που ορίζονται από την εξίσωση $x^2+y^2+6\mu x+8\lambda y=0$ για τις διάφορες τιμές των μ και λ, έχουν τα κέντρα τους σε ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

β. Να βρείτε τα μ, λ έτσι, ώστε, αν Α, Β είναι τα σημεία τομής του αντίστοιχου κύκλου με την ευθεία

$x + y + 2 = 0$, να ισχύει $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} = 0$.

γ. Για τις τιμές των μ, λ που βρήκατε στο ερώτημα β να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΟΒ.

8.15 Το σημείο $A(7,5)$ είναι μία κορυφή τετραγώνου του οποίου η μία διαγώνιος βρίσκεται στην ευθεία $3x+y-6=0$

Α Να βρείτε την εξίσωση της άλλης διαγωνίου του τετραγώνου.

Β Να δείξετε ότι το κέντρο του τετραγώνου είναι το σημείο $K(1,3)$

Γ Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που διέρχεται από τις κορυφές του παραπάνω τετραγώνου.

8.16 Δίνεται η εξίσωση $x^2+y^2-4x+2y+3=0$ και το σημείο $M(2,1)$.

Α Να αποδείξετε ότι η εξίσωση αυτή παριστάνει κύκλο με κέντρο το σημείο $K(2,-1)$ και ακτίνα $\rho=\sqrt{2}$.

Β Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων του κύκλου που διέρχονται από το σημείο $M(2,1)$.

Γ Αν A, B είναι τα σημεία επαφής των παραπάνω εφαπτομένων με τον κύκλο, να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου MAB.

8.17 Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ για τα οποία ισχύουν $|\vec{\alpha}|=2$, $|\vec{\beta}|=3$ και $|2\vec{\alpha}-\vec{\beta}|=7$

Α Να υπολογίσετε την γωνία $(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})$. Β Να αποδείξετε ότι: $3\vec{\alpha}=-2\vec{\beta}$

8.18 Δίνεται ο κύκλος με εξίσωση $x^2+y^2=9$.

Α Αν το σημείο $P(x_o,y_o)$ ανήκει στον παραπάνω κύκλο, να δείξετε ότι το σημείο $M\left(\frac{5}{3}x_o,\frac{4}{3}y_o\right)$ ανήκει σε έλλειψη της οποίας να υπολογίσετε την εκκεντρότητα.

Β Να βρείτε την εξίσωση της ισοσκελούς υπερβολής η οποία έχει τις ίδιες εστίες με την παραπάνω έλλειψη.

Γ Να βρείτε τις εξισώσεις των ασυμπτώτων της υπερβολής του ερωτήματος β καθώς και τη γωνία που σχηματίζουν οι ασύμπτωτες.

8.19 Δίνονται οι εξισώσεις $(\lambda-\kappa-1)x+2(\kappa-\lambda)y+\lambda-\kappa+1=0$ (1) και $x^2+y^2+(\kappa-1)x+(\lambda+2)y-\kappa=0$ (2) με $\kappa,\lambda\in R$

Α) Να δείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει ευθεία για κάθε $\kappa,\lambda\in R$ η οποία διέρχεται από σταθερό σημείο Α.

Β) Να βρεθούν οι τιμές των $\kappa,\lambda\in R$ ώστε η εξίσωση (2) να παριστάνει κύκλο του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα σαν συνάρτηση των κ,λ.

Γ) Αν τα κ,λ παίρνουν τις ίδιες τιμές και για τις δύο εξισώσεις, να βρείτε την εξίσωση του κύκλου και της ευθείας ώστε ο κύκλος να εφάπτεται της ευθείας στο σημείο A.

8.20 Δίνεται ο κύκλος $C_1: x^2+y^2=2$ και η εξίσωση $x^2+y^2-2+\lambda(x-y+2)=0$ (1)

Α) Να προσδιορίσετε την εξίσωση (ε) της εφαπτομένης ε του C_1 στο σημείο του $A(-1,1)$

Β) Να εξετάσετε για ποιες τιμές του $\lambda\in R$ η (1) παριστάνει εξίσωση κύκλου.

Γ) Τι παριστάνει η (1) για $\lambda=2$

Δ) Να αποδείξετε ότι η (1) διέρχεται από σταθερό σημείο, το οποίο και να βρεθεί.

Ε) Να αποδείξετε ότι κάθε κύκλος της (1) εφάπτεται στην ευθεία (ε) (του πρώτου ερωτήματος)

Στ) Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των κέντρων της (1).

8.21 Δίνονται τα μοναδιαία διανύσματα $\vec{u},\vec{v}$ και ο κύκλος $C: x^2+y^2-\left|\sqrt{3}\vec{u}+\vec{v}\right|x+\left|\vec{u}-\sqrt{3}\vec{v}\right|y-4=0$.

Αν ο κύκλος C διέρχεται από το σημείο $A(\sqrt{2},\sqrt{2})$, να αποδείξετε ότι :

Α) Τα διανύσματα $\vec{u},\vec{v}$ είναι κάθετα, δηλαδή $\vec{u}\perp\vec{v}$

Β) Ο κύκλος C έχει κέντρο το σημείο Κ(1,-1) και ακτίνα $\rho=\sqrt{6}$

Γ) Να αποδείξετε ότι η ευθεία $y=x+2\sqrt{3}-2$ εφάπτεται στο κύκλο C

8.22 Η κορυφή Α ενός παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ έχει συντεταγμένες Α(-4,6) .Η πλευρά ΒΓ ανήκει στην ευθεία με εξίσωση $x+2y=2$. Επίσης, είναι γνωστό ότι μια εκ των υπολοίπων πλευρών, ανήκει στη ευθεία $\varepsilon: x-3y+8=0$.

Α) Να καθορίσετε την πλευρά του ΑΒΓΔ η οποία ανήκει στην ευθεία (ε) και να βρείτε την εξίσωση της απέναντι πλευράς της.

Β) Να αποδείξετε ότι το κέντρο του παραλληλογράμμου είναι το σημείο Κ(-3,4).

Γ) Να βρείτε την εξίσωση της παραβολής η οποία έχει άξονα συμμετρίας τον xx', κορυφή την αρχή των αξόνων και διέρχεται από το κέντρο Κ του παραλληλογράμμου.

8.23 Δίνεται η οικογένεια $\varepsilon_\lambda: (\lambda+1)x+(\lambda-1)y+2\lambda=0$ όπου $\lambda\in R$ και η παραβολή $y^2=4x$

Α) Αποδείξτε ότι για κάθε τιμή της παραμέτρου λ η ε_λ παριστάνει ευθεία και ότι όλες οι ευθείες ε_λ διέρχονται από σταθερό σημείο.

Β) Να αποδειχθεί ότι η ευθεία ε της οικογένειας η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων είναι η διχοτόμος της 1ης και 3ης γωνίας των αξόνων.

Γ) Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής η οποία είναι παράλληλη προς την ευθεία ε του προηγούμενου ερωτήματος.

8.24 Δίνεται η εξίσωση (ε) : κx -(κ+1)ψ + 2=0 , κ∈R.

Δ1) Να αποδείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση παριστάνει ευθεία για κάθε τιμή του

Δ2) Να αποδείξετε ότι οι ευθείες με εξίσωση (ε) διέρχονται για κάθε τιμή του κ από σταθερό σημείο.

Δ3) Να βρείτε τις τιμές του κ για τις οποίες η παραπάνω ευθεία σχηματίζει με τους άξονες τρίγωνο με εμβαδό 4τμ

8.25 Δίνεται η εξίσωση $2x^2-16x+2y^2-16y+48=0$

Δ1) Να δείξετε ότι παριστάνει κύκλο με κέντρο Κ(4,4) και ακτίνα ρ=$2\sqrt{2}$

Δ2) Να δείξετε ότι η ευθεία ε:y=x-4 είναι εφαπτομένη του παραπάνω κύκλου.

Δ3) Αν Α(4,0) το σημείο που η ευθεία ε τέμνει τον άξονα $x'x$. Να βρεθεί η άλλη εφαπτομένη του κύκλου που διέρχεται από το σημείο Α.

Δ4) Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων τομής του κύκλου και της ευθείας ΟΚ όπου Ο η αρχή των αξόνων και Κ το κέντρο του παραπάνω κύκλου.

8.26 Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1 : 2\lambda^2 x - \lambda y = 2$, $\varepsilon_2 : 4\lambda x + y = \frac{1}{\lambda}$ με $\lambda \in R^*$.

Δ1 Να αποδείξετε ότι οι ευθείες τέμνονται για κάθε $\lambda \in R^*$

Δ2 Να αποδείξετε ότι το σημείο τομής τους είναι το $M\left(\frac{1}{2\lambda^2}, -\frac{1}{\lambda}\right)$.

Δ3 Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων M για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in R^*$

8.27 Δίνονται τα μη μηδενικά διανύσματα $\vec{u}, \vec{v}$ με γωνία $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = 90^0$.

Α) Να αποδείξετε ότι οι ευθείες $\varepsilon_1 : |\vec{u}+\vec{v}|x + |\vec{u}-\vec{v}|y + 5 = 0$ και $\varepsilon_2 : |\vec{u}-\vec{v}|x + |\vec{u}+\vec{v}|y + 25 = 0$ είναι παράλληλες.

Β) Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ αν για τα $\vec{u}, \vec{v}$ ισχύει ότι $|\vec{u}| = 3, |\vec{v}| = 4$

Γ) Αν $\varepsilon_1 : x + y + 1 = 0$ και $\varepsilon_2 : x + y + 5 = 0$, να βρείτε την εξίσωση `του κύκλου C ο οποίος εφάπτεται στις $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ και το κέντρο του είναι επί της ευθείας $\varepsilon : 2x - y = 0$.

8.28 Δίνονται τα διανύσματα $\vec{u}, \vec{v}$ με $|\vec{u}| = 1, |\vec{v}| = 2$ και η γωνία των διανυσμάτων 60^0.

Α) Να υπολογιστούν η ακτίνα και το κέντρο του κύκλου $C : x^2 + y^2 - (\vec{u}\cdot\vec{v} + 5)x - |2\vec{u} - \vec{v}|y + 9 = 0$

Β) Να βρεθούν οι εξισώσεις των εφαπτομένων που άγονται από το σημείο $A(2,3)$ προς τον κύκλο C

8.29 Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 - 4\kappa x - 2y + 4\kappa = 0 : (1)$, με $\kappa \in R$

Δ1 Να δείξετε ότι η (1) παριστάνει κύκλο (C_κ) για κάθε $\kappa \in R$ με $\kappa \neq \frac{1}{2}$ και να βρείτε συναρτήσει του κ το κέντρο του και την ακτίνα του

Δ2 Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των κέντρων (C_κ) για τις διάφορες τιμές του $\kappa \in R - \left\{\frac{1}{2}\right\}$

Δ3 Να αποδείξετε ότι οι (C_κ) διέρχονται από σταθερό σημείο Μ του οποίου να προσδιορίσετε τις συντεταγμένες

8.30 Δίνεται ο κύκλος $x^2 + (y+1)^2 = 5$ και το σημείο $A(0,-6)$

Α) Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων ε_1, ε_2 του κύκλου που διέρχονται από το σημείο Α

Β) Αν $\varepsilon_1 :\ 2x - y - 6 = 0$ και $\varepsilon_2 :\ 2x + y + 6 = 0$ να βρείτε σε ποια σημεία τέμνουν τον άξονα $x'x$

Γ) Να βρείτε την εξίσωση της έλλειψης που έχει εστίες τα παραπάνω σημεία και μήκος μεγάλου άξονα 10

8.31 Έστω Μ(5–λ, λ–3), λ∈IR σημεία σε σύστημα Oxy.

Δ1 Να δείξετε ότι τα σημεία Μ ανήκουν σε ευθεία ε, της οποίας να βρείτε την εξίσωση.

Δ2 Να δείξετε ότι το σημείο Μο (1, 1) της ε, βρίσκεται πλησιέστερα στην αρχή των αξόνων.

Δ3 Να βρείτε την εξίσωση έλλειψης C, που έχει κέντρο το Ο, μια κορυφή της το σημείο (2,0) και περνά από το Μο.

8.32 Σε σύστημα Οxψ δίνονται τα σημεία Ρ(–2,0) και Σ (2, 0).

Δ1 Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Μ(x , ψ) του επιπέδου για τα οποία ισχύει $\vec{PM}\cdot\vec{\Sigma M}=0$ είναι ο κύκλος $x^2+\psi^2=4$.

Δ2 Όταν το σημείο Ν(κ, λ) κινείται στον παραπάνω κύκλο να αποδείξετε ότι το $T\left(\frac{\kappa}{2},\lambda\right)$ κινείται σε έλλειψη.

Δ3 Αν η εξίσωση της έλλειψης είναι $x^2+\frac{y^2}{4}=1$ να βρείτε τις εστίες Ε και Ε' και την εκκεντρότητα της

Δ4 Να αποδείξετε ότι $E\hat{B}O=60^o$ όπου Β μια από τις κορυφές του μικρού άξονα της έλλειψης και Ο η αρχή των αξόνων.

8.33 Δίνονται οι $(\varepsilon_\lambda): y=(\lambda-1)x+4$ και $(\varepsilon'_\lambda): (3-\lambda)x-y+\lambda=0$, με $\lambda\in R$

Γ1 Να δειχθεί ότι:

α) Οι ευθείες (ε_λ) διέρχονται από το σημείο $A(0,4)$ για κάθε πραγματική τιμή του λ

β) Οι ευθείες (ε'_λ) διέρχονται από σταθερό σημείο Β του οποίου να βρείτε τις συντεταγμένες

Γ2α) Να βρεθεί η τιμή του λ ώστε οι ευθείες να είναι παράλληλες

Για την τιμή του λ που βρήκατε στο Γ2α):

β) Να βρείτε την απόσταση των παραλλήλων ευθειών που προκύπτουν από τις (ε_λ) και (ε'_λ)

γ) Να βρείτε το εμβαδόν τετραγώνου που έχει τις δύο απέναντι πλευρές τους στις ευθείες αυτές

8.34 Δίνονται τα μη μηδενικά διανύσματα $\vec{\alpha}\neq\vec{\beta}$, και η εξίσωση

$$x^2+y^2-2\left|\vec{\alpha}-2\vec{\beta}\right|x-2\left|2\vec{\alpha}-\vec{\beta}\right|y+\vec{\alpha}^2+\vec{\beta}^2=0 \quad (1)$$

Δ1. Δείξτε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο ακτίνας $\rho=2\left|\vec{\alpha}-\vec{\beta}\right|$

Δ2. Για $|\vec{\alpha}|=1, |\vec{\beta}|=1$ και $\sigma\upsilon\nu(\vec{\alpha},\vec{\beta})=\frac{1}{4}$, να αποδείξετε ότι ο κύκλος (1) παίρνει τη μορφή

$C: (x-2)^2+(y-2)^2=6$

Δ3. Να εξετάσετε αν η εστία της παραβολής $y^2=8x$ βρίσκεται στο εσωτερικό του κύκλου C του ερωτήματος Δ2.

8.35 Α) Δίνεται η $(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}-1)x+(2-\vec{\alpha}\vec{\beta})y+4=0$ (1). με $\vec{\alpha}.\vec{\beta}\in R$

α) να αποδείξετε ότι όλες οι παραπάνω ευθείες διέρχονται από σταθερό σημείο

β) Αν $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ μοναδιαία διανύσματα με $\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)=\frac{\pi}{3}$, να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που παριστάνει η (1)

Β) Δίνεται ο κύκλος $(x-\kappa)^2+(y+2)^2=\frac{1}{10}$. Να βρείτε την τιμή του κ, έτσι ώστε η ευθεία του θέματος Α, ερωτήματος (ii), να εφάπτεται του παραπάνω κύκλου.

8.36 Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(2x-1,y+2)$ και $\vec{\beta}=(2x+1,y-2)$.

Δ1. Αν $\vec{\alpha}\perp\vec{\beta}$, να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος C_1 των σημείων Μ(χ,y) είναι έλλειψη

Δ2. Αν ισχύει ότι $\left|\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right|^2+12y^2-64=0$, να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος C_2 των σημείων Μ(x,y) είναι κύκλος , του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα.

Δ3. Να βρείτε τα κοινά σημεία των δύο παραπάνω γεωμετρικών τόπων C_1 και C_2.

Δ4. Να βρείτε τις εφαπτόμενες του παραπάνω κύκλου οι οποίες άγονται από το σημείο Α(2,2) και στην συνέχεια να βρείτε το μήκος της χορδής που αποκόπτει η μια από αυτές από την έλλειψη.

8.37 Θεωρούμε τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(x,y)$ και $\vec{\beta}=(\sigma\upsilon\nu\theta,\eta\mu\theta)$, όπου θ παράμετρος τέτοια ώστε $\theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

Α1. Δείξτε ότι η εξίσωση $\vec{\alpha}.\vec{\beta}=\kappa$ παριστάνει ευθεία για κάθε θ ε (0, π/2), όπου κ πραγματικός αριθμός σταθερός.

Α2. Αν $P(x_0, y_0)$ είναι το ίχνος της κάθετης που φέρνουμε από την αρχή των αξόνων στην παραπάνω ευθεία, δείξτε ότι $x_0^2+y_0^2=\kappa^2$.

Β1. Να δείξετε ότι η εξίσωση $(x^2+y^2-\kappa^2)+\lambda(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}-\kappa)=0$ παριστάνει κύκλο για κάθε πραγματική τιμή του λ εκτός της τιμής –2κ. Βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του κύκλου.
Τι συμβαίνει όταν λ = -2κ;

Β2. Να δείξετε ότι ο κύκλος διέρχεται από το σημείο Ρ του ερωτήματος A_2.

8.38 Δίνεται ο κύκλος $C:x^2+y^2=4$ και το σημείο Α(2,4). Να δείξετε ότι:

Α) το Α είναι εξωτερικό σημείο του κύκλου

Β) να βρείτε τις εφαπτομένες του κύκλου που άγονται από το Α

Γ) αν Β, Γ τα σημεία επαφής των προηγούμενων εφαπτομένων να βρείτε την προβολή του Α στη ΒΓ.

Δ) να βρείτε το συμμετρικό του Α ως προς την ΒΓ

Ε) να βρείτε τη γωνία των εφαπτομένων

Στ) να βρείτε το εμβαδό του τριγώνου ΑΒΓ.

8.39 Δίνεται η ευθεία ε με εξίσωση $\left(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}\right)x-\left|\vec{\alpha}\right|y+2=0$ και φ η οξεία γωνία των διανυσμάτων $\vec{\alpha},\vec{\beta}$. Αν το διάνυσμα $\vec{\gamma}=(2,-1)$ είναι κάθετο στην ευθεία ε, τότε:

Α Δείξτε ότι $\vec{\alpha}\neq\vec{0}$ και ότι $|\vec{\beta}|=\frac{2}{\sigma\upsilon\nu\varphi}$

Β Αν επιπλέον γνωρίζετε ότι $\varphi=60^\circ$ και $\vec{\alpha}=(-3,4)$ τότε:

α) Δείξτε ότι $|\vec{\beta}|=4$

β) Να υπολογίσετε το μέτρο του διανύσματος $\vec{\alpha}-2\vec{\beta}$

8.40 Δίνεται η εξίσωση $x^2+y^2-\kappa^2 x-2\kappa y+\kappa^2=0$.

Δ1) Να δείξετε ότι παριστάνει κύκλους για κάθε $\kappa \neq 0$ πραγματικό αριθμό και να βρείτε τα κέντρα τους και τις ακτίνες τους συναρτήσει του κ.

Δ2) Να δείξετε ότι οι παραπάνω κύκλοι εφάπτονται στον άξονα ψ'ψ για κάθε $\kappa \neq 0$. Για ποιες τιμές του $\kappa \neq 0$ εφάπτεται και στον άξονα x'x;

Δ3) Να δείξετε ότι τα κέντρα των κύκλων ανήκουν στην παραβολή $y^2=2x$

8.41 Δίνονται τα σημεία $A(-3,5)$ και $B(4,-2)$. Τότε:

Α) Να βρείτε το σημείο Μ του άξονα yy' που ισαπέχει από τα Α και Β

Β) Να βρείτε την προβολή του διανύσματος $\overrightarrow{AM}$ στο $\overrightarrow{MB}$

Γ) Να αναλύσετε το διάνυσμα $\overrightarrow{AM}$ σε δύο κάθετες μεταξύ τους συνιστώσες, μια από τις οποίες έχει τη διεύθυνση του $\overrightarrow{MB}$

8.42 Δίνεται μοναδιαίο διάνυσμα $\vec{\alpha}$ καθώς και τα διανύσματα $\vec{\beta},\vec{y}$ ώστε: $\vec{y}=2(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta})\cdot\vec{\alpha}-\vec{\beta}$. Να δειχθεί ότι:

Α) $|\vec{y}|=|\vec{\beta}|$

Β) $(\vec{\beta}+\vec{y})//\vec{\alpha}$

Γ) $(\vec{\beta}-\vec{y})\perp\vec{\alpha}$

Δ) $\vec{\beta}=2(\vec{\alpha}\cdot\vec{y})\cdot\vec{\alpha}-\vec{y}$

Ε) Αν $2(\vec{\alpha}\cdot\vec{x}_1)\cdot\vec{\alpha}-\vec{x}_1=2(\vec{\alpha}\cdot\vec{x}_2)\cdot\vec{\alpha}-\vec{x}_2$ να αποδειχτεί ότι $\vec{x}_1=\vec{x}_2$