<u>ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ</u>
<u>ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ</u>
<u>Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ</u>

ΘΕΜΑ 1^{ο}

Δίνεται το τρίγωνο ΑΒΓ με κορυφές Α(-1, 2), Β(3, -2) και Γ(1, 4). Να βρείτε:

α) τις εξισώσεις των πλευρών του.

(24 μονάδες)

β) την εξίσωση του ύψους που φέρνουμε από την κορυφή Β προς την πλευρά ΑΓ.

(13 μονάδες)

γ) την εξίσωση της διαμέσου που φέρνουμε από την κορυφή Α προς την πλευρά ΒΓ.

(13 μονάδες)

ΘΕΜΑ 2^{ο}

Δίνονται η εξίσωση $x^2 - y^2 + 4x - 6y - 5 = 0$ (1) και το σημείο Α(2λ,λ+3)

Να αποδείξετε ότι :

α) η εξίσωση παριστάνει 2 ευθείες κάθετες μεταξύ τους

(10 μονάδες)

β) το σημείο Α κινείται σε μία ευθεία ,η οποία να βρεθεί .

(7 μονάδες)

γ) Αν λ=1 να βρεθεί το συμμετρικό του Α ως προς την ευθεία $(\varepsilon): y = -x - 1$

(8 μονάδες)

3) Δίνονται οι ευθείες ε : (-λ + 2) χ + λy + 3λ - 1 = 0 και ζ : (λ - 1) χ + λy + 5 = 0.
βρείτε τον λ, ώστε να είναι

Α) Να βρείτε τον λ, ώστε να είναι ε // ζ.

(8 μονάδες)

Β) Να βρείτε τον λ, ώστε να είναι $\varepsilon \perp \zeta$

(8 μονάδες)

Γ) Αν λ =1 να βρείτε την γωνία που σχηματίζουν οι δύο ευθείες

(9 μονάδες)

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

Λύση του διαγωνίσματος

Θέμα 1ο

α) $\lambda_{AB} = -1$ και AB: $y - 2 = -x - 1 \Leftrightarrow y = -x + 1$

$\lambda_{B\Gamma} = -3$ και ΒΓ: $y - 4 = -3(x - 1) \Leftrightarrow y = -3x + 7$

$\lambda_{A\Gamma} = 1$ και ΑΓ: $y - 4 = x - 1 \Leftrightarrow y = x - 3$

β) Έστω ΒΔ το ύψος. Τότε $\lambda_{B\Delta}\lambda_{A\Gamma} = -1 \Leftrightarrow \lambda_{B\Delta} = -1$ και ΒΔ: $y + 2 = -(x - 3) \Leftrightarrow y = -x + 1$

γ) Αν Μ το μέσο του ΒΓ, τότε: $x_M = \dfrac{x_B + x_\Gamma}{2} = 2,\ y_M = \dfrac{y_B + xy_\Gamma}{2} = 1$, άρα $M(2,1)$.

$\lambda_{AM} = \dfrac{1-2}{2+1} = -\dfrac{1}{3}$ και ΑΜ: $y - 2 = -\dfrac{1}{3}(x+1) \Leftrightarrow y = -\dfrac{1}{3}x + \dfrac{5}{3}$

Θέμα 2ο

α) $x^2 + 4x + 4 - (y^2 + 6y + 9) = 0 \Leftrightarrow (x+2)^2 = (y+3)^2 \Leftrightarrow x + 2 = \pm(y+3) \Leftrightarrow$

$y = x - 1$ ή $y = -x - 5$ με $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = -1$

β) $\begin{cases} x_A = 2\lambda \\ y_A = \lambda + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_A = 2\lambda \Rightarrow x_A = 2y_A - 6 \Leftrightarrow x_A - 2y_A + 6 = 0 \\ y_A - 3 = \lambda \end{cases}$

Επειδή οι συντεταγμένες του Α επαληθεύουν την ε: $x - 2y + 6 = 0$, το Α κινείται σε αυτή την ευθεία.

γ) $A(2,4)$. Έστω Κ η προβολή του Α στην ε, τότε $\lambda_{AK}\lambda_\varepsilon = -1 \Leftrightarrow \lambda_{AK} = 1$ και

ΑΚ: $y - 4 = 1\cdot(x - 2) \Leftrightarrow y = x + 2$

$\begin{cases} y = x + 2 \\ y = -x - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} y = x + 2 \\ x + 2 = -x - 1 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} y = x + 2 \\ 2x = -3 \end{matrix} \begin{cases} x = -\dfrac{3}{2} \\ y = \dfrac{1}{2} \end{cases}$, άρα $K\left(-\dfrac{3}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$

Αν Β είναι το συμμετρικό του Α ως προς την ε, τότε

$x_K = \dfrac{x_B + x_A}{2} \Leftrightarrow x_B = 2x_K - x_A = -5$ και $y_K = \dfrac{y_B + y_A}{2} \Leftrightarrow y_B = 2y_K - y_A = -3$, άρα

$B(-5,-3)$

Θέμα 3ο

Α) Αν $\vec{\delta}_1 // \varepsilon$ τότε $\vec{\delta}_1 = (\lambda, \lambda - 2)$ και αν $\vec{\delta}_2 // \zeta$, τότε $\vec{\delta}_2 = (\lambda, -\lambda + 1)$

$\varepsilon // \zeta \Leftrightarrow \vec{\delta}_1 // \vec{\delta}_2 \Leftrightarrow \det(\vec{\delta}_1, \vec{\delta}_2) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} \lambda & \lambda - 2 \\ \lambda & -\lambda + 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0$ ή $\lambda = \dfrac{3}{2}$

Β) $\varepsilon \perp \zeta \Leftrightarrow \vec{\delta}_1 \perp \vec{\delta}_2 \Leftrightarrow \vec{\delta}_1 \cdot \vec{\delta}_2 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 + (\lambda - 2)(-\lambda + 1) = 0 \Leftrightarrow \lambda = \dfrac{2}{3}$

Γ) Για $\lambda = 1$ είναι $\vec{\delta}_1 = (1,-1), \vec{\delta}_2 = (1,0)$ και

$\sigma\upsilon\nu(\vec{\delta}_1 \hat{,} \vec{\delta}_2) = \dfrac{\vec{\delta}_1 \cdot \vec{\delta}_2}{|\vec{\delta}_1| \cdot |\vec{\delta}_2|} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow (\vec{\delta}_1 \hat{,} \vec{\delta}_2) = (\varepsilon \hat{,} \zeta) = 45^\circ$