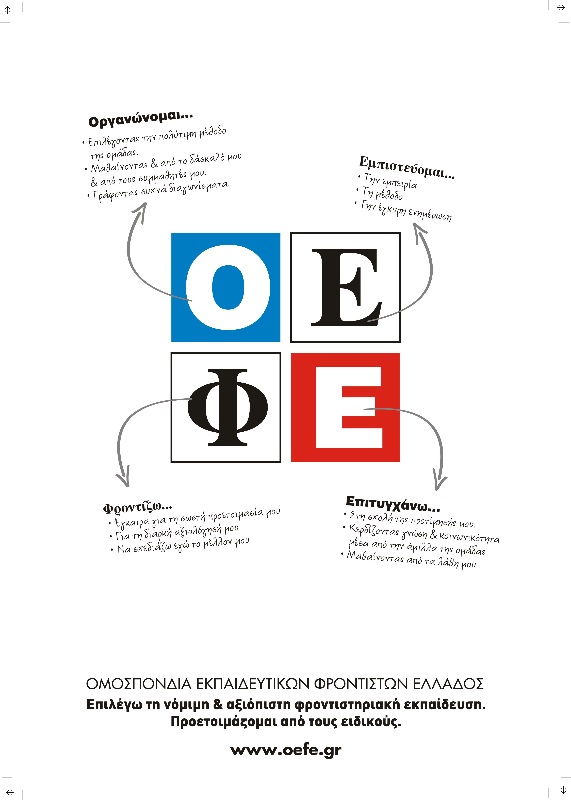
**Επιμέλεια:** *Γιάννης Κάκανος* **(lisari team)**  <http://lisari.blogspot.gr>

**Επαναληπτικά θέματα Γ΄ Λυκείου**

**ΟΕΦΕ 2001 – 2015**

**Μαθηματικά και στοιχεία Στατιστικής**

****

**Αθήνα 2015 – 16**

**ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ ΟΕΦΕ 2001**

**ΘΕΜΑ 1ο**

**Α1.** Ποια από τα παρακάτω μεγέθη είναι μέτρα θέσης και ποια μέτρα διασποράς:

**1.** Διάμεσος **2.** Διακύμανση **3.** Μέση τιμή **4.** Επικρατούσα τιμή

**5.** Εύρος **6.** Τυπική απόκλιση **Μονάδες 6,5**

**Α2.** Έστω Χ μια μεταβλητή που αφορά τα άτομα ενός πληθυσμού. Για ένα συγκεκριμένο δείγμα

μεγέθους ν, οι τιμές της μεταβλητής είναι xi και οι αντίστοιχες συχνότητες vi, με i = 1, 2, ... , k,

όπου k ≤ ν. Να γράψετε ποιος αριθμός εκφράζει τη σχετική συχνότητα fi της τιμής xi και να

αποδείξετε ότι f1+ f2 +...+ fk = 1 **Μονάδες 6**

**Β1.** Στον επόμενο πίνακα φαίνεται η κατανομή των τερμάτων (γκολ) (Χ) που πέτυχε μια ομάδα

ποδοσφαίρου σε 20 αγώνες πρωταθλήματος.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Τέρματα xi** | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| **Αγώνες vi** | 3 | 8 | 4 | 2 | 2 | 1 |

Στις παρακάτω ερωτήσεις 1 – 3, να γράψετε στο τετράδιο σας τον αριθμό της ερώτησης και δίπλα

το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

**1.** Η μέση τιμή είναι:  **Α.** 1,75 **Β.** 3,5 **Γ.** 3,75 **Δ.** 1 **Ε.** 2,5 **Μονάδες 3**

**2.** Η διάμεσος είναι: **Α.** 1,75 **Β.** 3,5 **Γ.** 3,75 **Δ.** 1 **Ε.** 2,5 **Μονάδες 3**

**3.** Η σχετική συχνότητα της τιμής 3 είναι: **Α.** 0 **Β.** 0,1 **Γ.** 0,25 **Δ.** 0,3 **Ε.** 0,4 **Μονάδες 2**

**Β2.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη Σωστό

ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

1. Η διακύμανση και η τυπική απόκλιση έχουν τις ίδιες μονάδες μέτρησης.
2. Το 50% των παρατηρήσεων σε κάθε σύνολο δεδομένων είναι μικρότερες ή ίσες από τη μέση τιμή και το υπόλοιπο 50% είναι μεγαλύτερες ή ίσες από 50%.
3. Δίνονται δύο ομάδες τιμών που έχουν μέση τιμή 50:

**Α ομάδα:** 0 20 40 50 60 80 100

**Β ομάδα:** 0 48 49 50 51 52 100

Μεγαλύτερη διασπορά παρουσιάζει η ομάδα Β. **Μονάδες 4,5**

**ΘΕΜΑ 2ο**

Δίνεται η συνάρτηση f(x) = x3 +3x2 – 9x + α2 – 4α, όπου αєℝ

**Α.** Να αποδείξετε ότι η f παρουσιάζει ένα τοπικό μέγιστο και ένα τοπικό ελάχιστο **Μονάδες 10**

**Β.** Να προσδιορίσετε τις τιμές του α για τις οποίες το τοπικό μέγιστο της f είναι 3–πλάσιο από το

τοπικό ελάχιστο. **Μονάδες 8**

**Γ.** Να βρείτε, αν υπάρχει, την τιμή του x για την οποία ο ρυθμός μεταβολής της f(x) γίνεται ελάχιστος

**Μονάδες 7**

**ΘΕΜΑ 3ο**

Δίνονται δύο ενδεχόμενα Α και Β ενός δειγματικού χώρου Ω για τα οποία

Ρ(Α – Β) =  και Ρ(Β΄– Α) = 

**Α.** Να βρείτε την πιθανότητα Ρ(Α)  **Μονάδες 7**

**B.** Να αποδείξετε ότι η πιθανότητα Ρ(Β) =  **Μονάδες 9**

**Γ.** Να βρείτε την πιθανότητα του ενδεχόμενου να πραγματοποιηθεί μόνο ένα από τα ενδεχόμενα Α και

Β. **Μονάδες 9**

**ΘΕΜΑ 4ο**

Εκτός Ύλης

**ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ ΟΕΦΕ 2002**

**ΘΕΜΑ 1ο**

**Α.** Για δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω να αποδείξετε ότι: Ρ(Α – Β) = Ρ(Α) – Ρ(Α∩Β) **Μονάδες 5**

**Β.** Εκτός Ύλης **Μονάδες 7**

**Γ.** Να δώσετε τους ορισμούς των εννοιών που αναφέρονται στις προτάσεις: (i) έως (iv)

1. Τι λέμε καμπύλη συχνοτήτων μιας συνεχούς ποσοτικής μεταβλητής;
2. Πώς ορίζεται η παράγωγος f ΄(xo) της συνάρτησης f στο xo.
3. Τι είναι εύρος ενός δείγματος;
4. Τι ονομάζουμε στατιστική ομαλότητα;

**Μονάδες 8**

**Δ.** Να γράψετε στο τετράδιό σας τον αριθμό της ερώτησης και δίπλα το γράμμα που αντιστοιχεί στη

σωστή απάντηση.

1. Αν ο ρυθμός μεταβολής μιας συνάρτησης f στο διάστημα Δ =  είνα τότε ο τύπος της f είναι:

**Α.**  **Β.**  **Γ.** 

**Δ.**  **Ε.** Τίποτα από τα Α, Β, Γ, Δ

1. Αν για την πιθανότητα Ρ(Α) του ενδεχομένου Α ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύει:

[Ρ(Α)]2 – 2Ρ(Α) + 1 = 0 ① τότε:

**Α.** Το Α είναι αδύνατο ενδεχόμενο **Β.** Το Α είναι βέβαιο ενδεχόμενο **Γ.** Είναι 0<Ρ(Α)<

**Δ.** Η σχέση ① είναι αδύνατη **Ε.** Τίποτα από τα Α, Β, Γ, Δ **Μονάδες 5**

**ΘΕΜΑ 2ο**

Δίνονται οι συναρτήσεις φ, f, g με f(1) = f ΄(1) = 1 και φ(x) = f(g(x)), g(x) =  με x > 0.

**Α.** Να αποδείξετε ότι: g(1) = φ(1) = 1, g΄(1) = φ΄(1) = 2 **Μονάδες 7**

**Β.** Να εξετάσετε αν η g(x) έχει ακρότατα στο διάστημα Δ = (0, +∞) **Μονάδες 5**

**Γ.** Να υπολογιστεί η τιμή του ορίου  **Μονάδες 4**

**Δ.** **(i)** Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτόμενων ε1, ε2 των γραφικών παραστάσεων των φ και f στα

σημεία τους Α(1, φ(1)) και Β(1, f(1)) αντίστοιχα. **Μονάδες 7**

**(ii)** Να υπολογιστεί η γωνία που σχηματίζει η ε2 με τον άξονα x΄x. **Μονάδες 2**

**ΘΕΜΑ 3ο**

ν τηλεθεατές δήλωσαν την προτίμησή τους σε ένα μόνο από τα κ προγράμματα τα α1, α2, ..., ακ με ν, κєℕ\*. Από τις μετρήσεις προέκυψε ότι τα ποσοστά προτίμησης f(αi) των αi είναι:  και f(αi) = λ∙2i–1 με i = 1, 2, ..., k. και λ σταθερό αριθμό.

**Α.** Να αποδείξετε ότι λ =  και k = 5 **Μονάδες 4**

**B.** Επιλέγουμε τυχαία έναν τηλεθεατή. Να υπολογίσετε τις πιθανότητες των ενδεχομένων:

Α: Να προτίμησε το πρόγραμμα α4.

Β: Να προτίμησε ένα από τα 2 πιο δημοφιλή προγράμματα.

Γ: Να μην προτίμησε το α1.  **Μονάδες 6**

**Γ.** Αν το α4 προτιμήθηκε από 160 άτομα, αν βρείτε το ν. **Μονάδες 5**

**Δ.** **(i)** Να γίνει το ραβδόγραμμα σχετικών συχνοτήτων της μεταβλητής Χ: «ο αριθμός των

προτιμήσεων» που έλαβε κάθε πρόγραμμα. **Μονάδες 7**

**(ii)** Εκτός Ύλης.  **Μονάδες 3**

**ΘΕΜΑ 4ο**

Το πολύγωνο συχνοτήτων της κατανομής (Χ) των ετήσιων μισθών (σε εκατοντάδες ευρώ) ενός δείγματος εργαζομένων, ομαδοποιημένης σε κλάσεις ίσου πλάτους, έχει κορυφές τα σημεία: Α(20, 0), Β(40, 5), Γ(60, 10), Δ(80, 20), Ε(100, 30), Ζ(120, ν5), Η(140, 10), Θ(160, 0). Η κατακόρυφη γραμμή με εξίσωση x = 100 διαιρεί το χωρίο που ορίζεται από το πολύγωνο συχνοτήτων και τον οριζόντιο άξονα σε δύο ισεμβαδικά χωρία.

**Α.** Να αποδείξετε ότι ν5 = 25 **Μονάδες 5**

**Β.** Να κατασκευάσετε το ιστόγραμμα συχνοτήτων της κατανομής (Χ). **Μονάδες 5**

**Γ.** Να υπολογίσετε τις τιμές των μέτρων θέσης της (Χ) **Μονάδες 7**

**Δ.** Αν σαν «όριο φτώχιας» θεωρήσουμε τον μισθό των 7200 ευρώ, να εκτιμήσετε το ποσοστό επί

τοις % των φτωχών του δείγματος. **Μονάδες 5**

**Ε.** Να χαρακτηρίσετε την κατανομή ως προς την συμμετρία της **Μονάδες 3**

**ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ ΟΕΦΕ 2003**

**ΘΕΜΑ 1ο**

**Α.** Αν Α, Β δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω ν.δ.ο.:

Ρ(Α⋃Β) = Ρ(Α) + Ρ(Β) –Ρ(Α∩Β)

**Μονάδες 7**

**Β.** Έστω ότι έχουμε την κατανομή συχνοτήτων ενός δείγματος μεγέθους ν. Αν x1, x2, ... , xk οι

τιμές της (ποσοτικής) μεταβλητής, με συχνότητες v1, v2, ..., νk και σχετικές συχνότητες

f1, f2, ... , fk αντίστοιχα και  ο αριθμητικός μέσος των τιμών του δείγματος, τότε να δείξετε

ότι  **Μονάδες 4**

**Γ.** Απαντήστε (χωρίς απόδειξη – αιτιολόγηση) στις επόμενες προτάσεις

i. Σε ένα δείγμα μεγέθους ν, παρατηρήθηκε ότι για κάθε τιμή της μεταβλητής xi, η απόλυτη συχνότητα νi ισούται με την (αντίστοιχη) εκατοστιαία σχετική συχνότητα fi%, δηλαδή ισχύει νi = fi% για κάθε i = 1, 2, 3, ... Ποιο το μέγεθος ν του δείγματος;

ii. Τις τελευταίες 7 μέρες οι θερμοκρασίες σε ένα χωρίο της Νορβηγίας ήταν –3, -2, -1, 0, 1, 2, 3 βαθμούς αντίστοιχα. Τι έχετε να παρατηρήσετε για το συντελεστή μεταβλητότητας αυτού του επταημέρου;

iii. Έστω x1, x2, ... , xk οι τιμές της μεταβλητής, Χ και  η μέση τιμή τους και s η τυπική απόκλιση. Αν κάθε μία από τις πιο πάνω τιμές πολλαπλασιαστεί με έναν αριθμό α και σε κάθε γινόμενο προστεθεί ο αριθμός b να γράψετε την μέση τιμή και τυπική απόκλιση ΄ και s΄ του νέου δείγματος των αx1 + b, αx2 + b, ...

iv. Έστω ότι έχουμε ένα δείγμα μεγέθους ν και συμβολίσουμε νi τις συχνότητες και fi τις αντίστοιχες σχετικές συχνότητες των τιμών xi της μεταβλητής Χ. Αν συμβολίσουμε με αi το αντίστοιχο τόξο ενός κυκλικού τμήματος στο κυκλικό διάγραμμα συχνοτήτων, γράψτε με τι ισούται το αi.

**Μονάδες 8**

**Δ.** Ένας μαθητής της Γ΄ Λυκείου, διεκδικεί την εισαγωγή του στην τριτοβάθμια εκπαίδευση με

τους εξής βαθμούς; **1.** Γενικός βαθμός πρόσβασης: 16

**2.** 1ο Μάθημα αυξημένης βαρύτητας: 15

**3.** 2ο Μάθημα αυξημένης βαρύτητας: 17

Υπολογίστε τη μέση επίδοση του συγκεκριμένου μαθητή, αν ο γενικός βαθμός έχει συντελεστή βαρύτητας 8, το 1ο μάθημα αυξημένης βαρύτητας έχει συντελεστή 1, 3 και το 2ο 0,7. **Μονάδες 2**

**Ε.** Ένα φορτηγό κινείται ευθύγραμμα πάνω στην Εθνική οδό μεταφέροντας εμπορεύματα από

τη Θεσσαλονίκη προς την Αθήνα. Καθώς πλησιάζει προς τη Λάρισα, η θέση του πάνω στην

Εθνική οδό συναρτήσει του χρόνου δίνεται από τη σχέση Βρείτε την

ταχύτητά και την επιτάχυνσή του φορτηγού. Η ταχύτητα του αυξάνεται ή ελαττώνεται; **Μονάδες 4**

**ΘΕΜΑ 2ο**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Στο διπλανό πίνακα συχνοτήτων φαίνεται η κλιμάκωση των βαθμών  πρόσβασης του συνόλου των μαθητών της Γ΄ Λυκείου, που εξετάστηκαν  σε εθνικό επίπεδο το έτος 2002, σύμφωνα με τα επίσημα στοιχεία που  έδωσες στη δημοσιότητα το Υπουργείο Παιδείας.  **Α.** Αν είναι γνωστό ότι το πλήθος των μαθητών που πήραν βαθμό  πρόσβασης μεγαλύτερο ή ίσο του 16 και μικρότερο του 18 ήταν  τετραπλάσιο αυτών που πήραν βαθμό μεγαλύτερο ή ίσο το 4 και  μικρότερο του 6, να συμπληρώσετε τον πίνακα με τις δύο σχετικές  συχνότητες. **Μονάδες 5**  **Β.** Είναι γνωστό ότι 55872 μαθητές πήραν βαθμό πρόσβασης μεγαλύτερο  ή ίσο του 10. Να βρείτε το συνολικό πλήθος υποψηφίων | **Κλάσεις [-)** | **fi%** |
| 0 – 2 | 1 |
| 2 – 4 | 2 |
| 4 – 6 |  |
| 6 – 8 | 16 |
| 8 – 10 | 18 |
| 10 – 12 | 16 |
| 12 – 14 | 14 |
| 14 – 16 | 13 |
| 16 – 18 |  |
| 18 – 20 | 5 |

**Μονάδες 4**

**Γ.** Να υπολογίσετε πόσοι υποψήφιοι είχαν βαθμό πρόσβασης μεγαλύτερο ή ίσο του 11 και

μικρότερο του 13. **Μονάδες 4**

**Δ.** Επιλέγουμε τυχαία ένα μαθητή. Η πιθανότητα αυτός να είναι υποψήφιος της θεωρητικής

κατεύθυνσης είναι 0,34 ενώ η πιθανότητα να είναι υποψήφιος της θετικής είναι μισή από την πιθανότητα να είναι υποψήφιος της τεχνολογικής. Βρείτε την πιθανότητα «ο μαθητής

προέρχεται είτε από τη θεωρητική είτε από τη τεχνολογική κατεύθυνση» καθώς και το

πλήθος των μαθητών της θετικής κατεύθυνσης (στρογγυλοποιείστε την απάντησή σας στον

πλησιέστερο ακέραιο)

**Μονάδες 12**

**ΘΕΜΑ 3ο**

Ρίχνουμε ένα αμερόληπτο νόμισμα δύο φορές.

Θεωρούμε το ενδεχόμενο: «να φέρουμε τουλάχιστον μία φορά κεφάλι»

**Α.** Να βρείτε την πιθανότητα να συμβεί το ενδεχόμενο Α. **Μονάδες 8**

**B.** Δίνεται ο παρακάτω πίνακας συχνοτήτων:

|  |  |
| --- | --- |
| **Τιμές μεταβλητής yi** | **Απόλυτες Συχνότητες vi** |
| 2x2P(A) | 3 |
| 3x2P(A΄) | 2 |
| xP(Ω) | 3 |

Όπου Ω και Ρ(Α) ο δειγματικός χώρος και η πιθανότητα αντίστοιχα του **Α.** ερωτήματος και

xєℝ–

**1.** Υπολογίστε (ως συνάρτηση του x) τη μέση τιμή της μεταβλητής y.

**Μονάδες 4**

**2.** Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης 

**Μονάδες 13**

**ΘΕΜΑ 4ο**

Δίνεται η συνάρτηση f(x) = [P(A)]2x3 – [7P(A) – 3]x –  και Ρ(Α), Ρ(Β) οι πιθανότητες των ενδεχομένων Α, Β αντίστοιχα ενός δειγματικού χώρου Ω.

**Α.** Να βρείτε την f ΄(x)

**Μονάδες 4**

**Β.** Να βρείτε την Ρ(Α) αν είναι γνωστό ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f έχει για

x = 1 εφαπτόμενη παράλληλη στον άξονα x΄x.  **Μονάδες 6**

**Γ.** Αν Ρ(Α) =  και f(1) =  να δείξετε ότι Ρ(Β) =  και ότι τα ενδεχόμενα Α, Β δεν είναι

ασυμβίβαστα.

**Μονάδες 7**

**Δ.** Να δείξετε ότι 

**Μονάδες 8**

**ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ ΟΕΦΕ 2004**

**ΘΕΜΑ 1ο**

**Α.** Δίνεται η συνάρτηση F(x) = f(x) + g(x). Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες, να

αποδείξετε ότι: F ΄(x) = f ΄(x) + g΄(x) **Μονάδες 8**

**Β.** Ρίχνουμε ένα ζάρι μια φορά και η ένδειξη του είναι ο αριθμός 4.

Έστω τα ενδεχόμενα Α = {1, 3, 5} και Β = {2, 4, 6}.

Να χαρακτηρίσετε σαν Σωστή (Σ) ή Λάθος (Λ) καθεμία από τις επόμενες προτάσεις 1έως 4:

1. Πραγματοποιήθηκε το ενδεχόμενο Α∩Β.
2. Πραγματοποιήθηκε τουλάχιστον ένα από τα Α και Β.
3. Πραγματοποιήθηκε το αντίθετο ενδεχόμενο του Β.
4. Πραγματοποιήθηκε το ενδεχόμενο Α∩Β΄. **Μονάδες 4**

**Γ.** Οι παρατηρήσεις t1, t2, ..., tv έχουν μέση τιμή  = 4, εύρος R = 10 και τυπική απόκλιση

s = 2. Να γράψετε τη μέση τιμή, το εύρος και την τυπική απόκλιση των παρατηρήσεων

–2t1, –2t2, ..., –2tv (νєℕ\*) **Μονάδες 6**

**Δ.** Να γράψετε τους κανόνες που δίνουν τις παραγώγους των παρακάτω συναρτήσεων: cf(x) με c πραγματική σταθερά, f(x)g(x),  με g(x) ≠ 0, f(g(x)) **Μονάδες 7**

**ΘΕΜΑ 2ο**

Ένα κουτί περιέχει μία κόκκινη σφαίρα Κ και τρεις μαύρες τις Μ1, Μ2, Μ3. Αφαιρούμε τυχαίως μια σφαίρα από το κουτί, την καταγράφουμε και στη συνέχεια αφαιρούμε τυχαίως μια δεύτερη σφαίρα και την καταγράφουμε επίσης.

**Α.** Να βρείτε τον δειγματικό χώρο Ω του πειράματος. **Μονάδες 9**

**Β.** Να παραστήσετε με αναγραφή τα ενδεχόμενα που προσδιορίζονται από την αντίστοιχη

ιδιότητα: Α: «Και οι δύο σφαίρες μαύρες»

Β: «Μόνο μία σφαίρα είναι μαύρη»

Γ: «Καμία σφαίρα δεν είναι μαύρη» **Μονάδες 7**

**Γ.** Να υπολογίσετε τις πιθανότητες των Α, Β και Γ. **Μονάδες 4**

**Δ.** Να σχεδιάσετε το σημειόγραμμα, που περιγράφει τον αριθμό των μαύρων σφαιρών, που

περιέχουν τα απλά ενδεχόμενα του Ω.  **Μονάδες 5**

**ΘΕΜΑ 3ο**

Έστω ο δειγματικός χώρος Ω και ένα μη κενό ενδεχόμενο του Α. (Α ≠ ∅)

**Α.** Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης f(x) = 2x2 – 2x + 1, xєℝ  **Μονάδες 10**

**B.** Θεωρούμε τις παρατηρήσεις: Ρ(Α), Ρ(Α΄), Ρ(∅), Ρ(Ω).

**1.** Να υπολογίσετε την μέση τιμή και τη διάμεσό τους. **Μονάδες 6**

**2.** Να δείξετε ότι η διακύμανση τους είναι  **Μονάδες 5**

**3.** Να δείξετε ότι  και η ισότητα ισχύει, όταν Ρ(Α) = Ρ(Α΄) **Μονάδες 4**

**ΘΕΜΑ 4ο**

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Κλάσεις [-,-) | Κεντρικές τιμές xi | Συχνότητες νi | Σχετικές Συχνότητες fi% |
| [ –4, –2) |  |  |  |
| [ –2, 0) |  |  |  |
| [0, 2) |  |  |  |
| [2, 4) |  |  |  |
| Σύνολο | – | – |  |

Τα ψυγεία μιας εταιρίας συντήρησης τροφίμων είναι κατανεμημένα σε τέσσερις κλάσεις, σύμφωνα με την θερμοκρασία Χ (σε οC) που επικρατεί στο εσωτερικό τους, όπως φαίνεται στη πρώτη στήλη του παραπάνω πίνακα. Σε σχέση με τον αριθμό των ψυγείων της πρώτης κλάσης, η δεύτερη κλάση έχει τριπλάσιο αριθμό και η τέταρτη πενταπλάσιο αριθμό ψυγείων.

**Α.** Να αποδείξετε ότι η μέση θερμοκρασία των ψυγείων είναι   **Μονάδες 6**

**Β.** Έστω ότι η τρίτη κλάση έχει τον ίδιο αριθμό ψυγείων με την πρώτη κλάση.

1. Να συμπληρώσετε την στήλη με τις σχετικές συχνότητες fi% του παραπάνω πίνακα και να κατασκευάσετε το πολύγωνο αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων **Μονάδες 9**
2. Να υπολογίσετε τη διάμεσο δ της θερμοκρασίας. **Μονάδες 5**
3. Από το πολύγωνο αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων να εκτιμήσετε το ποσοστό των ψυγείων με θερμοκρασία μεγαλύτερη από 0,5οC.

**Μονάδες 5**

**ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ ΟΕΦΕ 2005**

**ΘΕΜΑ 1ο**

**Α. (i)** Να δώσετε τον ορισμό της συνέχειας συνάρτησης f στο πεδίο ορισμού της Α. **Μονάδες 2**

**(ii)** Πότε μία συνάρτηση λέγεται γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού

της;

**Μονάδες 2**

**Β.** Να γράψετε και να αποδείξετε τις ιδιότητες που ισχύουν για την σχετική συχνότητα fi της

τιμής xi, όπου i = 1, 2, ..., k του δείγματος μεγέθους ν ≥ k των τιμών μιας μεταβλητής Χ.

**Μονάδες 10**

**Γ.** Να χαρακτηρίσετε ως Σωστή (Σ) ή Λάθος (Λ) κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις:

1. Το κυκλικό διάγραμμα χρησιμοποιείται για την γραφική παράσταση μόνο ποιοτικών δεδομένων

**Μονάδες 2**

1. Αν για τις αθροιστικές συχνότητες Νi, i = 1, 2, 3, 4, 5 ενός δείγματος τιμών x1, x2, x3, x4, x5 της μεταβλητής Χ ισχύει Νi = 4i2 + 2i, τότε το μέγεθος του δείγματος είναι ν = 110.

**Μονάδες 2**

1. Σε ομαδοποιημένα δεδομένα το εύρος ισούται με τη διαφορά της κεντρικής τιμής της πρώτης κλάσης από την κεντρική τιμή της τελευταίας κλάσης.

**Μονάδες 2**

1. Σε κανονική κατανομή ισχύει δ, όπου  είναι η μέση τιμή και δ η διάμεσός της

**Μονάδες 2**

1. Αν για τις πιθανότητες Ρ(Α) και Ρ(Β) των ενδεχομένων Α και Β ενός δειγματικού χώρου Ω είναι Ρ(Α) ≤ Ρ(Β) τότε ισχύει πάντα Α⊆Β **Μονάδες 2**

**ΘΕΜΑ 2ο**

Έστω t1, t2, ..., t100 ένα δείγμα τιμών μιας μεταβλητής Τ με μέση τιμή  και τυπική απόκλιση

s ≠ 0 και η συνάρτηση F με τύπο F(x) =  η οποία είναι συνεχής στο διάστημα [0, +∞)

**Α.** Να αποδείξετε ότι ο τύπος της συνάρτησης για x ≠ 4 είναι  **Μονάδες 7**

**Β.** Να εξετάσετε αν είναι ομοιογενές το δείγμα των τιμών t1, t2, ..., t100 της μεταβλητής Τ

**Μονάδες 10**

**Γ.** Να βρείτε τη εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g με τύπο  στο σημείο 

**Μονάδες 8**

**ΘΕΜΑ 3ο**

Ο κυβισμός των κινητήρων Χ, σε κυβικά εκατοστά (κ.εκ.) ενός δείγματος 4.000 αυτοκινήτων ακολουθεί κανονική κατανομή. Στο παραπάνω δείγμα βρέθηκαν 100 αυτοκίνητα με κυβισμό μικρότερο από 1400 κ.εκ. και 3360 αυτοκίνητα με κυβισμό μικρότερο από 2000 κ.εκ.

**Α.** Να βρείτε τη μέση τιμή , την τυπική απόκλιση s και να εκτιμήσετε το εύρος Rτου

κυβισμού των κινητήρων των αυτοκινήτων του δείγματος.

**Μονάδες 12**

**Β.** Επιλέγουμε τυχαία ένα αυτοκίνητο από το δείγμα. Να βρείτε την πιθανότητα να έχει

κινητήρα με κυβισμό μικρότερο από 1200 κ.εκ. ή μεγαλύτερο από 2000 κ.εκ. **Μονάδες 7**

**Γ.** Αν μετά από επισκευή ο κυβισμό κάθε κινητήρα αυξηθεί κατά 6%, να βρείτε τη μέση τιμή

και την διασπορά των νέων τιμών και να εκτιμήσετε το εύρος τους **Μονάδες 6**

**ΘΕΜΑ 4ο**

Δίνονται τα ενδεχόμενα Κ και Λ ενός δειγματικού χώρου Ω με πιθανότητες Ρ(Κ), Ρ(Λ) όπου Ρ(Κ) ≠ 0

**Α.** Η συνάρτηση f(x) = ℝ έχει στο σημείο xo∈ℝ μέγιστο το

.

Να αποδείξετε ότι:

**(α)** xo = Ρ(Κ) + Ρ(Λ) **Μονάδες 6**

**(β)** Ρ(Λ) = 2Ρ(Κ) **Μονάδες 4**

**Β.** Επιπλέον οι παρατηρήσεις Ρ(∅), Ρ(Κ), Ρ(Λ), Ρ(Κ∪Λ), Ρ(Ω), Ρ(Κ), Ρ(∅), Ρ(Κ), Ρ(Κ∪Λ),

Ρ(Κ∩Λ) έχουν διάμεσο δ =  και Ρ[(Κ – Λ)∪(Λ – Κ)] = 

**(α)** Να υπολογίσετε τις πιθανότητες Κ, Λ, Κ∪Λ, Κ∩Λ. **Μονάδες 12**

**(β)** Να κάνετε το διάγραμμα συχνοτήτων καθώς και το αντίστοιχο πολύγωνο συχνοτήτων

της κατανομής των παραπάνω παρατηρήσεων. **Μονάδες 3**

**ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ ΟΕΦΕ 2006**

**ΘΕΜΑ 1ο**

**Α.** Αν x1, x2, ..., xk οι τιμές μιας μεταβλητής X που αφορά τα άτομα ενός δείγματος μεγέθους v

όπου k, v μη μηδενικοί φυσικοί αριθμοί με k ≤ v.

1. Τι ονομάζεται σχετική συχνότητα fi της τιμής xi, i = 1, 2, ..., k.
2. Δείξτε ότι 0 ≤ fi ≤ 1 για i = 1, 2, ..., k.
3. Δείξτε ότι f1 + f2 + ... + fk = 1 **(Μονάδες 9)**

**Β.** Έστω Α, Β δύο ασυμβίβαστα ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω.

Να αποδείξετε ότι Ρ(ΑΒ) = Ρ(Α) + Ρ(Β) **(Μονάδες 8)**

**Γ.** Να γράψετε στη τελευταία στήλη το γράμμα της σωστή απάντησης.

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | | | **Α** | **Β** | **Γ** | **Δ** | **Απάντηση** |
| **1.** | Αν Ρ(Α) = 0,3, τότε το Ρ(Α΄) ισούται με | | 0,3 | 0,8 | 0,7 | 0,1 |  |
| **2.** | Αν Ρ(Α) = 0,3, Ρ(Β) = 0,4 και Ρ(Α∩Β) = 0,1 τότε το Ρ(ΑΒ) | | 0,6 | 0,7 | 0,8 | 0,9 |  |
| **3.** | Αν Ρ(Α) = 0,8 και  Ρ(Α∩Β) = 0,1 τότε | Το Ρ(Α – Β) ισούται με | 0,6 | 0,7 | 0,8 | 0,9 |  |
| Το Ρ(Α΄Β΄) ισούται με | 0,6 | 0,7 | 0,8 | 0,9 |  |
| **4.** | Αν Ρ(Α) = 0,3, Ρ(Β) = 0,6. Ποια από τις διπλανές σχέσεις ΔΕΝ μπορεί να ισχύει: | Ρ(ΑΒ) = | 0,5 | 0,6 | 0,7 | 0,8 |  |
| Ρ(Α∩Β) = | 0,1 | 0,2 | 0,3 | 0,4 |  |
| Ρ(Α – Β) = | 0,1 | 0,2 | 0,3 | 0,4 |  |

**(Μονάδες 8)**

**ΘΕΜΑ 2ο**

Δίνεται η συνάρτηση f(x) = λx3 – 6x + μ. Αν  και το μέγιστο της συνάρτησης είναι 9:

**Α.** Δείξτε ότι λ = 2. **(Μονάδες 7)**

**Β.** Δείξτε ότι μ = 5. **(Μονάδες 6)**

**Γ.** Βρείτε τα σημεία της γραφικής παράστασης της f όπου η εφαπτόμενη (ε) είναι παράλληλη

στον x΄x. **(Μονάδες 6)**

**Δ.** Να βρείτε για ποια τιμή του x ο ρυθμός μεταβολής της f γίνεται ελάχιστος. **(Μονάδες 6)**

**ΘΕΜΑ 3ο**

Μελετήσαμε ένα δείγμα Ι.Χ. αυτοκινήτων που κυκλοφορούν στο κέντρο της Αθήνας ως προς τον αριθμό των επιβατών συμπεριλαμβανομένου και του οδηγού.Μερικά από τα αποτελέσματα φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Αριθμός Επιβατών xi** | **Αριθμός αυτοκινήτων vi** | **fi** | **fi %** | **Ni** | **Fi** | **Fi %** |
| **1** |  |  |  |  |  |  |
| **2** | 110 |  |  | 160 |  |  |
| **3** |  |  |  |  |  | 70 |
| **4** |  | 0,075 |  |  |  |  |
| **5** |  |  |  | 400 |  |  |
| **ΣΥΝΟΛΑ** |  |  |  |  |  |  |

**Α.** **(i)** Να μεταφέρετε τον παραπάνω πίνακα στο τετράδιό σας και να τον συμπληρώσετε.

**(Μονάδες 4)**

**(ii)** Να υπολογίσετε την μέση τιμή και τη διάμεσο του δείγματος **(Μονάδες 3)**

**(iii)**  Να εξετάσετε αν το δείγμα είναι ομοιογενές. **(Μονάδες 4)**

**Β.** Επιλέγουμε τυχαία ένα αυτοκίνητο. Να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων:

Α: «το αυτοκίνητο έχει το πολύ δύο επιβάτες» **(Μονάδες 3)**

Β: «το αυτοκίνητο έχει τουλάχιστον τέσσερις επιβάτες **(Μονάδες 3)**

**Γ.** Επιλέγουμε στη τύχη έναν επιβάτη. Να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων

Γ: «ο επιβάτης έχει τρεις συνεπιβάτες» **(Μονάδες 4)**

Δ: «ο επιβάτης δεν έχει συνεπιβάτες» **(Μονάδες 4)**

**ΘΕΜΑ 4ο**

Σε ένα χωριό υπάρχουν ν άνθρωποι που ο καθένας είναι x1, x2, ..., xv ετών.

**Α.** Αν το δείγμα x1, x2, ..., xv των ηλικιών τους έχει συντελεστή μεταβολής 20% και μετά από

25 χρόνια γίνεται για πρώτη φορά ομοιογενές,

1. Να βρείτε τη μέση τιμή και την τυπική απόκλιση των ηλικιών τους. **(Μονάδες 3)**
2. Να βρείτε τη μέση τιμή του δείγματος  **(Μονάδες 3)**
3. Αν ο μικρότερος σε ηλικία είναι 10 ετών, βρείτε προσεγγιστικά τη μεγαλύτερη ηλικία, αν υποθέσουμε ότι η κατανομή είναι κανονική. **(Μονάδες 3)**

**Β.** Στο παραπάνω χωριό υπάρχουν μόνο 2 καφενεία, το Α και το Β. Αν το 30% των κατοίκων

πηγαίνει στο καφενείο Α και το 60% δεν πηγαίνει στο Β ενώ το 50% πηγαίνει σε ένα

τουλάχιστον από τα δύο καφενεία, να βρείτε:

1. Τι ποσοστό των κατοίκων πηγαίνει και στα δύο καφενεία **(Μονάδες 4)**
2. Από αυτούς που πηγαίνουν μόνο στο ένα καφενείο ποιοι είναι οι περισσότεροι, αυτοί που πηγαίνουν μόνο στο Α ή αυτοί που πηγαίνουν μόνο στο Β; **(Μονάδες 4)**

**Γ.** Το κάθε ένα από τα ν άτομα αγοράζει ένα λαχνό. Οι λαχνοί είναι αριθμημένοι από το 1 έως

το v και έχουν την ίδια πιθανότητα κλήρωσης. Αν η πιθανότητα να κληρωθεί περιττός

αριθμός είναι κατά 0,8% μεγαλύτερη από το να κληρωθεί άρτιος να βρείτε πόσα άτομα

έχει το χωριό. **(Μονάδες 8)**

**ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ ΟΕΦΕ 2007**

**1ο ΘΕΜΑ**

**Α. 1.** Τι λέγεται δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης; **Μονάδες 3**

**2.** Πως ορίζεται η διάμεσος ενός δείγματος ν παρατηρήσεων, (ν θετικός ακέραιος) **Μονάδες 4**

**Β.** Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη, να αποδείξετε ότι : (cf(x))΄= cf ΄(x), c є ℝ **Μονάδες 8**

**Γ.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν σαν Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ), γράφοντας

στο τετράδιό σας την ένδειξη (Σ) ή (Λ) δίπλα στον αριθμό της ερώτησης.

1. Αν Α είναι το πεδίο ορισμού μιας συνάρτησης f και υπάρχει xo є Α για το οποίο ισχύει  τότε η f δεν είναι συνεχής στο Α. **Μονάδες 2**
2. Ένα τοπικό ελάχιστο μιας συνάρτησης μπορεί να είναι μεγαλύτερο από ένα τοπικό της μέγιστο. **Μονάδες 2**
3. Η διάμεσος της κανονικής κατανομής συμπίπτει με τη μέση τιμή της **Μονάδες 2**
4. Ο συντελεστής μεταβολής (CV) είναι μέτρο σχετικής διασποράς. **Μονάδες 2**
5. Η διακύμανση εκφράζεται με τις μονάδες με τις οποίες εκφράζονται οι παρατηρήσεις.

**Μονάδες 2**

**2ο ΘΕΜΑ**

Δίνεται η συνάρτηση f(x) = x2 + 

**Α.** Να βρείτε το πεδίο ορισμού της. **Μονάδες 5**

**Β.** Να υπολογίσετε την παράγωγό της. **Μονάδες 5**

**Γ.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση δεν έχει ακρότατα. **Μονάδες 7**

**Δ.** Να υπολογίσετε το όριο  **Μονάδες 8**

**3ο ΘΕΜΑ**

Ο χρόνος εργασίας 80 υπαλλήλων μιας εταιρείας, που εργάζονται από 5 έως 30 χρόνια, έχει ταξινομηθεί σε 5 ισοπλατείς κλάσεις. Είναι γνωστό ότι το ύψος του ορθογωνίου του ιστογράμματος συχνοτήτων που αντιστοιχεί στην τέταρτη κλάση είναι 30, η συχνότητα της δεύτερης κλάσης είναι τετραπλάσια από τη συχνότητα της τρίτης κλάσης, η σχετική συχνότητα της πρώτης κλάσης είναι 10% και ο αριθμός των υπαλλήλων που εργάζονται τουλάχιστον 15 χρόνια είναι 40.

**Α.** Να παραστήσετε τα παραπάνω δεδομένα σε έναν πίνακα συχνοτήτων (απολύτων, σχετικών,

αθροιστικών και αθροιστικών σχετικών) **Μονάδες 8**

**Β.** Να κατασκευάσετε το ιστόγραμμα αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων και το αντίστοιχο

πολύγωνο **Μονάδες 8**

**Γ.** Να υπολογίσετε το ποσοστό των υπαλλήλων που εργάζονται λιγότερο από 23 χρόνια.

**Μονάδες 4**

**Δ.** Πόσα το πολύ χρόνια πρέπει να εργάζεται ένας υπάλληλος, ώστε να είναι, μεταξύ των 60

υπαλλήλων με τα λιγότερα χρόνια εργασίας; **Μονάδες 5**

**4ο ΘΕΜΑ**

Για τα ενδεχόμενα Α, Β ενός δειγματικού χώρου Ω, που αποτελείται από ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα, είναι Ν(Α) – Ν(Β) = Ν(Ω). Έστω R το εύρος του δείγματος Ρ(Α), Ρ(Β), Ρ(Α∪Β), Ρ(Α∩Β).

**Α.** Να αποδείξετε ότι:

**1.** 0 < R ≤ 1 **Μονάδες 4**

**2.** R = Ρ(Α – Β) + Ρ(Α΄– Β΄) **Μονάδες 7**

**Β.** Αν η συνάρτηση είναι συνεχής στο ℝ να αποδείξετε ότι:

**1.** Ρ(Β) = Ρ(Α∩Β) +  **Μονάδες 7**

**2.** R = 1 **Μονάδες 4**

**3.** Ρ(Α∪Β) = 1 και Ρ(Α∩Β) = 0 **Μονάδες 3**

**ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ ΟΕΦΕ 2008**

**1ο ΘΕΜΑ**

**Α. 1.** Τι ονομάζεται εύρος ή κύμανση R ενός δείγματος παρατηρήσεων και τι μειονέκτημα

παρουσιάζει; **Μονάδες 3**

**Α.** **2.** Έστω Ω = {ω1, ω2, …, ων}ο δειγματικός χώρος με πεπερασμένο πλήθος στοιχείων.

Να δώσετε τον αξιωματικό ορισμό της πιθανότητας του απλού ενδεχομένου {ωi} **Μονάδες 4**

**A. 3.** Αν η συνάρτηση f(x) = x2 είναι παραγωγίσιμη, να αποδείξετε ότι : f ΄(x) = 2x **Μονάδες 8**

**Β.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν σαν Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ), γράφοντας

στο τετράδιό σας την ένδειξη (Σ) ή (Λ) δίπλα στον αριθμό της ερώτησης.

1. Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε σημείο xo του πεδίου ορισμού της τότε ισχύει: f ´(xo) = . **Μονάδες 2**
2. Ο συντελεστής διευθύνσεως της εφαπτόμενης της καμπύλης που είναι η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f στο σημείο (xo, f(xo)) θα είναι f ΄(xo) δηλαδή ο ρυθμός μεταβολής της f(x) ως προς x όταν x = xo. **Μονάδες 2**
3. Αν η πραγματοποίηση ενός ενδεχομένου Α συνεπάγεται την πραγματοποίηση του ενδεχομένου Β, τότε Α⊆Β. **Μονάδες 2**
4. Πάντοτε ένα μεγαλύτερο δείγμα δίνει πιο αξιόπιστα αποτελέσματα από ένα μικρό δείγμα. **Μονάδες 2**
5. Ο δειγματικός χώρος κάθε πειράματος τύχης αποτελείται από ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα. **Μονάδες 2**

**2ο ΘΕΜΑ**

Δίνεται η συνάρτηση f(x) = 

**Α.** Να βρείτε το πεδίο ορισμού της. **Μονάδες 6**

**Β.** Να βρείτε το σημείο Μ(x, f(x)) στο οποίο η γραφική παράσταση της f τέμνει τον x΄x.

**Μονάδες 5**

**Γ.** Να αποδείξετε ότι  **Μονάδες 6**

**Δ.** Έστω xi, i = 1, 2, 3, 4 οι τιμές μιας μεταβλητής xi ενός δείγματος μεγέθους ν = 40.

Αν κ =  να συμπληρωθεί ο πίνακας.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **xi** | **vi** | **fi** | **Ni** | **Fi** |
| **1** | 4 |  |  |  |
| **2** | κ |  |  |  |
| **3** |  |  |  |  |
| **4** |  | 0,2 |  |  |
| **Σύνολο** |  | 1 | – | – |

**Μονάδες 8**

**3ο ΘΕΜΑ**

Σε μια εταιρία εργάζονται συνολικά 100 υπάλληλοι στο διοικητικό ή τεχνικό τμήμα. Από αυτούς οι 60 είναι άνδρες, 40 άτομα εργάζονται στο διοικητικό τμήμα ενώ 10 γυναίκες εργάζονται στο τεχνικό τμήμα. Η μέση τιμή τόσο των ανδρών όσο και των γυναικών είναι 40 χρόνια.

**Α.** Επιλέγουμε τυχαία ένα άτομο που εργάζεται στην εταιρία. Να βρείτε τις πιθανότητες:

Α: «Το άτομο είναι άνδρας που εργάζεται στο τεχνικό τμήμα»

Β: «Το άτομο είναι άνδρας ή εργάζεται στο διοικητικό τμήμα» **Μονάδες 7**

**Β.** Κάποιοι υπάλληλοι αποχώρησαν από την εταιρία η οποία κάλυψε το κενό τους

προσλαμβάνοντας για κάθε άτομο που αποχώρησε, ένα νεότερο κατά 4 χρόνια. Αν η νέα μέση ηλικία των υπαλλήλων της εταιρίας είναι 39,6 χρόνια, να βρείτε πόσοι υπάλληλοι

αποχώρησαν. **Μονάδες 6**

**Γ.** Αν είναι γνωστό ότι η κατανομή των 100 αρχικών ηλικιών είναι περίπου κανονική και το 2,5% των υπαλλήλων έχει ηλικία το πολύ 26 χρόνια, να βρείτε πόσοι υπάλληλοι της εταιρίας έχουν ηλικία μικρότερη από 33 χρόνια. **Μονάδες 6**

**Δ.** Αν ισχύει  μετά την πρόσληψη των νεότερων ατόμων και η κατανομή των ηλικιών εξακολουθεί να είναι κανονική, να βρείτε κατά προσέγγιση το εύρος της κατανομής των ηλικιών των υπαλλήλων της εταιρίας. **Μονάδες 6**

Δίνεται ότι : 

**4ο ΘΕΜΑ**

Έστω πείραμα τύχης με δειγματικό χώρο Ω = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7} και m η ελάχιστη τιμή της μέσης τιμής των αριθμών x, 5ex, x+ 4, –7x, 1 (x∈ℝ).

Επιλέγουμε τυχαίο κ∈Ω και σχηματίζουμε τη συνάρτηση g(x) = mx2 – κ2x + 3 (x∈ℝ).

**Α.** Να αποδείξετε ότι: m = 2 **Μονάδες 9**

**Β.** Θεωρούμε το ενδεχόμενο Ε = {κ∈Ω / η εφαπτόμενη της γραφικής παράστασης της

συνάρτησης g στο σημείο Α(1, g(1)) δεν είναι παράλληλη στον άξονα x΄x}.

Να βρεθεί η πιθανότητα του ενδεχομένου Ε. **Μονάδες 8**

**Γ.** Αν Α, Β ενδεχόμενα του δειγματικού χώρού Ω με Α⊆Β, Α ≠ Β να δειχθεί ότι

 x∈ℝ είναι γνησίως αύξουσα στο ℝ

**Μονάδες 8**

**ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ ΟΕΦΕ 2009**

**1ο ΘΕΜΑ**

**Α.** Αν Α, Β είναι δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω, να δείξετε ότι

Ρ(Α – Β) = Ρ(Α) – Ρ(Α∩Β) **Μονάδες 9**

**Β.** **α.** Πότε μία συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα σ’ ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της; **Μονάδες 3**

**Β. β.** Τι ονομάζεται δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης; **Μονάδες 3**

**Γ.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν σαν Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ), γράφοντας στο

τετράδιό σας την ένδειξη (Σ) ή (Λ) δίπλα στον αριθμό της ερώτησης.

1. Για κάθε x > 0 ισχύει: . **Μονάδες 2**
2. Όταν ένα δείγμα τιμών ακολουθεί ασύμμετρη κατανομή με θετική ασυμμετρία τότε ισχύει δ >  **Μονάδες 2**
3. Η μέση τιμή που βρίσκουμε σε ομαδοποιημένα δεδομένα είναι πάντα ίδια με αυτήν που είχαμε πριν την ομαδοποίηση. **Μονάδες 2**
4. Μία συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της λέγεται γνησίως φθίνουσα όταν για οποιαδήποτε x1, x2 ∈ Δ με x1 < x2 ισχύει

f(x1) > f(x2) **Μονάδες 2**

1. Έστω Α, Β δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω. Αν

Ρ(Α) ≤ Ρ(Β) τότε κατ’ ανάγκη ισχύει Α⊆Β. **Μονάδες 2**

**2ο ΘΕΜΑ**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Την 29η Μαρτίου στις 4 π.μ. μετρήθηκαν οι  θερμοκρασίες 20 πόλεων σε βαθμούς Κελσίου,  ομαδοποιήθηκαν σε 4 κλάσεις ίσου πλάτους και  δίνονται στον διπλανό πίνακα:  **Α.** Να βρείτε τη μέση θερμοκρασία των πόλεων σε oC.  **Μονάδες 6**  **B.** Να κατασκευαστεί ιστόγραμμα και πολύγωνο | **Κλάσεις σε βαθμούς οC** | **vi** |
| **[0, 2)** | **2** |
| **[2, 4)** | **4** |
| **[4, 6)** | **6** |
| **[6, 8)** | **8** |

αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων % και να εκτιμηθεί η διάμεσος. **Μονάδες 7**

**Γ.** Να υπολογίσετε τη διακύμανση και να εξετάσετε αν το δείγμα είναι ομοιογενές. **Μονάδες 6**

**Δ.** Να βρεθεί το ποσοστό των πόλεων με θερμοκρασία από 3 έως 7 βαθμούς Κελσίου. **Μονάδες 6**

Δίνεται ότι : 

**3ο ΘΕΜΑ**

Έστω ο δειγματικός χώρος Ω με ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα όπου Ω = {1, 2, 3, …, 25} και η συνάρτηση f(x) = x2 – kx + 9, k∈Ω για κάθε x∈ℝ. Επιλέγουμε ένα από τα παρακάτω ενδεχόμενα:

Α: «k∈Ω / k πολλαπλάσιο του 3»

Β: «k∈Ω / η f δεν έχει πραγματικές ρίζες»

Γ: «k∈Ω/ το όριο »

**Α.** Να βρεθούν τα ενδεχόμενα Α, Β, Γ. **Μονάδες 6**

**Β.** Να βρεθούν οι πιθανότητες Ρ(Α) και Ρ(Γ) **Μονάδες 6**

**Γ.** Να δείξετε ότι Ρ(Β) =  και  **Μονάδες 6**

**Δ.** Να υπολογιστούν οι πιθανότητες: Ρ(Α∪Β), Ρ(Α∪Β΄) και Ρ(Β – Α΄) **Μονάδες 7**

**4ο ΘΕΜΑ**

Δίνονται τα ενδεχόμενα Α και Β ενός δειγματικού χώρου Ω που αποτελείται από ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα και η συνάρτηση f(x) =  x∈ℝ για την οποία είναι γνωστό ότι η εφαπτόμενη της γραφικής παράστασης στο σημείο Κ(1, f(1)) είναι παράλληλη στην ευθεία y = x + 2.

**Α.** Να αποδείξετε ότι τα Α και Β είναι ασυμβίβαστα. **Μονάδες 7**

**Β.** Αν Ρ(Α∪Β) =  και η γραφική παράσταση Cf της συνάρτησης f διέρχεται από το σημείο  να υπολογιστούν τα Ρ(Α) και Ρ(Β) **Μονάδες 6**

**Γ.** Αν Ρ(Α) =  και Ρ(Β) =  να υπολογίσετε τα ακρότατα της συνάρτησης

g(x) = 6f(x) –12x + 2019. **Μονάδες 6**

**Δ.** Αν (ε) η εφαπτόμενη της Cf στο σημείο Κ(1, f(1)) και Μ1(x1, y1), Μ2(x2, y2), … Μ10(x10, y10), 10 σημεία της (ε) που οι τετμημένες x1, x2, …, x10 έχουν μέση τιμή  και η τυπική απόκλιση sx = 2 να βρεθεί ο συντελεστής μεταβολής των τεταγμένων τους. **Μονάδες 6**

**ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ ΟΕΦΕ 2010**

**1ο ΘΕΜΑ**

**Α.** Αν f(x) και g(x) παραγωγίσιμες συναρτήσεις, να δείξετε ότι για την συνάρτηση

F(x) = f(x) + g(x). Ισχύει: F ΄(x) = f ΄(x) + g΄(x) **Μονάδες 9**

**Β.** **α.** Να διατυπώσετε τον αξιωματικό ορισμό της πιθανότητας για ένα ενδεχόμενο Α ενός δειγματικού χώρου Ω με πεπερασμένο πλήθος στοιχείων. **Μονάδες 3**

**β.** Τι εκφράζει η αθροιστική συχνότητα Νi της τιμής xi μιας ποσοτικής μεταβλητής X;

**Μονάδες 3**

**Γ.** *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν σαν Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ), γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη (Σ) ή (Λ) δίπλα στον αριθμό της ερώτησης.*

1. Μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού το Α, λέμε ότι παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο x1 ∈ Α όταν για κάθε x σε μια περιοχή του x1.

**Μονάδες 2**

1. Το τόξο αi ενός κυκλικού τμήματος στο κυκλικό διάγραμμα συχνοτήτων είναι ίσο με  **Μονάδες 2**
2. Αν Α, Β είναι ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου τότε το ενδεχόμενο να μην πραγματοποιηθεί κανένα από τα δύο είναι . **Μονάδες 2**
3. Ισχύει:  **Μονάδες 2**
4. Το εύρος σε ομαδοποιημένα δεδομένα μπορεί να διαφέρει από τα αντίστοιχα δεδομένα πριν αυτά ομαδοποιηθούν. **Μονάδες 2**

**2ο ΘΕΜΑ**

Δίνεται η συνάρτηση , όπου α μια σταθερά με .

**Α.** Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f(x). **Μονάδες 3**

**Β.** Να βρείτε:

**1.** την  **Μονάδες 5**

**2.** το  **Μονάδες 5**

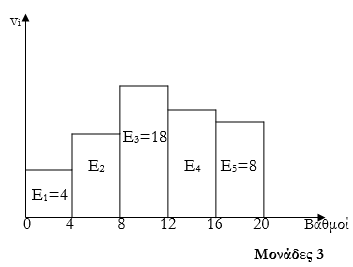
**Γ.** Να δείξετε ότι η εξίσωση της εφαπτόμενης **(ε)** της γραφικής παράστασης της f(x) που είναι

παράλληλη στην ευθεία **y = x** είναι . **Μονάδες 6**

**Δ.** Να βρείτε την τιμή του **α** αν η διάμεσος των τεταγμένων των σημείων της ευθείας **(ε)** τα οποία έχουν τετμημένες **0, 1, 9, 10** είναι **50**. **Μονάδες 6**

**3ο ΘΕΜΑ**

Το παρακάτω ιστόγραμμα συχνοτήτων δείχνει τις βαθμολογίες των μαθητών της Γ΄ Λυκείου ενός σχολείου σε ένα διαγώνισμα. Μέσα στα ορθογώνια που έχουν βάση ίση με τη μονάδα δίνονται τα εμβαδά τριών από αυτά. Αν **Ν4 = 6ν2** και το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από το πολύγωνο συχνοτήτων και τον οριζόντιο άξονα είναι **50**, τότε



**Α.** Να βρείτε το πλήθος των μαθητών. **Μονάδες 3**

**Β.** Να κατασκευάσετε τον πίνακα κατανομής συχνοτήτων, αθροιστικών συχνοτήτων και αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων. **Μονάδες 10**

**Γ.** Αν επιλέξουμε τυχαία ένα μαθητή της Γ΄ Λυκείου του σχολείου να βρείτε την πιθανότητα των ενδεχομένων:

1. Ο βαθμός του γραπτού να είναι μεγαλύτερος ή ίσος του **10** και μικρότερος του **17**.

**Μονάδες 6**

1. Ο βαθμός του γραπτού να είναι κάτω από **10** ή τουλάχιστον **16**.

**Μονάδες 6**

**4ο ΘΕΜΑ**

Έστω **Ω = {2, 3, 6, κ, λ, μ}** ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης και το ενδεχόμενο

**Α = {κ, λ, μ}** ώστε να ισχύουν:  και .

**Α.** Να βρείτε τις πιθανότητες των απλών ενδεχομένων του Ω.

**Μονάδες 5**

**Β.** Να βρείτε τα **κ, λ, μ** αν η συνάρτηση  έχει εφαπτόμενη στο σημείο  με συντελεστή διεύθυνσης **48** ενώ τα **κ** και **μ** είναι οι θέσεις των τοπικών ακροτάτων της με κ μικρότερο του μ.

**Μονάδες 4**

**Γ.** Δίνεται η συνάρτηση . Να βρείτε το πεδίο ορισμού Δ της g(x) και στη

συνέχεια τα στοιχεία του ενδεχομένου Β, όταν Β = {x ∈ Ω και x ∈ Δ} **Μονάδες 4**

**Δ.** Σε ένα δείγμα **160** παρατηρήσεων που ακολουθούν κανονική κατανομή οι **4** από αυτές είναι

μεγαλύτερες από το **20** ενώ το εύρος **R** των παρατηρήσεων είναι ίσο με τα  της μέσης τιμής . Να βρείτε το ενδεχόμενο

Γ = { c ∈ Ω ώστε ο c προστιθέμενος σε όλες τις παρατηρήσεις να γίνεται δείγμα ομοιογενές}

**Μονάδες 4**

**Ε.** Να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων: 

**Μονάδες 8**

**ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ ΟΕΦΕ 2011**

**ΘΕΜΑ Α**

**Α1.** Για δύο συμπληρωματικά ενδεχόμενα Α και Α΄ ενός δειγματικού χώρου Ω να αποδειχθεί ότι: Ρ(Α) = 1 – Ρ(Α΄) **Μονάδες 8**

**Α2.** Αν x1, x2, …, xk είναι οι τιμές μιας μεταβλητής Χ ενός δείγματος μεγέθους ν, k ≤ ν με αντίστοιχες συχνότητες ν1, ν2, …, νk και αi όπου i = 1, 2, …, k το αντίστοιχο τόξο ενός κυκλικού τμήματος στο κυκλικό διάγραμμα συχνοτήτων τότε:

**(i)** Να αναφέρετε για ποια δεδομένα χρησιμοποιείται το κυκλικό διάγραμμα.

**(ii)** Με τι ισούται το τόξο αi; **Μονάδες 4**

**Α3.** Πότε μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο xo του πεδίου ορισμού της;

**Μονάδες 3**

**Α4.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν σαν Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ), γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη (Σ) ή (Λ) δίπλα στον αριθμό της ερώτησης.

1. Αν για μια συνάρτηση ισχύουν f ΄(xo) = 0 για κάθε xo ∈ (α, β), f ΄(x) > 0 στο (α, xo) και

f ΄(x) < 0 στο (xo, β), τότε η f παρουσιάζει στ διάστημα (α, β) για x = xo μέγιστο. **Μονάδες 2**

1. Η παράγωγος της συνάρτησης f στο xo του πεδίου ορισμού της εκφράζει το ρυθμό μεταβολής του y = f(xo) ως προς το x, όταν x = xo **Μονάδες 2**
2. Στην κανονική κατανομή το 95% περίπου των παρατηρήσεων βρίσκεται στο διάστημα , όπου  είναι η μέση τιμή των παρατηρήσεων και  η τυπική απόκλιση.

**Μονάδες 2**

1. Σε ένα δείγμα μεγέθους ν ο λόγος  είναι ίσος με ν. **Μονάδες 2**
2. Για οποιαδήποτε ενδεχόμενα Α και Β ενός δειγματικού χώρου Ω, όταν Ρ(Α) ≤ Ρ(Β) τότε . **Μονάδες 2**

**ΘΕΜΑ Β**

Δίνεται η συνάρτηση  Αν f ΄(–1) = –3f ΄(1), τότε:

**Β1.** Να αποδείξετε ότι k = 3. **Μονάδες 6**

**Β2.** Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατά της. **Μονάδες 7**

**Β3.** Να βρείτε το όριο  και την εξίσωση της εφαπτόμενης της συνάρτησης f στο σημείο (3, f(3)) **Μονάδες 7**

**B4.** Να βρείτε το σημείο της γραφικής παράστασης της f, στην τετμημένη του οποίου ο ρυθμός

μεταβολής του y = f(x) ως προς x, έχει την ελάχιστη τιμή **Μονάδες 5**

**ΘΕΜΑ Γ**

|  |  |
| --- | --- |
| Στο διπλανό σχήμα δίνεται το ιστόγραμμα συχνοτήτων  σε ευρώ (€) και το πολύγωνο συχνοτήτων της  ημερήσιας αμοιβής 40 εργαζομένων μιας επιχείρησης.  Τα δεδομένα έχουν ομαδοποιηθεί σε κλάσεις ίσου  πλάτους. Η τετμημένη του σημείου Α είναι 35, του  σημείου Β είναι 55 και η μέση ημερήσια αμοιβή των  εργαζομένων είναι €  **Γ1.** Να δείξετε ότι το πλάτος των κλάσεων είναι | img050 |

c = 10 και να γράψετε τις κλάσεις. **Μονάδες 5**

**Γ2.** Να δείξετε ότι οι συχνότητες v2, v3 της δεύτερης και της τρίτης κλάσης αντίστοιχα v2 = 16, v3 = 8. **Μονάδες 6**

**Γ3.** Να κάνετε τον πίνακα κατανομής συχνοτήτων, σχετικών συχνοτήτων, σχετικών αθροιστικών συχνοτήτων της ημερήσιας αμοιβής εργαζομένων της επιχείρησης, το πολύγωνο αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων και να εκτιμήσετε τη διάμεσο. **Μονάδες 9**

**Γ4.** Έστω Ω ο δειγματικός χώρος των εργαζομένων της επιχείρησης και Α, Β δύο ενδεχόμενα το Ω τέτοια ώστε  και .

Να αποδείξετε ότι:  **Μονάδες 5**

**ΘΕΜΑ Δ**

Έστω Χ μια ποσοτική μεταβλητή ως προς την οποία εξετάζουμε ένα δείγμα μεγέθους ν και x1, x2, …, xν οι παρατηρήσεις που έχουν μέση τιμή , τυπική απόκλιση s, συντελεστή μεταβλητότητας CV = 25% και διάμεσο δ. Θεωρούμε τη συνάρτηση  Αν η f στο σημείο με τετμημένη xo = 1 έχει εφαπτομένη παράλληλη στον άξονα x΄x, τότε:

**Δ1.** Να δείξετε ότι = 4, s = 1 και να μελετήσετε τη συνάρτηση ως προς τα ακρότατα.

**Μονάδες 7**

**Δ2.** Να βρείτε τον μικρότερο θετικό αριθμό c κατά τον οποίο πρέπει να αυξηθούν οι τιμές των

παρατηρήσεων ώστε το δείγμα να είναι ομοιογενές

**Μονάδες 5**

**Δ3.** Υποθέτουμε ότι η παραπάνω κατανομή είναι κανονική ή περίπου κανονική. Θεωρούμε δύο

ενδεχόμενα Α και Β ενός δειγματικού χώρου Ω με πιθανότητες  και 

**(i)** Αν  να βρείτε τις πιθανότητες 

**Μονάδες 9**

**(ii)** Αν πλήθος των παρατηρήσεων xi, με xi ≤ 2 είναι 5 τότε να βρείτε το μέγεθος του δείγματος

**Μονάδες 4**

**ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ ΟΕΦΕ 2012**

**ΘΕΜΑ Α**

**Α1.** Για δύο ενδεχόμενα Α και B ενός δειγματικού χώρου Ω να αποδείξετε ότι ισχύει:



**Μονάδες 9**

**Α2.** Πότε λέμε ότι μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το Α παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο ; **Μονάδες 3**

**Α3.** Τι μας δίνουν τα μέτρα θέσης και τι τα μέτρα διασποράς ή μεταβλητότητας μιας κατανομής ενός συνόλου δεδομένων; **Μονάδες 3**

**Α4.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν σαν Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ), γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη (Σ) ή (Λ) δίπλα στον αριθμό της ερώτησης.

1. Η αθροιστική συχνότητα Νi μιας τιμής xi εκφράζει το πλήθος των παρατηρήσεων που είναι μικρότερες της τιμής xi. **Μονάδες 2**
2. Αν  για κάθε  τότε η συνάρτηση f(x) δεν παρουσιάζει ακρότατα. **Μονάδες 2**
3. Στην κανονική κατανομή το 0,3% περίπου των παρατηρήσεων βρίσκεται εκτός του διαστήματος . **Μονάδες 2**
4. Αν η διάμεσος ν παρατηρήσεων είναι ίση με μία από αυτές τότε είναι βέβαιο ότι το πλήθος ν των παρατηρήσεων είναι περιττός αριθμός. **Μονάδες 2**
5. Αν Α, Β ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω τότε οι εκφράσεις «Δεν πραγματοποιούνται ταυτόχρονα τα ενδεχόμενα Α και Β» και «Πραγματοποιείται μόνο ένα από τα ενδεχόμενα Α και Β είναι ισοδύναμες. **Μονάδες 2**

**ΘΕΜΑ Β**

Εξετάζουμε ένα αντιπροσωπευτικό δείγμα συνταξιούχων ως προς το ποσό της μηνιαίας σύνταξης που λαμβάνουν σε εκατοντάδες ευρώ.

Για την κατανομή τους έχουν δημιουργηθεί 5 ισοπλατείς κλάσεις και γνωρίζουμε ότι :

* Το εμβαδόν του πολυγώνου συχνοτήτων vi είναι 250.
* Το μέσο της άνω βάσης του ορθογωνίου του ιστογράμματος σχετικών συχνοτήτων fi% που αντιστοιχεί στη 2η κλάση είναι το σημείο Α(10, α)
* Το εύρος των παρατηρήσεων είναι 20.
* Η συχνότητα f1% είναι τριπλάσια της f2% και δεκαπλάσια της f4% ενώ η f2% είναι διπλάσια τηςf3% και πενταπλάσια της f5%

**Β1.** Να δείξετε ότι α = 20 και να συμπληρωθεί ο πίνακας κατανομής όλων των συχνοτήτων.

**Μονάδες 8**

**Β2.** Να υπολογιστεί η μέση τιμή καθώς και η διάμεσος των συντάξεων. Τι είδους ασυμμετρία έχει η κατανομή; **Μονάδες 6**

**Β3.** Αν η κυβέρνηση αποφασίσει μείωση των συντάξεων που υπερβαίνουν τα 1300 ευρώ, βρείτε το ποσοστό των θιγομένων συνταξιούχων καθώς και να εκτιμήσετε το πλήθος τους αν γνωρίζουμε ότι ο συνολικός αριθμός συνταξιούχων της χώρας είναι 2.850.000 **Μονάδες 5**

**B4.** Αν δοθεί επίδομα στους έχοντες συνολικό ετήσιο εισόδημα (από συντάξεις 12 μηνών) μικρότερο ή ίσο των 8.640 ευρώ τότε:

1. Επιλέγοντας τυχαία από το δείγμα έναν συνταξιούχο, να βρεθεί η πιθανότητα να λάβει το επίδομα. **Μονάδες 3**
2. Αν το επίδομα δοθεί από τα χρήματα, που θα εξοικονομήσουν τα ταμεία αφαιρώντας 100 ευρώ από κάθε συνταξιούχο της 3ης κλάσης, 200 ευρώ από κάθε συνταξιούχο της 4ης κλάσης και 400 ευρώ από καθέναν της 5ης κλάσης και τα οποία μοιραστούν εξίσου στους δικαιούχους, τότε να βρεθεί το ποσό που θα αναμένεται να λάβει ανά μήνα ο κάθε δικαιούχος. **Μονάδες 3**

**ΘΕΜΑ Γ**

Δίνονται οι συναρτήσεις  και  και τα Α, Β ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω.

**Γ1.** Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων f(x) και g(x) **Μονάδες 4**

**Γ2.** Αν η πιθανότητα του Ρ(Α) του ενδεχομένου Α του δειγματικού χώρου Ω είναι ίση με το  και η εφαπτόμενη της γραφικής παράστασης της g(x) στο xo = 4 σχηματίζει με τον άξονα x΄x γωνία , τότε να βρείτε τις πιθανότητες Ρ(Α) και Ρ(Β). **Μονάδες 8**

**Γ3.** Αν  και  και  τότε:

**(α)** Να δείξετε ότι   **Μονάδες 5**

**(β)** Να βρείτε την πιθανότητα να πραγματοποιηθεί το Α ή να μην πραγματοποιηθεί το Β.

**Μονάδες 4**

**(γ)** Να βρείτε την πιθανότητα να πραγματοποιηθεί μόνο ένα από τα ενδεχόμενα Α και Β.

**Μονάδες 4**

**ΘΕΜΑ Δ**

Δίνεται η συνάρτηση 

**Δ1.** Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

**Μονάδες 6**

**Δ2.** Έστω Ω ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης που αποτελείται από ισοπίθανα απλά

ενδεχόμενα και Α, Β δύο ενδεχόμενα για τα οποία ισχύει:  όπου f(x) η προηγούμενη συνάρτηση.

1. Να αποδείξετε ότι το Α είναι βέβαιο ενδεχόμενο και το Β είναι αδύνατο ενδεχόμενο.

**Μονάδες 7**

1. Δίνεται ο παρακάτω πίνακας απολύτων συχνοτήτων vi και τα ενδεχόμενα Γ, Δ του ίδιου δειγματικού χώρου Ω, διαφορετικά των Α και Β με  και 

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **(α)** Να αποδείξετε ότι v1 = 1 και v2 = 3 και να συμπληρωθεί ο πίνακας  **Μονάδες 6**  **(β)**  Να υπολογιστεί η διάμεσος των παρατηρήσεων **Μονάδες 3**  **(γ)** Να υπολογιστούν οι πιθανότητες:  **Μονάδες 3** | **xi** | **vi** |
| 1 | 2Ρ(Γ) |
| 2 | 4Ρ(Δ) |
| 3 | 4Ρ(Γ) + 4Ρ(Δ) |
| 4 | Ρ(Α) |
| Σύνολα |  |

**ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ ΟΕΦΕ 2013**

**ΘΕΜΑ Α**

Α1. Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της συνάρτησης  είναι , για κάθε

 **Μονάδες 7**

Α2. Να ορίσετε το σταθμισμένο αριθμητικό μέσο ή σταθμικό μέσο για τις τιμές ενός συνόλου δεδομένων που έχουν διαφορετική βαρύτητα και η οποία εκφράζεται με τους λεγόμενους συντελεστές βαρύτητας  **Μονάδες 4**

Α3. Πότε μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού Α λέγεται συνεχής; **Μονάδες 4**

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν σαν Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ), γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη (Σ) ή (Λ) δίπλα στον αριθμό της ερώτησης.

α) Αν οι συναρτήσεις f και g είναι παραγωγίσιμες στο Α και  για κάθε  τότε ισχύει ότι:  για κάθε  **Μονάδες 2**

β) Ο συντελεστής μεταβλητότητας CV παριστάνει ένα μέτρο απόλυτης διασποράς και όχι μέτρο σχετικής διασποράς. **Μονάδες 2**

γ) Η διάμεσος δ ενός δείγματος ν παρατηρήσεων είναι πάντα μία από τις παρατηρήσεις

**Μονάδες 2**

δ) Το ενδεχόμενο «Διαφορά του Β από το Α» πραγματοποιείται όταν πραγματοποιείται το Α αλλά όχι το Β. **Μονάδες 2**

ε) Δύο συμπληρωματικά ενδεχόμενα είναι ασυμβίβαστα. **Μονάδες 2**

**ΘΕΜΑ Β**

Ο χρόνος αναμονής σε min των μαθητών ενός σχολείου στη στάση του λεωφορείου έχει ομαδοποιηθεί σε 5 κλάσεις ίσου πλάτους.

* Το εύρος R = 20 min,
* η κεντρική τιμή της τρίτης κλάσης είναι 10 min,
* 3 μαθητές περιμένουν λιγότερο από 4min,
* 20 μαθητές λιγότερο από 12 min,
* το 84% περιμένουν λιγότερο από 16min,
* Ν5 = 50 και F2 = 0,2.

Β1. Να αποδείξετε ότι το πλάτος c της κάθε κλάσης είναι 4 και να μεταφέρετε στο τετράδιό σας σωστά συμπληρωμένο τον παρακάτω πίνακα.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Χρόνος σε min | xi | vi | Ni | fi | Fi | Fi% |
|  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |
| Σύνολο | – |  | – |  | – | – |

**Μονάδες 8**

Β2. Να υπολογίσετε τη μέση τιμή, τη διασπορά και τη διάμεσος του χρόνου αναμονής των μαθητών του δείγματος. **Μονάδες 7**

Β3. Θεωρούμε ότι όλοι οι χρόνοι των μαθητών είναι ομοιόμορφα κατανεμημένοι σε κάθε μία από τις παραπάνω κλάσεις. Επιλέγουμε τυχαία έναν μαθητή στην τύχη και θεωρούμε τα ενδεχόμενα:

Α: ο χρόνος αναμονής του μαθητή είναι μικρότερος του 10min

Β: ο χρόνος αναμονής του μαθητή είναι τουλάχιστον 8min και λιγότερος από 17min.

α) Να βρείτε τις πιθανότητες Ρ(Α) και Ρ(Β) **Μονάδες 5**

β) Να βρείτε τις πιθανότητες  **Μονάδες 5**

**ΘΕΜΑ Γ**

Θεωρούμε μεταβλητή X η οποία μετράει σε mmHg τη συνολική πίεση ενός δείγματος Α ν ατόμων μιας πόλης και η οποία ακολουθεί περίπου κανονική κατανομή.

Δίνεται ότι η διάμεσος δ της κατανομής είναι  σε mmHg και ότι το 84% του δείγματος έχει συστολική πίεση μεγαλύτερη από 125 mmHg.

Γ1. Να βρείτε τη μέση τιμή , την τυπική απόκλιση  του δείγματος Α και να εξετάσετε αν το

δείγμα Α είναι ομοιογενές. **Μονάδες 8**

Γ2. Έστω ότι για το δείγμα Α ισχύει ότι  και . Ένα δεύτερο δείγμα Β, επίσης ν ατόμων, παρουσιάζει συστολική πίεση  για κάθε , όπου  η συστολική πίεση των ατόμων του δείγματος Α.

α) Να βρείτε τη μέση τιμή , την τυπική απόκλιση και να συγκρίνετε ως προς την ομοιογένεια τα δύο δείγματα. **Μονάδες 7**

β) Αν επιπλέον το πλήθος των ατόμων του δείγματος Α, των οποίων η συστολική πίεση παίρνει τιμές στο διάστημα  είναι 540,

1. Να βρείτε το μέγεθος ν του δείγματος Α. **Μονάδες 5**

2. Να βρείτε πόσα συνολικά άτομα και από τα δύο δείγματα έχουν συστολική πίεση κάτω από 135mmHg. **Μονάδες 5**

**ΘΕΜΑ Δ**

Δίνεται η συνάρτηση  με α > 0 και η εφαπτόμενη  στο σημείο  της γραφικής της παράστασης

Δ1. α) Να δείξετε ότι α = β = 1. **Μονάδες 5**

β) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα. **Μονάδες 5**

Δ2. Θεωρούμε τα ενδεχόμενα Α, Β, Γ ενός δειγματικού χώρου Ω, που οι πιθανότητες των ενδεχομένων του δίνονται από τις τεταγμένες y, σημείων (x, y) της εφαπτομένης (ε).

α) Για τις τετμημένες x των παραπάνω σημείων (x, y) να αποδείξετε ότι 

**Μονάδες 7**

β) Έστω τα σημεία  της εφαπτόμενης (ε). Αν οι πιθανότητες των ενδεχομένων  και Α είναι διαφορετικές ανά δύο και στοιχεία του συνόλου :

1. Να αποδείξετε ότι  και  **Μονάδες 5**

2. Να αποδείξετε ότι  **Μονάδες 4**

3. Αν να αποδείξετε ότι  **Μονάδες 4**

**ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ ΟΕΦΕ 2014**

**ΘΕΜΑ Α**

**Α1.** Για δύο ενδεχόμενα Α και Β ενός δειγματικού χώρου Ω να αποδειχθεί ότι:

 **Μονάδες 7**

**Α2.** Πότε μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού Α λέγεται συνεχής στο Α; **Μονάδες 4**

**Α3.** Τι λέγεται ιστόγραμμα συχνοτήτων και πως κατασκευάζεται; **Μονάδες 4**

**Α4.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν σαν Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ), γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη (Σ) ή (Λ) δίπλα στον αριθμό της ερώτησης.

1. Για την παράγωγο της σύνθετης συνάρτησης ισχύει ότι: 
2. Αν οι συναρτήσεις f και g ορίζονται σε ένα σύνολο Α τότε το πηλίκο  με  ορίζεται στο Α.
3. Η διάμεσος των παρατηρήσεων είναι η τιμή για την οποία το πολύ 50% των παρατηρήσεων είναι μικρότερες απ’ αυτήν και το πολύ 50% των παρατηρήσεων είναι μεγαλύτερες από την τιμή αυτήν.
4. Σε μια κατανομή συχνοτήτων είναι οι τιμές της μεταβλητής Χ με συχνότητες αντίστοιχα, τότε η μέση τιμή ορίζεται από την σχέση: 
5. Για την πιθανότητα του κενού συνόλου ισχύει ότι: 

**Μονάδες 10**

**ΘΕΜΑ Β**

Δίνεται η συνάρτηση  όπου α, β είναι πραγματικοί αριθμοί και ο δειγματικός χώρος  που αποτελείται από απλά ισοπίθανα ενδεχόμενα. Θεωρούμε τα σημεία Μ(κ, f(κ)) της καμπύλης της συνάρτησης f και τα σημεία  της καμπύλης της συνάρτησης . Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από το σημείο Α(2, 5) και η εφαπτόμενη της στο σημείο Α έχει συντελεστή διεύθυνσης 12, τότε:

* χρόνος αναμονής σε min των μαθητών ενός σχολείου στη στάση του λεωφορείου έχει ομαδοποιηθεί σε 5 κλάσεις ίσου πλάτους.
* Το εύρος R = 20 min,
* η κεντρική τιμή της τρίτης κλάσης είναι 10 min,
* 3 μαθητές περιμένουν λιγότερο από 4min,
* 20 μαθητές λιγότερο από 12 min,
* το 84% περιμένουν λιγότερο από 16min,
* Ν5 = 50 και F2 = 0,2.

**Β1.** Να αποδείξετε ότι το πλάτος c της κάθε κλάσης είναι 4 και να μεταφέρετε στο τετράδιό σας σωστά συμπληρωμένο τον παρακάτω πίνακα.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Χρόνος σε min** | **xi** | **vi** | **Ni** | **fi** | **Fi** | **Fi%** |
|  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |
| **Σύνολο** | **–** |  | **–** |  | **–** | **–** |

**Μονάδες 8**

**Β2.** Να υπολογίσετε τη μέση τιμή, τη διασπορά και τη διάμεσος του χρόνου αναμονής των μαθητών του δείγματος.

**Μονάδες 7**

**Β3.** Θεωρούμε ότι όλοι οι χρόνοι των μαθητών είναι ομοιόμορφα κατανεμημένοι σε κάθε μία από τις παραπάνω κλάσεις. Επιλέγουμε τυχαία έναν μαθητή στην τύχη και θεωρούμε τα ενδεχόμενα:

Α: ο χρόνος αναμονής του μαθητή είναι μικρότερος του 10min

Β: ο χρόνος αναμονής του μαθητή είναι τουλάχιστον 8min και λιγότερος από 17min.

**α)** Να βρείτε τις πιθανότητες Ρ(Α) και Ρ(Β) **Μονάδες 5**

**β)** Να βρείτε τις πιθανότητες  **Μονάδες 5**

**ΘΕΜΑ Γ**

Θεωρούμε μεταβλητή X η οποία μετράει σε mmHg τη συνολική πίεση ενός δείγματος Α ν ατόμων μιας πόλης και η οποία ακολουθεί περίπου **κανονική κατανομή**.

Δίνεται ότι η διάμεσος δ της κατανομής είναι  σε mmHg και ότι το 84% του δείγματος έχει συστολική πίεση μεγαλύτερη από 125 mmHg.

**Γ1.** Να βρείτε τη μέση τιμή , την τυπική απόκλιση  του δείγματος Α και να εξετάσετε αν το

δείγμα Α είναι ομοιογενές. **Μονάδες 8**

**Γ2.** Έστω ότι για το δείγμα Α ισχύει ότι  και .

Ένα δεύτερο δείγμα Β, επίσης ν ατόμων, παρουσιάζει συστολική πίεση  για κάθε , όπου  η συστολική πίεση των ατόμων του δείγματος Α.

**α)** Να βρείτε τη μέση τιμή , την τυπική απόκλιση και να συγκρίνετε ως προς την

ομοιογένεια τα δύο δείγματα. **Μονάδες 7**

**β)** Αν επιπλέον το πλήθος των ατόμων του δείγματος Α, των οποίων η συστολική πίεση

παίρνει τιμές στο διάστημα  είναι 540,

**1.** Να βρείτε το μέγεθος ν του δείγματος Α.  **Μονάδες 5**

**2.** Να βρείτε πόσα συνολικά άτομα και από τα δύο δείγματα έχουν συστολική πίεση κάτω

από 135mmHg. **Μονάδες 5**

**ΘΕΜΑ Δ**

Δίνεται η συνάρτηση  με α > 0 και η εφαπτόμενη  στο σημείο  της γραφικής της παράστασης

**Δ1. α)** Να δείξετε ότι α = β = 1. **Μονάδες 5**

**β)** Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα. **Μονάδες 5**

**Δ2.** Θεωρούμε τα ενδεχόμενα Α, Β, Γ ενός δειγματικού χώρου Ω, που οι πιθανότητες των ενδεχομένων του δίνονται από τις τεταγμένες y, σημείων (x, y) της εφαπτομένης (ε).

**α)** Για τις τετμημένες x των παραπάνω σημείων (x, y) να αποδείξετε ότι 

**Μονάδες 7**

**β)** Έστω τα σημεία  της εφαπτόμενης (ε). Αν οι πιθανότητες των ενδεχομένων  και Α είναι διαφορετικές ανά δύο και στοιχεία του συνόλου :

1. Να αποδείξετε ότι  και  **Μονάδες 5**
2. Να αποδείξετε ότι  **Μονάδες 4**
3. Αν να αποδείξετε ότι  **Μονάδες 4**

**ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ ΟΕΦΕ 2015**

**ΘΕΜΑ Α**

**Α1.** Έστω  οι τιμές μιας μεταβλητής Χ που αναφέρεται σε άτομα ενός δείγματος

μεγέθους ν, όπου κ, ν, μη μηδενικοί φυσικοί αριθμοί με . Να αποδείξετε ότι:

**α.**  για κάθε 

**β.**  για κάθε 

**Μονάδες 8**

**Α2.** Τι ονομάζεται στατιστική ομαλότητα ή νόμος των μεγάλων αριθμών;

**Μονάδες 4**

**Α3.** Τι εκφράζει η αθροιστική σχετική συχνότητα Fi της τιμής xi μιας ποσοτικής μεταβλητής Χ;

**Μονάδες 3**

**Α4.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν σαν Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ), γράφοντας

στο τετράδιό σας την ένδειξη (Σ) ή (Λ) δίπλα στον αριθμό της ερώτησης.

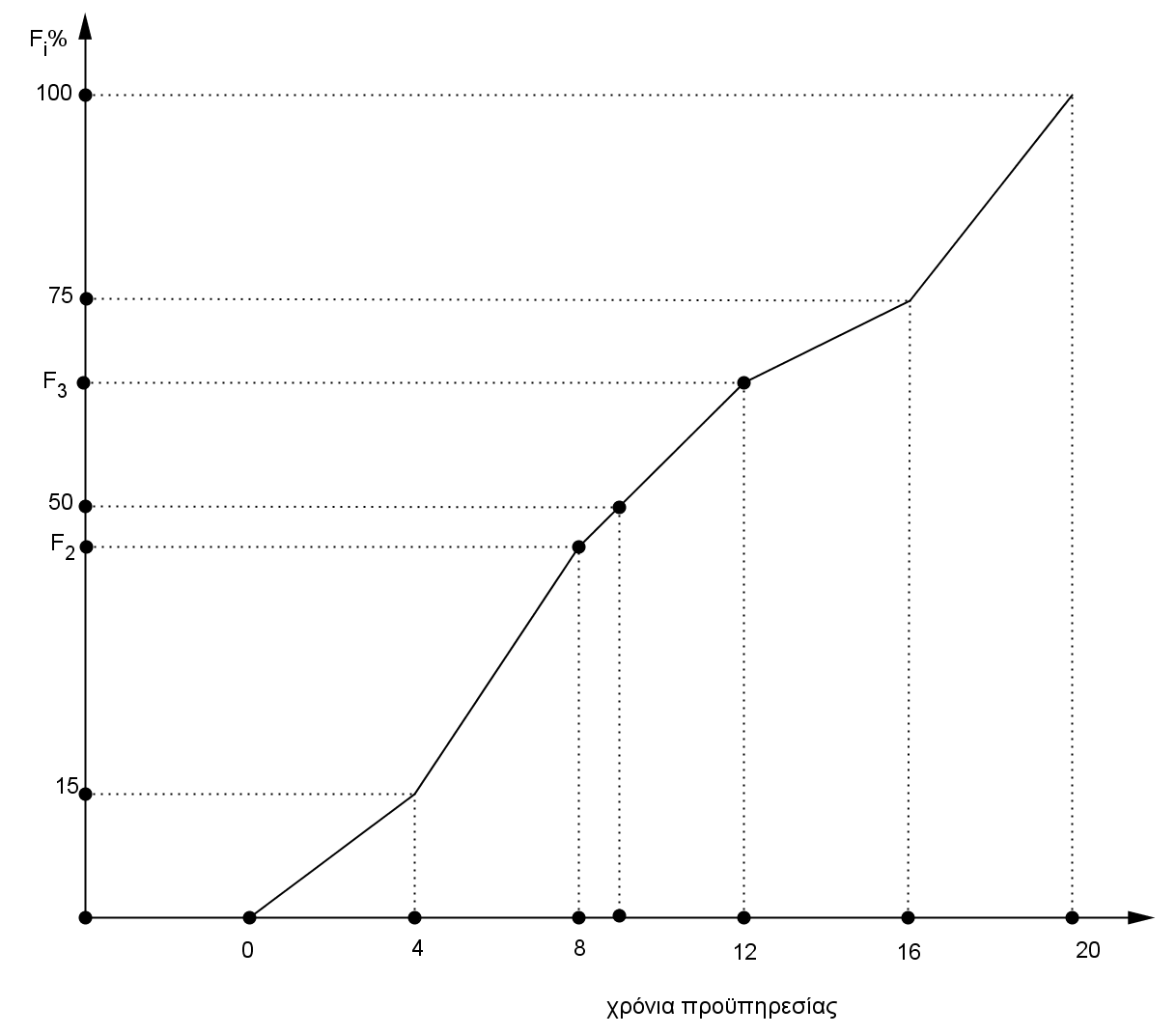
1. Αν για μια συνάρτηση f ορισμένη στο Α ισχύει  για κάθε , τότε η f παρουσιάζει μέγιστο στο .
2. Η παράγωγος μιας συνάρτησης f σε ένα  του πεδίου ορισμού της εκφράζει τον ρυθμό μεταβολής του x ως προς y = f(x) όταν x = xo.
3. Το εύρος είναι ένα μέτρο διασποράς που βασίζεται μόνο στις δύο ακραίες παρατηρήσεις.
4. Δύο ασυμβίβαστα ενδεχόμενα είναι συμπληρωματικά.
5. Αν για δύο ενδεχόμενα Α, Β ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύει: , τότε .

**Μονάδες 5x2 = 10**

**ΘΕΜΑ Β**

Τα χρόνια προϋπηρεσίας των υπαλλήλων μιας εταιρείας έχουν ομαδοποιηθεί σε 5 κλάσεις ίσου πλάτους (θεωρούμε ότι οι παρατηρήσεις κάθε κλάσης είναι ομοιόμορφα κατανεμημένες).

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται το πολύγωνο αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων επί τοις εκατό, που αντιστοιχεί στα χρόνια προϋπηρεσίας των υπαλλήλων



Για τα ευθύγραμμα τμήματα , ΑΓ ισχύει ότι : 

**Β1.** Να αποδείξετε ότι η διάμεσος του παραπάνω δείγματος είναι ίση με 9. (Μονάδες 3)

Στη συνέχεια, αν γνωρίζουμε ότι η σχετική συχνότητα της δεύτερης κλάσης είναι τριπλάσια

από τη σχετική συχνότητα της τέταρτης κλάσης να κατασκευάσετε τον πίνακα σχετικής

συχνότητας fi και αθροιστικής συχνότητας Fi. (Μονάδες 4)

**Μονάδες 7**

**Β2.** Αν f2 = 0,3 και f4 = 0,1,να βρείτε την μέση τιμή και την διακύμανση του δείγματος.  **Μονάδες 6**

**Β3.** Αν επιπλέον, ισχύει ότι: 

Να βρείτε πόσοι υπάλληλοι έχουν τουλάχιστον 5 χρόνια προϋπηρεσίας.

**Μονάδες 7**

**Β4.** Η εταιρεία αποφάσισε να δώσει ένα εφάπαξ επίδομα yi (ευρώ) σε κάθε υπάλληλο το οποίο

εξαρτάται από τα χρόνια προϋπηρεσίας του και δίνεται από τη σχέση



Να βρείτε πόσο θα στοιχίσει στην εταιρεία η απόφαση αυτή.

**Μονάδες 5**

Δίνεται ότι, 

**ΘΕΜΑ Γ**

Δίνεται ο δειγματικός χώρος Ω ενός πειράματος τύχης, ο οποίος αποτελείται από ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα. Αν Α, Β ενδεχόμενα του Ω με  , και συνάρτηση f με τύπο:



όπου  τα συμπληρωματικά των Α και Β.

**Γ1.** Να δείξετε ότι η εφαπτομένη ε της f στο σημείο Μ(1, f(1)) έχει εξίσωση:



**Μονάδες 3**

Αν η ε σχηματίζει με τους άξονες τρίγωνο με εμβαδόν  τ.μ.

**Γ2.** Να δείξετε ότι τα Α, Β είναι ασυμβίβαστα.

**Μονάδες 6**

**Γ3.** Αν για το δείγμα  με





ισχύει ότι  και  , τότε να δείξετε ότι  και  **Μονάδες 7**

**Γ4.** Έστω Γ ένα ενδεχόμενο του ίδιου δειγματικού χώρου Ω. Στο δείγμα  του

ερωτήματος **Γ.3.** προσθέτουμε μία παρατήρηση  Αν το νέο δείγμα έχει μέση

τιμή  να αποδείξετε ότι:

**i.** τα Α και Γ δεν είναι ασυμβίβαστα,

**Μονάδες 4**

**ii.** 

**Μονάδες 5**

**ΘΕΜΑ Δ**

Δίνεται η συνάρτηση  ένα δείγμα v παρατηρήσεων

, i = 1, 2, …, v οι οποίες έχουν μέση τιμή , τυπική απόκλιση s, συντελεστής μεταβολής CV και ισχύει 

Έστω επίσης ο δειγματικός χώρος Ω = {0, 1, 2, …, 9} ενός πειράματος τύχης, για τα στοιχειώδη ενδεχόμενα του οποίου γνωρίζουμε ότι:  και P(0) = CV.

**Δ1.** Να δείξετε ότι CV = 10%.

**Μονάδες 6**

**Δ2.** Να δείξετε ότι: 

**Μονάδες 6**

**Δ3.** Να βρείτε το ποσοστό μεταβολής του συντελεστή CV, αν η τιμή καθεμιάς από τις

παρατηρήσεις ti, i = 1, 2, …, v, ελαττωθεί κατά 2 μονάδες.

**Μονάδες 5**

Δίνεται επιπλέον ότι ν = 16.

**Δ4.** Να δείξετε ότι:(Μονάδες 4) και να ελέγξετε αν μπορεί να υπάρχει

παρατήρηση του δείγματος την οποία θα αφαιρέσουμε από το δείγμα και η μέση τιμή των

υπολοίπων 15 παρατηρήσεων να είναι  (Μονάδες 4)

**Μονάδες 8**

Δίνεται ότι, 