Μαθηματικά Γενικής Παιδείας

Γ΄ Λυκείου

Θέματα Επαναληπτικών Εξετάσεων

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ: ΚΑΡΑΦΕΡΗΣ ΓΕΩΡΓΙΟΣ

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΔΕΥΤΕΡΑ 10 ΙΟΥΝΙΟΥ 2013 - ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να αποδείξετε ότι για δύο συμπληρωματικά ενδεχόμενα Α και Α′ ισχύει:

$$P(A') = 1 - P(A)$$

Μονάδες 7

Α2. Να ορίσετε το μέτρο διασποράς **εύρος** ή **κύμανση**.

Μονάδες 4

Α3. Τι ονομάζεται παράγωγος μιας συνάρτησης f στο σημείο x_o του πεδίου ορισμού της;

Μονάδες 4

Α4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α) $\lim\limits_{x \to x_o} (συνx) = συνx_o$

(μονάδες 2)

β) $\left(c\, f(x)\right)' = c\, f'(x)$

(μονάδες 2)

γ) Σε μια ποσοτική μεταβλητή αντί του ραβδογράμματος χρησιμοποιείται το **διάγραμμα συχνοτήτων**.

(μονάδες 2)

δ) Ένα δείγμα τιμών μιας μεταβλητής Χ χαρακτηρίζεται ομοιογενές, όταν ο συντελεστής μεταβολής ξεπερνά το 10%

(μονάδες 2)

ε) Δύο ενδεχόμενα Α και Β ενός δειγματικού χώρου Ω λέγονται ασυμβίβαστα, όταν $A \cap B \neq \varnothing$

(μονάδες 2)

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2e^x(2x-3),\ x \in \mathbb{R}$

Θεωρούμε επίσης δύο ενδεχόμενα Α και Β ενός δειγματικού χώρου Ω με

$$P(A) = x_1 \quad \text{και} \quad P(B) = -\frac{f(x_1)}{6\sqrt{e}}$$

όπου η f παρουσιάζει ελάχιστο στο x_1

Β1. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Μονάδες 6

Β2. Να αποδείξετε ότι $P(A) = \frac{1}{2}$ και $P(B) = \frac{2}{3}$

Μονάδες 6

Β3. Να αποδείξετε ότι τα ενδεχόμενα Α και Β δεν είναι ασυμβίβαστα

Μονάδες 5

και

Β4. Να αποδείξετε ότι $\frac{1}{6} \le P(A'-B') \le \frac{2}{3}$

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Γ

Εξετάζουμε ένα δείγμα μεγέθους ν ως προς μία ποσοτική μεταβλητή Χ και ομαδοποιούμε τις παρατηρήσεις του δείγματος σε 5 ισοπλατείς κλάσεις πλάτους c, όπως φαίνεται στον παρακάτω πίνακα:

Κλάσεις	**Κεντρικές τιμές x_i**	**f_i%**	**F_i**	**F_i%**
[α, ·)				λ
[· , ·)				3λ + 10
[· , ·)				
[· , ·)				$κλ^2 – 2λ + 10$
[· , ·)				$κλ^2 – 3λ + 30$
Σύνολα				

Δίνεται ότι οι αθροιστικές σχετικές συχνότητες F_3 και F_5 είναι οι ρίζες της εξίσωσης:

$$5x^2 – 8x + 3κ = 0 \text{ , όπου } x \in \mathbb{R} \text{ και } κ \in \mathbb{R}$$

Γ1. Να αποδείξετε ότι κ = 1 και λ = 10

Μονάδες 8

Γ2. Να αποδείξετε ότι $f_1\% = 10$, $f_2\% = 30$, $f_3\% = 20$, $f_4\% = 30$ και $f_5\% = 10$

Μονάδες 5

Γ3. Αν το 25% των παρατηρήσεων είναι μικρότερες του 16 και το 25% των παρατηρήσεων είναι μεγαλύτερες ή ίσες του 24, τότε να αποδείξετε ότι α = 10 και c = 4

(μονάδες 4)

Στη συνέχεια να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τον παραπάνω πίνακα κατάλληλα συμπληρωμένο.

(μονάδες 4)

Μονάδες 8

Γ4. Αν το πλήθος των παρατηρήσεων που είναι μεγαλύτερες ή ίσες του 22 είναι 800, τότε να υπολογίσετε το μέγεθος του δείγματος.

Μονάδες 4

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1} + 1$, $x \in \mathbb{R}$ και ο δειγματικός χώρος

$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$, όπου $\omega_1 = -1$, $\omega_2 = 0$ και $1 < \omega_3 < \omega_4$

Δίνονται, επίσης, οι πιθανότητες $P(\omega_i) = f(\omega_i) - \dfrac{1}{3}$, όπου $i = 1, 2$

και $$P(\omega_3) = -\frac{1}{6} \lim_{x \to 1} \frac{f'(x)}{x-1}$$

Δ1. Θεωρούμε τα ενδεχόμενα Α, Β και Γ του δειγματικού χώρου Ω με

$$A = \{\omega \in \Omega \ / \ f'(\omega) \le 0\}, \qquad B = \{\omega \in \Omega \ / \ f(\omega) > 1\}$$

και

$$\Gamma = \left\{\omega \in \Omega \ / \ x^2 + \omega x \ge -\frac{1}{4} \ \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}\right\}$$

α) Να βρείτε τις πιθανότητες $P(\omega_1), P(\omega_2), P(\omega_3)$ και $P(\omega_4)$

(μονάδες 8)

β) Να βρείτε τις πιθανότητες P(A), P(B), P(Γ) και P(A-B)

(μονάδες 8)

Μονάδες 16

Δ2. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της γραφικής παράστασης της f, η οποία σχηματίζει με τον άξονα x′x γωνία 45^o

Μονάδες 4

Δ3. Αν $M_κ(ω_κ, y_κ)$, $κ = 1, 2, 3, 4$ είναι σημεία της εφαπτομένης (ε): $y = x + 1$ με

$$2δ_{ω_κ} = δ_{y_κ} \text{ και } R_{y_κ} = 5$$

τότε να υπολογίσετε τα $ω_3$ και $ω_4$ του δειγματικού χώρου Ω, όπου

$δ_{ω_κ}$: η διάμεσος των τετμημένων των σημείων $M_κ$,

$δ_{y_κ}$: η διάμεσος των τεταγμένων των σημείων $M_κ$ και

$R_{y_κ}$: το εύρος των τεταγμένων των σημείων $M_κ$

Μονάδες 5

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)

1. Στο εξώφυλλο του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. Στο εσώφυλλο πάνω-πάνω να συμπληρώσετε τα ατομικά στοιχεία μαθητή. Στην αρχή των απαντήσεών σας να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. Να μην αντιγράψετε τα θέματα στο τετράδιο και **να μην γράψετε** πουθενά στις απαντήσεις σας το όνομά σας.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει. Μολύβι επιτρέπεται, **μόνο** αν το ζητάει η εκφώνηση, και ΜΟΝΟ για πίνακες, διαγράμματα κλπ.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 18:15

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΤΡΙΤΗ 12 ΙΟΥΝΙΟΥ 2012

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΠΕΝΤΕ (5)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω $f(x)=c$, $x\in\mathbb{R}$ και c σταθερός πραγματικός αριθμός. Να αποδείξετε ότι $(c)'=0$

Μονάδες 7

Α2. Αν $t_1, t_2, ..., t_v$ είναι οι παρατηρήσεις μιας μεταβλητής Χ ενός δείγματος μεγέθους ν, τότε να ορίσετε τη μέση τιμή $\bar{x}$ των παρατηρήσεων.

Μονάδες 4

Α3. Έστω f μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού Α. Πότε λέμε ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x_0\in A$;

Μονάδες 4

Α4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη* ***Σωστό****, αν η πρόταση είναι σωστή, ή* ***Λάθος****, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α) Αν f_i είναι η σχετική συχνότητα της τιμής x_i μιας μεταβλητής Χ, τότε ισχύει: $0\le f_i\le 1$

β) Αν x_i είναι η τιμή μιας ποσοτικής μεταβλητής Χ, τότε η αθροιστική σχετική συχνότητα F_i εκφράζει το ποσοστό των παρατηρήσεων που είναι μεγαλύτερες της τιμής x_i

γ) Αν τα ενδεχόμενα Α, Β, Γ ενός δειγματικού χώρου Ω είναι ανά δύο ασυμβίβαστα, τότε ισχύει:

$$P(A\cup B\cup\Gamma)=P(A)+P(B)+P(\Gamma)$$

δ) $(\sigma\upsilon\nu x)' = \eta\mu x,\ x \in \mathbb{R}$

ε) Αν Α, Β είναι ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω, τότε το ενδεχόμενο $A \cup B$ πραγματοποιείται, όταν πραγματοποιείται ένα τουλάχιστον από τα Α, Β.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Οι ημέρες αδείας των υπαλλήλων μιας εταιρείας ομαδοποιούνται σε πέντε κλάσεις ίσου πλάτους, σύμφωνα με τον παρακάτω πίνακα:

Αριθμός ημερών (αδείας)	x_i	ν_i	f_i	N_i	F_i
[6,...)		16			
[...,...)					
[...,...)					
[...,...)					
[...,26)					
Σύνολο					

Αν ισχύει ότι:

- στο κυκλικό διάγραμμα συχνοτήτων των ημερών αδείας το τόξο α_1 του κυκλικού τομέα, το οποίο αντιστοιχεί στην πρώτη κλάση, είναι 72^o, και
- $3f_2 = 3f_5 = f_3 = f_4$, τότε:

Β1. Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τον παραπάνω πίνακα και να τον συμπληρώσετε κατάλληλα.

Μονάδες 8

Β2. Να σχεδιάσετε στο τετράδιό σας (όχι σε μιλιμετρέ) το ιστόγραμμα και το πολύγωνο συχνοτήτων.

Μονάδες 4

Β3. Να βρείτε τον μέσο αριθμό ημερών αδείας και την τυπική απόκλιση του δείγματος.

(Δίνεται: $\sqrt{25,6} \approx 5,06$)

Μονάδες 8

Β4. Να βρείτε το ποσοστό των υπαλλήλων που πήραν άδεια από 12 μέχρι 25 ημέρες.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Γ

Έστω $\Omega=\{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5\}$ ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης και $A=\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$, $B=\{\omega_3, \omega_4, \omega_5\}$ δύο ενδεχόμενα του Ω, με $P(A)=\frac{1}{2}$. Αν είναι $P(\omega_1)=\alpha$, $P(\omega_2)=\beta$, με $26\alpha^2-10\alpha-2\alpha\beta+\beta^2+1=0$, $P(\omega_3)=\gamma$ και η συνάρτηση $g(x)= P(\omega_4)\, x^3$, $x\in\mathbb{R}$, τότε:

Γ1. Να αποδείξετε ότι $\alpha=\beta=\frac{1}{5}$ και $\gamma=\frac{1}{10}$

Μονάδες 9

Γ2. Να βρείτε το $P(\omega_4)$, αν η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της g, στο σημείο $(1, g(1))$, είναι παράλληλη προς την ευθεία $y=x$, και στη συνέχεια να βρείτε το $P(\omega_5)$

Μονάδες 6

Γ3. Αν είναι $P(\omega_4)=\frac{1}{3}$, $P(\omega_5)=\frac{1}{6}$, τότε να βρείτε την πιθανότητα των ενδεχομένων Κ, Λ, όπου:

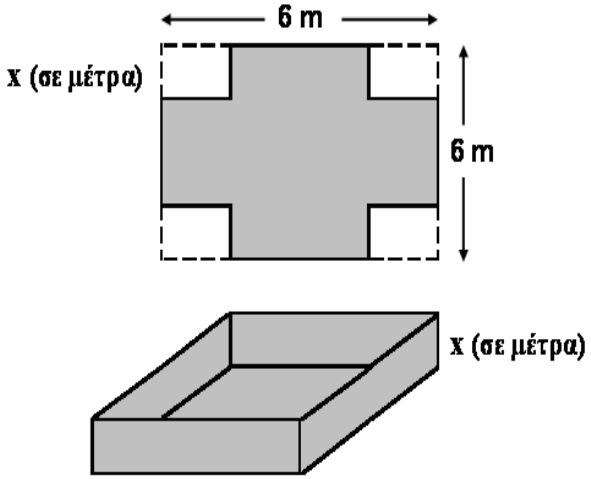
Κ: «ένα μόνο από τα Α και Β να πραγματοποιείται»

Λ: «να πραγματοποιείται το Α ή να μην πραγματοποιείται το Β».

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Δ

Από ένα φύλλο λαμαρίνας σχήματος τετραγώνου πλευράς 6 μέτρων κατασκευάζεται μια δεξαμενή σχήματος ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου, ανοικτή από πάνω. Από τις γωνίες του φύλλου λαμαρίνας κόβονται τέσσερα ίσα τετράγωνα πλευράς x μέτρων, $0<x<3$ και στη συνέχεια οι πλευρές της διπλώνονται προς τα επάνω, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Δ1. Να αποδείξετε ότι ο όγκος της δεξαμενής ως συνάρτηση του x είναι

$$f(x)=4x(3-x)^2,\ 0<x<3$$

(Δίνεται ότι ο όγκος ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου διαστάσεων α, β, γ είναι V=αβγ).

Μονάδες 4

Δ2. Να βρείτε για ποια τιμή του x η δεξαμενή έχει μέγιστο όγκο.

Μονάδες 6

Δ3. Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x+2)-8}{x}$

Μονάδες 4

Δ4. Θεωρούμε τις τιμές $y_i=f(x_i)$, $i=1,2,3,4,5$ με

$1=x_1<x_2<x_3<x_4<x_5=2$, οι οποίες έχουν μέση τιμή $\bar{y}=12$, τυπική απόκλιση $s_y=2$ και συντελεστή μεταβολής CV_y.
Να βρείτε το εύρος R των τιμών y_i, $i=1,2,3,4,5$. Στη συνέχεια να βρείτε τον αριθμό $\alpha\in\mathbb{R}$ με $-12<\alpha<0$ ο οποίος, αν προστεθεί σε καθεμιά από τις τιμές y_i, προκύπτει δείγμα με συντελεστή μεταβολής CV τέτοιον, ώστε

$$CV=2CV_y+\frac{R}{12}$$

Μονάδες 6

Δ5. Έστω Α,Β δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω με ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα. Αν είναι $A\neq\varnothing$, $B\neq\varnothing$ και $A\subseteq B$, να αποδείξετε ότι ισχύει:

$$\frac{P(A)}{P(B)}\leq\left(\frac{3-P(B)}{3-P(A)}\right)^2$$

Μονάδες 5

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Δεν επιτρέπεται να γράψετε** καμιά άλλη σημείωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα.
4. Να γράψετε τις απαντήσεις σας **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε μολύβι μόνο για σχέδια, διαγράμματα και πίνακες.
5. Να μη χρησιμοποιήσετε χαρτί μιλιμετρέ.
6. Κάθε απάντηση τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
7. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
8. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 18.30.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΣΑΒΒΑΤΟ 4 ΙΟΥΝΙΟΥ 2011
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΠΕΝΤΕ (5)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Για δύο ενδεχόμενα Α και Β ενός δειγματικού χώρου Ω να αποδείξετε ότι:
$P(A \cup B)=P(A)+P(B)-P(A \cap B)$

Μονάδες 7

Α2. Έστω ένας δειγματικός χώρος $\Omega=\{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_v\}$ με πεπερασμένο πλήθος στοιχείων. Να διατυπώσετε τον αξιωματικό ορισμό της πιθανότητας.

Μονάδες 4

Α3. Πότε λέμε ότι μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της Α;

Μονάδες 4

Α4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη* ***Σωστό****, αν η πρόταση είναι σωστή, ή* ***Λάθος****, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α) Αν $x>0$, τότε $(\sqrt{x})'=\frac{1}{\sqrt{x}}$

β) Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ και ισχύει $f'(x)>0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ.

γ) Η αθροιστική συχνότητα N_i μίας κατανομής εκφράζει το πλήθος των παρατηρήσεων που είναι μικρότερες ή ίσες της τιμής x_i.

δ) Στην κανονική κατανομή το 95% περίπου των παρατηρήσεων βρίσκεται στο διάστημα $(\bar{x} - s, \bar{x} + s)$, όπου $\bar{x}$ η μέση τιμή και s η τυπική απόκλιση.

ε) Η διάμεσος (δ) ενός δείγματος ν παρατηρήσεων, οι οποίες έχουν διαταχθεί σε αύξουσα σειρά, ορίζεται πάντα ως η μεσαία παρατήρηση.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Υποθέτουμε ότι οι θερμοκρασίες (σε ^{o}C) σε μια περιοχή κατά τη διάρκεια ενός 24ώρου προσεγγίζονται από τις τιμές της συνάρτησης $\theta(t)=t-4\sqrt{t}+\alpha$, όπου $\alpha \in \mathbb{R}$ και $t \in (0,24]$ ο χρόνος σε ώρες.

Β1. Να αποδείξετε ότι για $t \in (0,4]$ η θερμοκρασία μειώνεται και για $t \in (4,24]$ η θερμοκρασία αυξάνεται.

Μονάδες 7

Β2. Να υπολογίσετε την τιμή του α, αν γνωρίζετε ότι η ελάχιστη θερμοκρασία της περιοχής εντός του 24ώρου είναι $-1^{o}C$.

Μονάδες 6

Β3. Για $\alpha=3$ να βρείτε τις ώρες που η θερμοκρασία της περιοχής είναι $0^{o}C$.

Μονάδες 5

Β4. Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{t \to 4} \dfrac{\theta'(t)}{t^2-16}$

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Γ

Οι ηλικίες των εργαζομένων σε μια εταιρεία έχουν ομαδοποιηθεί σε 4 κλάσεις ίσου πλάτους, όπως εμφανίζονται στον παρακάτω πίνακα συχνοτήτων.

ΗΛΙΚΙΕΣ (χρόνια)	x_i	ν_i	f_i %	N_i	F_i %	$\nu_i x_i$
[25,)			x			
[,)			x+20			
[,)			2x			
[,)			x^2-6x	50		
ΣΥΝΟΛΟ						

Γ1. Να βρεθούν οι σχετικές συχνότητες f_i % i=1,2,3,4

Μονάδες 6

Γ2. Αν η διάμεσος της κατανομής των ηλικιών είναι δ=50 χρόνια, να αποδείξετε ότι το πλάτος της κλάσης είναι c=10.

Μονάδες 8

Γ3. Αφού μεταφέρετε στο τετράδιό σας τον παραπάνω πίνακα συμπληρωμένο κατάλληλα, να υπολογίσετε την μέση τιμή $\bar{x}$ των ηλικιών.

Μονάδες 6

Γ4. Πόσοι εργαζόμενοι, των οποίων οι ηλικίες ανήκουν στην πρώτη κλάση, πρέπει να προσληφθούν, ώστε η νέα μέση ηλικία να είναι 40 χρόνια;

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Δ

Εξακόσιοι απόφοιτοι Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης, οι οποίοι έχουν τα ίδια τυπικά και ουσιαστικά προσόντα, υποβάλλουν αίτηση πρόσληψης σε δύο εταιρείες Α και Β. Δίνεται ότι η πιθανότητα, ένας τυχαία επιλεγμένος από αυτούς:

- να κριθεί κατάλληλος για πρόσληψη σε μια μόνο από τις εταιρείες Α και Β είναι $\frac{\lambda+1}{3\lambda}$, $\lambda \neq 0$

- να κριθεί κατάλληλος για πρόσληψη το πολύ σε μια από τις εταιρείες Α και Β είναι $\frac{3\lambda-1}{3\lambda}$, $\lambda \neq 0$
- να μην κριθεί κατάλληλος για πρόσληψη σε καμμία από τις δύο εταιρείες είναι $\frac{1}{\lambda-2}$, $\lambda \neq 2$

Δ1. Να αποδείξετε ότι λ=4.

Μονάδες 8

Δ2. Από τους 600 αποφοίτους που υπέβαλαν αίτηση πρόσληψης στις εταιρείες Α και Β, η εταιρεία Α έκρινε κατάλληλους για πρόσληψη 50 λιγότερους από όσους έκρινε η εταιρεία Β.

α) Πόσοι απόφοιτοι κρίθηκαν κατάλληλοι για πρόσληψη μόνο από την εταιρεία Α, πόσοι κρίθηκαν κατάλληλοι για πρόσληψη μόνο από την εταιρεία Β και πόσοι απόφοιτοι θα βρεθούν στο δίλημμα να επιλέξουν σε ποια από τις δύο εταιρείες στις οποίες κρίθηκαν κατάλληλοι για πρόσληψη, επιθυμούν να εργαστούν;

Μονάδες 7

β) Να αποδείξετε ότι 300 απόφοιτοι κρίθηκαν κατάλληλοι για πρόσληψη, από τις εταιρείες Α ή Β.

Μονάδες 6

Δ3. Στους αποφοίτους που δεν κρίθηκαν κατάλληλοι για πρόσληψη δίνεται η δυνατότητα παρακολούθησης προγράμματος επιμόρφωσης. Αν η πιθανότητα εύρεσης εργασίας για αυτούς που θα παρακολουθήσουν το πρόγραμμα είναι διπλάσια από την αντίστοιχη εκείνων που δεν θα το παρακολουθήσουν, να υπολογίσετε πόσοι απόφοιτοι από αυτούς, που δεν κρίθηκαν κατάλληλοι για πρόσληψη, θα βρουν εργασία.

Μονάδες 4

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Δεν επιτρέπεται να γράψετε** καμιά άλλη σημείωση**.** Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα.
4. Να γράψετε τις απαντήσεις σας **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε μολύβι μόνο για σχέδια, διαγράμματα και πίνακες.
5. Να μη χρησιμοποιήσετε χαρτί μιλιμετρέ.
6. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
7. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
8. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 18.30.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ
ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΔΕΥΤΕΡΑ 5 ΙΟΥΛΙΟΥ 2010
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ και $c \in R$, να αποδείξετε ότι $(cf(x))' = cf'(x)$, $x \in \Delta$.

Μονάδες 9

Α2. Πότε μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της;

Μονάδες 3

Α3. Πώς ορίζεται ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης;

Μονάδες 3

Α4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη* ***Σωστό****, αν η πρόταση είναι σωστή, ή* ***Λάθος****, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α) Αν οι συναρτήσεις f , g έχουν κοινό πεδίο ορισμού το Α, τότε η συνάρτηση $\frac{f}{g}$ έχει πάντα πεδίο ορισμού το Α

β) Ισχύει $\lim\limits_{x \to x_0} (συνx) = συνx_0$

γ) Σε μια ομαδοποιημένη κατανομή με κλάσεις ίσου πλάτους οι διαδοχικές κεντρικές τιμές των κλάσεων διαφέρουν μεταξύ τους όσο και το πλάτος κάθε κλάσης.

δ) Σε μια ομαδοποιημένη κατανομή με κλάσεις ίσου πλάτους το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από το πολύγωνο σχετικών συχνοτήτων και τον οριζόντιο άξονα είναι ίσο με το μέγεθος ν του δείγματος.

ε) Αν P(A) είναι η πιθανότητα ενός ενδεχομένου

$A= \{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_\kappa\} \neq \emptyset$, τότε

$$P(A) = P(\alpha_1)+ P(\alpha_2)+ ... + P(\alpha_\kappa)$$

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Οι βαθμοί 60 μαθητών σε ένα διαγώνισμα Μαθηματικών κυμαίνονται από 10 έως 20 και έχουν ομαδοποιηθεί σε 5 κλάσεις ίσου πλάτους. Αν:

- Η γωνία του κυκλικού τομέα που αντιστοιχεί στην κλάση [14, 16) του κυκλικού διαγράμματος είναι 144^o
- Οι σχετικές συχνότητες των δύο πρώτων κλάσεων είναι ίσες.
- 48 μαθητές πήραν βαθμό έως 16 και
- 6 μαθητές πήραν βαθμό τουλάχιστον 18, τότε:

Β1. Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τον παρακάτω πίνακα σωστά συμπληρωμένο.

ΒΑΘΜΟΛΟΓΙΑ [-)	ΚΕΝΤΡΙΚΗ ΤΙΜΗ x_i	ΣΥΧΝΟΤΗΤΑ ν_i	ΣΧΕΤΙΚΗ ΣΥΧΝΟΤΗΤΑ f_i	ΣΧΕΤΙΚΗ ΣΥΧΝΟΤΗΤΑ f_i %
ΣΥΝΟΛΟ				

Μονάδες 10

Β2. Να βρείτε τη μέση τιμή $\overline{x}$ της βαθμολογίας των μαθητών.

Μονάδες 6

Β3. Να βρείτε πόσοι μαθητές πήραν βαθμολογία από 10 έως 14

Μονάδες 4

Β4. Να βρείτε το ποσοστό των μαθητών που πήραν βαθμολογία τουλάχιστον 17

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Γ

Έστω $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$ ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης και τα ενδεχόμενά του $A= \{\omega_1, \omega_3\}$ και $B= \{\omega_2, \omega_4\}$

Αν είναι $P(A-B) = \frac{\nu+1}{\nu+4}$ και $P(B-A) = \frac{\nu-1}{2\nu}$

όπου ν θετικός ακέραιος, τότε:

Γ1. Να αποδείξετε ότι $P(A-B) = P(A)$ και $P(B-A) = P(B)$

Μονάδες 6

Γ2. Να αποδείξετε ότι $\nu=4$

Μονάδες 10

Γ3. Να υπολογίσετε τις πιθανότητες των ενδεχομένων Α και Β

Μονάδες 4

Γ4. Να υπολογίσετε την πιθανότητα του ενδεχομένου $A' \cup B'$

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Δ

Έστω $t_1, t_2, \ldots, t_\nu$ οι παρατηρήσεις μιας ποσοτικής μεταβλητής Χ ενός δείγματος μεγέθους ν, που έχουν μέση τιμή $\bar{x}$ και τυπική απόκλιση s

Θεωρούμε επίσης τη συνάρτηση

$$f(t) = \frac{1}{300s^2}\left(t-\bar{x}\right)^3, \quad t \in R \quad \text{και} \quad s \neq 0$$

Δ1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.

Μονάδες 5

Δ2. Να αποδείξετε ότι ο ρυθμός μεταβολής της συνάρτησης f γίνεται ελάχιστος για $t = \bar{x}$ και να βρείτε την ελάχιστη τιμή του.

Μονάδες 6

Δ3. Αν $f'(0)=1$, να υπολογίσετε το συντελεστή μεταβολής CV των παραπάνω παρατηρήσεων και να εξετάσετε αν το δείγμα είναι ομοιογενές.

Μονάδες 8

Δ4. Να αποδείξετε ότι η μέση τιμή των αριθμών $f'(t_1), f'(t_2), \ldots, f'(t_v)$ είναι ίση με $\frac{1}{100}$

Μονάδες 6

ΟΔΗΓΙΕΣ ΓΙΑ ΤΟΥΣ ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟΥΣ

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων, αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Καμιά άλλη σημείωση δεν επιτρέπεται να γράψετε.**
   Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας σε όλα** τα θέματα.
4. Να γράψετε τις απαντήσεις σας **μόνο με μπλε ή μαύρο στυλό διαρκείας και μόνον ανεξίτηλης μελάνης**. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε μολύβι μόνο για σχέδια, διαγράμματα και πίνακες.
5. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
6. Να μη χρησιμοποιήσετε χαρτί μιλιμετρέ.
7. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
8. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 9:30 π.μ.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΤΡΙΤΗ 7 ΙΟΥΛΙΟΥ 2009
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΠΕΝΤΕ (5)

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Να δείξετε ότι για δύο συμπληρωματικά ενδεχόμενα Α και Α′ ενός δειγματικού χώρου, ισχύει

$$P(A')=1-P(A)$$

Μονάδες 9

Β. **α.** Έστω μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το Α. Πότε λέμε ότι η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x_1 \in A$;

Μονάδες 3

β. Αν $t_1, t_2, ..., t_\nu$ είναι οι παρατηρήσεις μιας μεταβλητής Χ σε δείγμα μεγέθους ν, να ορίσετε τη μέση τιμή $\bar{x}$ των παρατηρήσεων.

Μονάδες 3

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Αν η συνάρτηση f έχει στο x_0 όριο έναν πραγματικό αριθμό ℓ, δηλαδή αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\ell$ τότε για κάθε φυσικό αριθμό ν μεγαλύτερο του 1 θα ισχύει $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x))^\nu = \nu\ell^{\nu-1}$

Μονάδες 2

β. Για τη συνάρτηση $f(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$, ισχύει $f'(x) = e^x$

Μονάδες 2

γ. Η διάμεσος ενός δείγματος παρατηρήσεων είναι η τιμή για την οποία το πολύ 50% των παρατηρήσεων είναι μικρότερες από αυτήν και το πολύ 50% των παρατηρήσεων είναι μεγαλύτερες από την τιμή αυτήν.

Μονάδες 2

δ. Αν η καμπύλη συχνοτήτων για ένα χαρακτηριστικό είναι κανονική ή περίπου κανονική με τυπική απόκλιση s και εύρος R, τότε ισχύει $s \approx 6R$

Μονάδες 2

ε. Ο δειγματικός χώρος Ω ενός πειράματος τύχης λέγεται βέβαιο ενδεχόμενο.

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha x^3 - 8$, όπου α ένας πραγματικός αριθμός.

α. Αν $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = -7$, να βρεθεί η τιμή του α

Μονάδες 5

β. Έστω $\alpha = 1$

i. Να βρεθεί το όριο $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{f(x)}{x-2}$

Μονάδες 10

ii. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο με τετμημένη $x_0 = 2$

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ 3ο

Έστω x_1, x_2, x_3, x_4 οι τιμές μιας μεταβλητής X ενός δείγματος μεγέθους $\nu=72$ με αντίστοιχες (απόλυτες) συχνότητες ν_1, ν_2, ν_3, ν_4, όπου $\nu_4 = 3\nu_3$. Δίνεται επίσης ότι τα τόξα του κυκλικού διαγράμματος συχνοτήτων που αντιστοιχούν στις τιμές x_1 και x_2 είναι αντίστοιχα 50° και 30°.

α. Να βρεθούν οι συχνότητες ν_i, $i=1,2,3,4$

Μονάδες 10

β. Να βρεθούν τα τόξα που αντιστοιχούν στις τιμές x_3 και x_4

Μονάδες 8

γ. Δίνεται ότι $x_1 < -7$, $x_2 = -7$, $x_3 = 3$, και $x_4 > 3$. Να δειχθεί ότι

$$10\,R + 72\,\bar{x} = 52\,\delta$$

όπου R, $\bar{x}$, δ είναι αντίστοιχα το εύρος, η μέση τιμή και η διάμεσος των παρατηρήσεων.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \nu^3 x + \dfrac{4}{x^2}$, $x \in (0,1)$, όπου ν ακέραιος αριθμός με $\nu > 2$

Α. α. Να προσδιοριστεί το διάστημα στο οποίο η f είναι γνησίως αύξουσα και το διάστημα στο οποίο η f είναι γνησίως φθίνουσα.

Μονάδες 8

β. Να μελετηθεί η συνάρτηση f ως προς τα ακρότατα και να δειχθεί ότι $f(x) \geq 3\nu^2$ για κάθε $x \in (0,1)$

Μονάδες 5

Β. Θεωρούμε τον δειγματικό χώρο Ω = {1, 2, ..., ν} με ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα και το ενδεχόμενό του, Α για το οποίο ισχύει

$$\nu^3 P(A) + \frac{4}{(P(A))^2} = 3\nu^2 \quad \text{και} \quad N(A)=\nu^2-9\nu-8$$

όπου P(A) είναι η πιθανότητα του Α και N(A) το πλήθος των στοιχείων του Α

α. Να δείξετε ότι $P(A) = \frac{1}{5}$

Μονάδες 7

β. Αν επιπλέον Β είναι ένα ενδεχόμενο του δειγματικού χώρου Ω με $P(A\cap B) = \frac{1}{6}$, να υπολογιστεί η πιθανότητα του ενδεχομένου $A'\cup B$

Μονάδες 5

ΟΔΗΓΙΕΣ ΓΙΑ ΤΟΥΣ ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟΥΣ

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων, αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Καμιά άλλη σημείωση δεν επιτρέπεται να γράψετε.** Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας σε όλα** τα θέματα. Να μη χρησιμοποιηθεί το μιλιμετρέ φύλλο του τετραδίου.
4. Να γράψετε τις απαντήσεις σας **μόνο με μπλε ή μαύρο στυλό διαρκείας και μόνο ανεξίτηλης μελάνης**. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε μολύβι μόνο για σχέδια, διαγράμματα και πίνακες.

5. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
6. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
7. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 10.00 π.μ.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΤΡΙΤΗ 1 ΙΟΥΛΙΟΥ 2008
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΠΕΝΤΕ (5)

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Έστω f, g δύο παραγωγίσιμες συναρτήσεις στο σύνολο των πραγματικών αριθμών. Να αποδείξετε ότι

$$\big(f(x) + g(x)\big)' = f'(x) + g'(x).$$

Μονάδες 9

Β. **α.** Να δώσετε τον ορισμό της διακύμανσης των παρατηρήσεων $t_1, t_2, \ldots, t_v$ μιας μεταβλητής Χ.

Μονάδες 3

β. Πότε δύο ενδεχόμενα Α και Β λέγονται ασυμβίβαστα;

Μονάδες 3

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Γενικά δεχόμαστε ότι ένα δείγμα τιμών μιας μεταβλητής είναι ομοιογενές, εάν ο συντελεστής μεταβολής του δείγματος δεν ξεπερνά το 10%.

Μονάδες 2

β. Χαρακτηριστικό γνώρισμα μιας συνεχούς συνάρτησης σε ένα κλειστό διάστημα είναι ότι η γραφική της παράσταση είναι μια συνεχής καμπύλη.

Μονάδες 2

γ. Αν η συνάρτηση f έχει στο x_0 όριο έναν πραγματικό αριθμό ℓ_1, δηλαδή αν $\lim\limits_{x\to x_o} f(x) = \ell_1$, τότε

$\lim\limits_{x\to x_o} (f(x))^\nu = \ell_1^\nu$ (ν θετικός ακέραιος).

Μονάδες 2

δ. Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ και ισχύει $f'(x) < 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ.

Μονάδες 2

ε. Το διάγραμμα συχνοτήτων χρησιμοποιείται για τη γραφική παράσταση των τιμών μιας ποιοτικής μεταβλητής.

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ 2ο

Η μέση βαθμολογία των μαθητών μιας τάξης σε ένα τεστ είναι 70. Χωρίζουμε τη βαθμολογία σε τέσσερις κλάσεις ίσου πλάτους, όπως φαίνεται στον παρακάτω πίνακα:

Κλάσεις [–)	Κεντρικές τιμές x_i	Συχνότητα ν_i	Σχετική συχνότητα f_i
20 – 40			
40 – 60			
60 – 80			
80 – 100			
Σύνολα			

Δίνεται επιπλέον ότι το ποσοστό των μαθητών που έχουν βαθμό από 20 έως 40 είναι ίσο με το ποσοστό των μαθητών που έχουν βαθμό από 40 έως 60, ενώ στο κυκλικό διάγραμμα των δεδομένων, η γωνία του κυκλικού τομέα για την επίδοση από 80 έως 100 είναι 108^o.

α. Να δείξετε ότι $f_1 = f_2 = \frac{1}{10}$, $f_3 = \frac{5}{10}$, $f_4 = \frac{3}{10}$.

Μονάδες 10

β. Αν ο αριθμός των μαθητών της τάξης είναι 50, τότε:

i. Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τον πίνακα συχνοτήτων και να συμπληρώσετε όλα τα στοιχεία του.

Μονάδες 5

ii. Να βρείτε το πλήθος των μαθητών που έχουν βαθμολογία τουλάχιστον 60.

Μονάδες 5

iii. Να βρείτε το ποσοστό των μαθητών που έχουν βαθμολογία από 50 έως 70.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 3ο

Έστω Α και Β δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω και p ένας πραγματικός αριθμός με $0 < p < 1$. Δίνεται ότι οι πιθανότητες $P(A)$, $P(A \cup B)$ και $P(A \cap B)$ είναι ανά δύο διαφορετικές μεταξύ τους και αποτελούν στοιχεία του συνόλου

$$\{p - 1, p, p + 1, p^2, p^3\}.$$

α. Να δείξετε ότι $P(A) = p^2$, $P(A \cup B) = p$ και $P(A \cap B) = p^3$.

Μονάδες 9

β. Να αποδείξετε ότι $P(B) = p^3 - p^2 + p$.

Μονάδες 8

γ. Να αποδείξετε ότι $P(B - A) > P(A - B)$.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ 4ο

Έχουμε περιφράξει με συρματόπλεγμα μήκους 200 m μια ορθογώνια περιοχή από τις τρεις πλευρές της (Σχήμα 1). Η τέταρτη πλευρά είναι τοίχος.

Έστω ότι το μήκος του τοίχου που θα χρησιμοποιηθεί είναι x.

Σχήμα 1

α. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν της περιοχής που περιφράξαμε δίνεται από τον τύπο

$$f(x) = 100x - \frac{1}{2}x^2 .$$

Μονάδες 6

β. Να βρείτε τη μεγαλύτερη δυνατή επιφάνεια που θα μπορούσαμε να περιφράξουμε με το συρματόπλεγμα των 200 m.

Μονάδες 7

γ. Να βρείτε τη μέση τιμή των αριθμών $f'(100)$, $f'(101)$, $f'(102)$, $f'(103)$ και $f'(104)$.

Μονάδες 5

δ. Έστω CV ο συντελεστής μεταβολής των αριθμών $f'(100)$, $f'(101)$, $f'(102)$, $f'(103)$ και $f'(104)$ και CV′ ο συντελεστής μεταβολής που προκύπτει όταν αυξήσουμε καθέναν από τους αριθμούς αυτούς κατά c, όπου $c \neq 2$. Να υπολογίσετε το c, έτσι ώστε να ισχύει $CV' = 2CV$.

Μονάδες 7

ΟΔΗΓΙΕΣ ΓΙΑ ΤΟΥΣ ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟΥΣ

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων, αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Καμιά άλλη σημείωση δεν επιτρέπεται να γράψετε.** Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας σε όλα** τα θέματα.
4. Να γράψετε τις απαντήσεις σας μόνο με μπλε ή μόνο με μαύρο στυλό. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε μολύβι μόνο για σχέδια, διαγράμματα και πίνακες.
5. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
6. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
7. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: μετά τη 10:00΄ πρωινή.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΠΑΡΑΣΚΕΥΗ 29 ΙΟΥΝΙΟΥ 2007
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ(4)

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της συνάρτησης $f(x)=x$ είναι $f'(x)=1$.

Μονάδες 8

Β. α. Να δώσετε τον κλασικό ορισμό της πιθανότητας ενός ενδεχομένου Α κάποιου δειγματικού χώρου Ω.

Μονάδες 4

β. Να δώσετε τις αριθμητικές τιμές των παρακάτω πιθανοτήτων:

i) $P(\Omega)$ **ii)** $P(\varnothing)$.

Μονάδες 3

Γ1. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη* ***Σωστό*** *ή* ***Λάθος*** *δίπλα στο γράμμα, το οποίο αντιστοιχεί στην κάθε πρόταση.*

α. Έστω ότι έχουμε ένα δείγμα μεγέθους ν και ότι f_i, $i=1,2,\ldots,\kappa$, είναι οι αντίστοιχες σχετικές συχνότητες των τιμών x_i μιας μεταβλητής. Αν α_i είναι το αντίστοιχο τόξο ενός κυκλικού τμήματος στο κυκλικό διάγραμμα συχνοτήτων, τότε:

$$\alpha_i=360\cdot f_i, \text{ για } i=1,2,\ldots,\kappa.$$

Μονάδες 2

β. Αν f, g είναι παραγωγίσιμες συναρτήσεις με $g(x)\neq 0$, τότε ισχύει $\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{(g(x))^2}$.

Μονάδες 2

γ. Αν μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ και ισχύει $f'(x)>0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ.

Μονάδες 2

Γ2. Να γράψετε στο τετράδιό σας τις παραγώγους των παρακάτω συναρτήσεων:

$f_1(x)=e^x$ όπου x πραγματικός.

$f_2(x)=\frac{1}{x}$ όπου $x\neq 0$.

$f_3(x)=\eta\mu x$ όπου x πραγματικός.

$f_4(x)=c$ όπου x πραγματικός και c σταθερά.

Μονάδες 4

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $f(x)=\frac{x}{x^2-x+1}$.

α. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f(x).

Μονάδες 5

β. Να βρεθεί το όριο $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$.

Μονάδες 8

γ. Να εξετασθεί η συνάρτηση f(x) ως προς τη μονοτονία και να βρεθούν τα ακρότατά της.

Μονάδες 12

ΘΕΜΑ 3ο

Έστω ο δειγματικός χώρος Ω = {1, 2, 3, 4, 5}. Θεωρούμε τα ενδεχόμενα Α, Β του Ω τα οποία ορίζονται ως εξής:

$A = \{x \in \Omega / \ 0 \le \ell n(x-1) < \ell n 3\}$,

$B = \{x \in \Omega / \ (x^2-5x)\cdot(x-1) = -6\cdot(x-1)\}$.

α. Να βρεθούν οι πιθανότητες $P(A-B)$ και $P(B \cup A')$.

Μονάδες 8

β. Αν $P(A) = \frac{1}{4}$, να υπολογιστεί η πιθανότητα $P(A' \cup B')$.

Μονάδες 7

γ. Αν $P(A) = \frac{1}{4}$ και $P(B-A) = \frac{1}{8}$, να βρεθεί η μικρότερη και η μεγαλύτερη τιμή της πιθανότητας $P(X)$, όπου Χ είναι ενδεχόμενο του Ω τέτοιο ώστε $A \cup X = B$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ 4ο

Έστω $x_1, x_2, ..., x_{11}$ ένα δείγμα με παρατηρήσεις:

7, 5, α, 2, 5, β, 8, 6, γ, 5, 3,

όπου α, β, γ φυσικοί αριθμοί με $\alpha<\beta<\gamma$. Δίνεται ότι η μέση τιμή, η διάμεσος και το εύρος των παρατηρήσεων είναι $\bar{x} = 6$, $\delta = 6$ και $R = 8$ αντίστοιχα.

α. Να βρεθούν οι τιμές των α, β, γ, έτσι ώστε να ισχύει $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 217$.

Μονάδες 8

β. Για τις τιμές των α, β, γ, που βρέθηκαν στο προηγούμενο ερώτημα, να δειχθεί ότι η τυπική απόκλιση του δείγματος είναι ίση με $s_x = \sqrt{\frac{58}{11}}$ και να εξετασθεί αν το δείγμα είναι ομοιογενές.

Μονάδες 8

γ. Έστω $y_1, y_2, \ldots, y_{11}$ οι παρατηρήσεις που προκύπτουν αν πολλαπλασιάσουμε τις $x_1, x_2, \ldots, x_{11}$ επί μια θετική σταθερά c_1 και στη συνέχεια προσθέσουμε μια σταθερά c_2. Αν $\bar{y}=9$ και $s_y=2s_x$, να βρεθούν οι τιμές των σταθερών c_1 και c_2.

Μονάδες 9

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζόμενους)

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, κατεύθυνση, εξεταζόμενο μάθημα). **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων, αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Καμιά άλλη σημείωση δεν επιτρέπεται να γράψετε.**
   Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας σε όλα** τα θέματα.
4. Να γράψετε τις απαντήσεις σας μόνο με μπλε ή μόνο με μαύρο στυλό. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε μολύβι μόνο για σχέδια, διαγράμματα και πίνακες.
5. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
6. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
7. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: μετά τη 10:00΄ πρωινή.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΔΕΥΤΕΡΑ 3 ΙΟΥΛΙΟΥ 2006
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Για δύο συμπληρωματικά ενδεχόμενα Α και Α΄ ενός δειγματικού χώρου Ω, να αποδείξετε ότι ισχύει:

$$P(A') = 1 - P(A).$$

Μονάδες 9

Β.1 Πότε μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το Α λέμε ότι παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο $x_0 \in A$;

Μονάδες 3

Β.2 Πότε μία συνάρτηση f λέγεται γνησίως μονότονη σε ένα διάστημα Δ;

Μονάδες 3

Γ. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη* ***Σωστό*** *ή* ***Λάθος*** *δίπλα στο γράμμα, το οποίο αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.*

α. Το ενδεχόμενο $A \cup B$ πραγματοποιείται, όταν πραγματοποιείται το πολύ ένα από τα ενδεχόμενα Α και Β.

Μονάδες 2

β. Ισχύει: $(\sigma\upsilon\nu x)' = \eta\mu x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 2

γ. Ο συντελεστής μεταβλητότητας (CV) είναι ανεξάρτητος από τις μονάδες μέτρησης των δεδομένων.

Μονάδες 2

δ. Η διάμεσος δ είναι μέτρο διασποράς.

Μονάδες 2

ε. Έστω Α, Β ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω. Τότε ισχύει: $P(\varnothing) \leq P(A \cup B) \leq P(\Omega)$.

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x(\alpha x^2+\beta x+9)$ με $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$. Αν η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο της $A(2,e^2)$ είναι $y = -e^2x+3e^2$, τότε:

α. Να αποδείξετε ότι $\alpha=1$ και $\beta=-6$.

Μονάδες 12

β. Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης f.

Μονάδες 13

ΘΕΜΑ 3ο

Μία Τράπεζα χορηγεί διαφόρων τύπων δάνεια στους πελάτες της. Αν επιλεγεί τυχαία κάποιος πελάτης η πιθανότητα να έχει πάρει μόνο στεγαστικό ή μόνο καταναλωτικό δάνειο είναι 0,7 ενώ η πιθανότητα να μην έχει πάρει κανένα από τα δύο προηγούμενα δάνεια είναι 0,1.

α. Να βρείτε την πιθανότητα ένας πελάτης να έχει πάρει και τα δύο δάνεια. Να εξετάσετε αν τα ενδεχόμενα «έχει πάρει στεγαστικό» και «έχει πάρει καταναλωτικό» είναι ασυμβίβαστα.

Μονάδες 15

β. Αν επιπλέον η πιθανότητα να έχει πάρει μόνο στεγαστικό είναι 0,6 να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων:

i. «έχει πάρει καταναλωτικό».

ii. «έχει πάρει μόνο καταναλωτικό».

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ 4ο

Οι απουσίες των μαθητών της Γ΄ τάξης ενός Ενιαίου Λυκείου κατά τους μήνες Ιανουάριο – Φεβρουάριο – Μάρτιο – Απρίλιο του έτους 2006 έχουν ομαδοποιηθεί σε τέσσερις κλάσεις ίσου πλάτους και εμφανίζονται στον παρακάτω πίνακα σχετικών συχνοτήτων:

Απουσίες μαθητών	**Κέντρο κλάσης x_i**	**Σχετική συχνότητα f_i**
[... – ...)	...	0,1
[... – 7)	...	...
[... – ...)	...	0,3
[... – ...)	10	...
Σύνολο	//////////////////////	1

Αν επιπλέον δίνεται ότι η σχετική συχνότητα της $4^{ης}$ κλάσης f_4 είναι διπλάσια της σχετικής συχνότητας της $2^{ης}$ κλάσης f_2, τότε:

α. Να αποδείξετε ότι το πλάτος c των κλάσεων ισούται με 2.

Μονάδες 10

β. Να μεταφέρετε τον παραπάνω πίνακα σχετικών συχνοτήτων στο τετράδιό σας και να συμπληρώσετε τα κενά, αφού υπολογίσετε τις αντίστοιχες τιμές.

Μονάδες 5

γ. i. Να βρείτε τη μέση τιμή $\bar{x}$.

Μονάδες 4

ii. Να βρείτε την τυπική απόκλιση s.

Μονάδες 6

Δίνεται ο τύπος: $s^2 = \frac{1}{\nu}\left[\sum_{i=1}^{k} x_i^2 \nu_i - \frac{\left(\sum_{i=1}^{k} x_i \nu_i\right)^2}{\nu}\right]$.

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο. Τα σχήματα που θα χρησιμοποιήσετε στο τετράδιο μπορείτε να τα σχεδιάσετε και με μολύβι.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων, αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Καμιά άλλη σημείωση δεν επιτρέπεται να γράψετε.**
   Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας σε όλα** τα θέματα.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: μετά τη 10.30΄ πρωινή.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΠΑΡΑΣΚΕΥΗ 8 ΙΟΥΛΙΟΥ 2005
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ 1ο

Α.1. Δίνονται οι συναρτήσεις F(x), f(x) και g(x) με F(x) = f(x)+g(x).

Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες, να αποδείξετε ότι: $F'(x) = f'(x) + g'(x)$.

Μονάδες 9

Α.2. Πώς ορίζεται ο συντελεστής μεταβολής ή συντελεστής μεταβλητότητας μιας μεταβλητής x, αν $\bar{x} > 0$ και πώς, αν $\bar{x} < 0$;

Μονάδες 4

Β. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη* ***Σωστό*** *ή* ***Λάθος*** *δίπλα στο γράμμα, το οποίο αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.*

α. Οι ποιοτικές μεταβλητές διακρίνονται σε διακριτές και συνεχείς.

Μονάδες 2

β. Αν $x>0$, τότε $(\ln x)' = \frac{1}{x}$.

Μονάδες 2

γ. Στην περίπτωση των ποσοτικών μεταβλητών, εκτός από τις συχνότητες f_i και v_i, χρησιμοποιούνται και οι λεγόμενες αθροιστικές συχνότητες F_i, N_i.

Μονάδες 2

δ. Τα σπουδαιότερα μέτρα διασποράς μιας μεταβλητής είναι η μέση τιμή και η διάμεσος αυτής.

Μονάδες 2

ε. Αν για τα ενδεχόμενα Α, Β του ίδιου δειγματικού χώρου Ω με ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα ισχύει $P(A)=P(B)$, τότε είναι πάντοτε $N(A)=N(B)$.

Μονάδες 2

στ. Η έννοια της συνέχειας μιας συνάρτησης αναφέρεται μόνο σε σημεία του πεδίου ορισμού της.

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha \ln x - \beta x^2$ με $\alpha, \beta \in R$.

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

Μονάδες 3

β. Να βρείτε την παράγωγο της f για κάθε x, το οποίο ανήκει στο πεδίο ορισμού της.

Μονάδες 5

γ. Να βρείτε τα α και β, ώστε η εφαπτομένη στο σημείο $A(1,1)$ της γραφικής παράστασης της f να είναι $y=3x-2$.

Μονάδες 10

δ. Να βρείτε το $\lim\limits_{x \to 2} (f'(x) \cdot x^3)$.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ 3ο

Σε μια κανονική ή περίπου κανονική κατανομή το 50% των παρατηρήσεων έχουν τιμή μεγαλύτερη του 20. Το 81,5% των παρατηρήσεων βρίσκεται στο διάστημα (16,22) με άκρα του διαστήματος χαρακτηριστικές τιμές της κανονικής κατανομής $\bar{x} \pm 3s,\ \bar{x} \pm 2s,\ \bar{x} \pm s, \bar{x}$.

α. Να δείξετε ότι $\bar{x} = 20$ και $s = 2$.

Μονάδες 10

β. Να βρείτε το $\alpha \in N^*$, αν είναι γνωστό ότι στο διάστημα $(\bar{x} - \alpha \cdot s, \bar{x} + \alpha \cdot s)$ ανήκει το 95% περίπου των παρατηρήσεων.

Μονάδες 5

γ. Αν R είναι το εύρος της κατανομής, να βρείτε την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης $f(x) = \frac{R}{2}x^2 - (\bar{x} + 4)x + 9s$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ 4ο

Έστω ο δειγματικός χώρος $\Omega = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ με ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα. Για τα ενδεχόμενα Α, Β, Γ του Ω είναι

$A \cup B = \{1,2,3,4,5,6\},\ A \cap B = \{1,3,4\},\ A - B = \{2,6\}$ και

$\Gamma = \left\{ x \in \Omega / \frac{x+1}{x-1} \geq 2 \right\}$.

α. Να υπολογίσετε τις πιθανότητες P(A), P(B), P(Γ).

Μονάδες 9

β. Να βρείτε την πιθανότητα, ώστε να πραγματοποιηθεί το Β και όχι το Γ.

Μονάδες 3

γ. Να βρείτε την πιθανότητα, ώστε να πραγματοποιηθεί μόνο ένα από τα Β και Γ.

Μονάδες 3

δ. Αν s^2 είναι η διακύμανση των τιμών λ, 3λ, 5λ, όπου $\lambda \in \Omega$, να βρείτε την πιθανότητα του ενδεχόμενου $\Delta = \{\lambda \in \Omega / s^2 > 24\}$.

Μονάδες 10

ΟΔΗΓΙΕΣ ΓΙΑ ΤΟΥΣ ΥΠΟΨΗΦΙΟΥΣ

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο επάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Δεν επιτρέπεται να γράψετε καμιά άλλη σημείωση.**
   Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: μετά την **10.30΄** πρωινή.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

Γ΄ ΤΑΞΗ

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΤΕΤΑΡΤΗ 7 ΙΟΥΛΙΟΥ 2004
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΡΕΙΣ (3)

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Αν Α και Β είναι δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω με $A \subseteq B$, τότε να αποδείξετε ότι $P(A) \le P(B)$.

Μονάδες 7

Β. **α.** Πότε ένα πείραμα ονομάζεται πείραμα τύχης;
β. Να δώσετε τον ορισμό του δειγματικού χώρου ενός πειράματος τύχης.

Μονάδες 6

Γ. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη* ***Σωστό*** *ή* ***Λάθος*** *δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.*

α. Αν $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell_1$ και $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \ell_2$,

τότε $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \ell_1 \ell_2$.

β. Μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού Α λέμε ότι παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο $x_1 \in A$, όταν $f(x) \le f(x_1)$ για κάθε x σε μια περιοχή του x_1.

γ. Ισχύει $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + g'(x) \cdot f(x)$, όπου f και g παραγωγίσιμες συναρτήσεις.

δ. Ισχύει $\left(\sqrt{x}\right)' = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ με $x > 0$.

ε. Για δύο συμπληρωματικά ενδεχόμενα Α και Α΄ ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύει $P(A') = 1 + P(A)$.

στ. Το μέτρο διασποράς **εύρος** ισούται με τη διαφορά της ελάχιστης παρατήρησης από τη μέγιστη παρατήρηση.

Μονάδες 12

Γ΄ ΤΑΞΗ

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \frac{x+2}{e^x}$.

α. Να βρείτε τη μονοτονία και τα ακρότατα της συνάρτησης.

Μονάδες 9

β. Να αποδείξετε ότι $f(x) + f'(x) = \frac{1}{e^x}$.

Μονάδες 8

γ. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο Α (0, f(0)).

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ 3ο

Η μέση τιμή των βαθμών που πήραν οι 25 μαθητές της Γ΄ τάξης ενός Λυκείου στα Μαθηματικά είναι 14, ενώ η μέση τιμή των βαθμών των 10 μαθητών που παρουσίασαν τη μικρότερη βαθμολογία είναι 11.

α. Να βρείτε τη μέση τιμή της βαθμολογίας των 15 υπόλοιπων μαθητών.

Μονάδες 12

β. Αν το άθροισμα των τετραγώνων των βαθμών των 25 αυτών μαθητών είναι 5000, να βρείτε το συντελεστή μεταβολής (CV).

Μονάδες 13

ΘΕΜΑ 4ο

Έστω Ω = {1, 2, 3, 4, 5, 6} ο δειγματικός χώρος της ρίψης ενός μη αμερόληπτου ζαριού και η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - kx^2 + 4x + 2 \text{ , όπου } k \in \Omega.$$

Αν P(1) = P(3) = P(5) = 2P(2) = 4P(4) = 2P(6), τότε να βρείτε:

Γ΄ ΤΑΞΗ

α. Τις πιθανότητες των απλών ενδεχομένων P(1), P(2), P(3), P(4), P(5), P(6).

Μονάδες 8

β. Τις πιθανότητες των ενδεχομένων Α και Β, όπου
Α: «Η ένδειξη του ζαριού είναι άρτιος αριθμός»
Β: «Η ένδειξη του ζαριού είναι περιττός αριθμός».

Μονάδες 8

γ. Την πιθανότητα του ενδεχομένου Γ, όπου
Γ: «Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$» .

Μονάδες 9

ΟΔΗΓΙΕΣ ΓΙΑ ΤΟΥΣ ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟΥΣ

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). Τα θέματα να μην τα αντιγράψετε στο τετράδιο. Τα σχήματα που θα χρησιμοποιήσετε στο τετράδιο μπορούν να γίνουν και με μολύβι.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων, αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Καμιά άλλη σημείωση δεν επιτρέπεται να γράψετε.
   Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα, τα οποία και θα καταστραφούν μετά το πέρας της εξέτασης.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα.
4. Κάθε λύση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 10:00.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

Γ΄ ΤΑΞΗ

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ
ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΠΕΜΠΤΗ 3 ΙΟΥΛΙΟΥ 2003
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Για δύο συμπληρωματικά ενδεχόμενα Α και Α΄ ενός δειγματικού χώρου Ω, να αποδείξετε ότι ισχύει :

$$P(A') = 1 - P(A)$$

Μονάδες 9

Β. *Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.*

Μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, αν υπάρχει το :

α. $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x_0+h)-f(h)}{h}$, $h \in R$, $h \neq 0$ και το όριο αυτό είναι πραγματικός αριθμός

β. $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x_0-h)-f(x_0)}{h}$, $h \in R$, $h \neq 0$

γ. $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$, $h \in R$, $h \neq 0$ και το όριο αυτό είναι πραγματικός αριθμός

δ. $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x_0+h)+f(h)}{h}$, $h \in R$, $h \neq 0$.

Μονάδες 5

Γ. *Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.*

Μέτρο θέσης ενός συνόλου δεδομένων είναι :
α. το εύρος
β. η διάμεσος
γ. η διακύμανση
δ. η τυπική απόκλιση.

Μονάδες 5

Δ. Να ορίσετε το συντελεστή μεταβολής ενός συνόλου παρατηρήσεων.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$.

α. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της.

Μονάδες 5

β. Να δείξετε ότι ο ρυθμός μεταβολής της f, όταν x=3, ισούται με $\frac{3\sqrt{2}}{4}$.

Μονάδες 10

γ. Αν $h(x) = \frac{f(x) - \sqrt{3}}{x - 2}$ για $x \neq 2$, να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x \to 2} h(x)$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ 3ο

Έχουμε 30 σφαίρες μέσα σ' ένα δοχείο, αριθμημένες από το 1 έως το 30. Επιλέγουμε στην τύχη μία σφαίρα. Έστω Α το ενδεχόμενο ο αριθμός της σφαίρας να είναι άρτιος και Β το ενδεχόμενο ο αριθμός αυτός να είναι πολλαπλάσιο του 5.

Αν Α΄, Β΄ είναι τα συμπληρωματικά ενδεχόμενα των Α και Β αντιστοίχως, να υπολογίσετε τις πιθανότητες :

α. $P(A)$, $P(B)$

Μονάδες 6

β. $P(A \cup B)$

Μονάδες 6

γ. $P(A \cup B')$

Μονάδες 6

δ. $P((A' \cap B) \cup (A \cap B'))$

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ 4ο

Το βάρος ενός δείγματος μαθητών λυκείου ακολουθεί κανονική ή περίπου κανονική κατανομή.
Το 50% των μαθητών του δείγματος έχουν βάρος το πολύ 65 Kg, ενώ περίπου το 47,5% αυτών έχουν βάρος από 65 Kg έως 75 Kg.

α. Να υπολογίσετε τη μέση τιμή, τη διάμεσο και την τυπική απόκλιση του βάρους των μαθητών του δείγματος.

Μονάδες 6

β. Να εξετάσετε αν το δείγμα είναι ομοιογενές.

Μονάδες 6

γ. Να υπολογίσετε το ποσοστό των μαθητών του δείγματος, που έχουν βάρος από 55 Kg έως 70 Kg.

Μονάδες 6

δ. Ο αριθμός των μαθητών του δείγματος αυτού που έχουν βάρος από 55 Kg έως 60 Kg, είναι 27. Να υπολογίσετε το σύνολο των μαθητών του δείγματος.

Μονάδες 7

Γ΄ ΤΑΞΗ

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΠΕΜΠΤΗ 4 ΙΟΥΛΙΟΥ 2002
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

ΘΕΜΑ 1ο

Α1. Πότε μία συνάρτηση με πεδίο ορισμού Α λέγεται συνεχής;

Μονάδες 4

Α2. Πότε μία συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της και πότε γνησίως φθίνουσα;

Μονάδες 4

Α3. Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της ταυτοτικής συνάρτησης $f(x)=x$ είναι $f'(x)=1$.

Μονάδες 10

Β1. Σε μια κατανομή συχνοτήτων οι τιμές της μεταβλητής είναι $x_1, x_2,...,x_k$ με συχνότητες $\nu_1, \nu_2,...,\nu_k$ αντίστοιχα και ν είναι το πλήθος των παρατηρήσεων.

Πώς ορίζεται η μέση τιμή $\bar{x}$;

Μονάδες 4

Β2. *Να γράψετε στο τετράδιό σας το κείμενο που ακολουθεί συμπληρώνοντας τα υπάρχοντα κενά.*

Εάν σε κάθε τιμή $x_1, x_2,...,x_\nu$ ενός συνόλου δεδομένων δώσουμε διαφορετική βαρύτητα που εκφράζεται με τους συντελεστές στάθμισης (βαρύτητας) $w_1, w_2,...,w_\nu$ τότε αντί του αριθμητικού μέσου χρησιμοποιούμε τον .... μέσο ή ..... μέσο που βρίσκεται από τον τύπο $\bar{x}$ = ...

Μονάδες 3

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\alpha x(2-x)$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Α. Να βρείτε την τιμή του α ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο της Ο(0, f(0)) να σχηματίζει με τον άξονα x΄x γωνία 45°.

Μονάδες 10

Β. Για $\alpha=1/2$, να βρείτε:

α. την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο της (1, f(1)).

Μονάδες 5

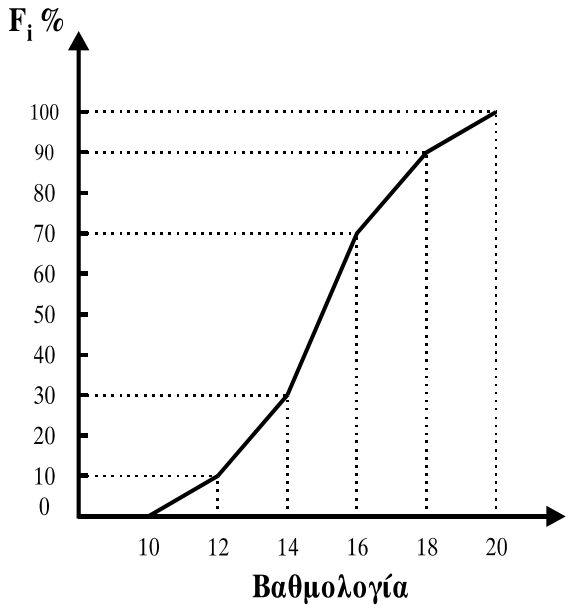
β. τα ακρότατα της συνάρτησης f.

Μονάδες 10

Γ΄ ΤΑΞΗ

ΘΕΜΑ 3ο

Στο διπλανό σχήμα δίνεται το πολύγωνο αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων, που παρουσιάζει τη βαθμολογία μίας ομάδας μαθητών στο μάθημα της Ιστορίας. Η βαθμολογία κυμαίνεται από 10 μέχρι 20. Δίνεται ότι 10 μαθητές έχουν βαθμό μεγαλύτερο ή ίσο του 12 και μικρότερο του 14.



α. Να αποδείξετε ότι ο αριθμός των μαθητών είναι 50.

Μονάδες 8

β. Να βρείτε τη διάμεσο.

Μονάδες 5

γ. Να κατασκευάσετε το ιστόγραμμα συχνοτήτων.

Μονάδες 7

δ. Επιλέγουμε τυχαία από το δείγμα των 50 μαθητών ένα μαθητή. Να βρείτε την πιθανότητα ο μαθητής να έχει βαθμό μεγαλύτερο ή ίσο του 16.

Μονάδες 5

Γ΄ ΤΑΞΗ

ΘΕΜΑ 4ο

Έστω Ω={1, 2, 3, 6} δειγματικός χώρος.

Α. Να δικαιολογήσετε ποιοι από τους παρακάτω τύπους μπορούν να θεωρηθούν κατάλληλοι και ποιοι όχι για να εκφράσουν την πιθανότητα κάθε στοιχειώδους ενδεχομένου k του Ω.

i) $P(k)=\frac{1}{k}$ ii) $P(k)=\frac{1}{2^k}$ iii) $P(k)=\frac{1}{2k}$

Μονάδες 8

Β. Οι παρατηρήσεις μιας μεταβλητής Χ είναι οι ακόλουθες:

1, 1, 7, k, k, 3, 3, 3

όπου k είναι στοιχειώδες ενδεχόμενο του Ω, με πιθανότητα $P(k)=\frac{1}{2k}$.

Δίνονται τα ενδεχόμενα Α, Β του δειγματικού χώρου Ω, όπου

Α={k∈Ω : η επικρατούσα τιμή των παρατηρήσεων της μεταβλητής Χ είναι $M_0=3$} και

Β={k∈Ω : η μέση τιμή $\bar{x}=2,5$}.

α. Να παρασταθούν με αναγραφή τα ενδεχόμενα Α και Β.

Μονάδες 8

β. Να βρείτε τις πιθανότητες P(Α), P(Β) και P(Α∪Β).

Μονάδες 9

Γ΄ ΤΑΞΗ

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΣΑΒΒΑΤΟ 30 ΙΟΥΝΙΟΥ 2001
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

ΘΕΜΑ 1ο

Α.1. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ, τότε να αποδείξετε ότι:

$\left(c\cdot f(x)\right)' = c\cdot f'(x)$, όπου c πραγματικός αριθμός.

Μονάδες 6,5

Α.2. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη* ***Σωστό*** *ή* ***Λάθος*** *δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.*

α. $\left(f(x)\cdot g(x)\right)' = f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)$

β. $\left(f(g(x))\right)' = f'(g(x))\cdot g'(x)$

γ. $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x)\cdot g(x) + g'(x)\cdot f(x)}{(g(x))^2}$, $(g(x) \neq 0)$

δ. $\left(x^{\rho}\right)' = \rho\cdot x^{\rho-1}$, ρ ρητός, $x>0$

ε. $(\eta\mu x)' = \sigma\upsilon\nu x$

στ. $(\sigma\upsilon\nu x)' = \eta\mu x$

Μονάδες 6

Β.1. *Να γράψετε στο τετράδιό σας τα γράμματα της* ***Στήλης Α*** *και δίπλα σε κάθε γράμμα τον αριθμό της* ***Στήλης Β****, που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.*

Στήλη Α **Συνάρτηση f**	**Στήλη Β** **Πρώτη παράγωγος της f**
α. $2\sqrt{x}+\ln 2\,,\quad x>0$	**1.** $\dfrac{1}{\sqrt{x}}+\dfrac{1}{2}$
β. $\dfrac{\eta\mu x}{x}\,,\qquad x\neq 0$	**2.** $3\sigma\upsilon\nu 3x$
γ. $\eta\mu 3x$	**3.** $\dfrac{\eta\mu x-x\sigma\upsilon\nu x}{x^2}$
	4. $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$
	5. $\dfrac{x\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x}{x^2}$
	6. $-3\sigma\upsilon\nu 3x$

Μονάδες 7,5

Β.2. Αν $f(x)=\dfrac{1}{4}(x-1)^4$ και $f'(\alpha)=27$, όπου α πραγματικός αριθμός, τότε να βρείτε την τιμή του α.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 2ο

Στο διπλανό πίνακα δίνονται οι θερμοκρασίες των 20 πρώτων ημερών του Μαΐου σε βαθμούς Κελσίου (°C).

Τιμές Θερμοκρασίας x_i	**Πλήθος Ημερών** v_i
22	2
23	4
24	
25	
26	2
27	3

Α. Αν γνωρίζουμε ότι η μέση θερμοκρασία των παραπάνω ημερών είναι 24,4 °C, τότε:

α. να βρείτε πόσες ημέρες είχαν θερμοκρασία 24 °C και πόσες 25 °C

Μονάδες 10

β. να υπολογίσετε την επικρατούσα τιμή και τη διάμεσο.

Μονάδες 5

Β. Αν γνωρίζουμε ότι η διάμεσος είναι 24,5 °C, να βρείτε πόσες ημέρες είχαν θερμοκρασία 24 °C και πόσες 25 °C.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ 3ο

Το βάρος των αποσκευών καθενός εκ των 80 επιβατών μιας πτήσης κάποιας Αεροπορικής Εταιρείας είναι τουλάχιστον 11 κιλά αλλά μικρότερο από 26 κιλά. Γνωρίζουμε ότι 8 επιβάτες έχουν αποσκευές με βάρος μικρότερο από 14 κιλά, το 30% των επιβατών έχει αποσκευές με βάρος μικρότερο από 17 κιλά, 48 επιβάτες έχουν αποσκευές με βάρος μικρότερο από 20 κιλά και 15% των επιβατών έχει αποσκευές με βάρος τουλάχιστον 23 κιλά.

α. Να παρασταθούν τα δεδομένα σε έναν πίνακα συχνοτήτων.

Μονάδες 10

β. Κάθε επιβάτης δικαιούται να μεταφέρει αποσκευές με βάρος μικρότερο των 20 κιλών, διαφορετικά έχει πρόσθετη οικονομική επιβάρυνση. Να βρείτε τι ποσοστό από τους 80 επιβάτες της πτήσης αυτής έχει πρόσθετη οικονομική επιβάρυνση.

Μονάδες 7

γ. Να βρεθούν οι γωνίες των αντιστοίχων κυκλικών τομέων του κυκλικού διαγράμματος σχετικών συχνοτήτων, για τα δεδομένα του προβλήματος.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ 4ο

Σε ένα σχολείο με 400 μαθητές διδάσκονται η αγγλική και η γαλλική γλώσσα. Κάθε μαθητής είναι υποχρεωμένος να παρακολουθεί τουλάχιστον μία από τις παραπάνω ξένες γλώσσες. Από τους παραπάνω μαθητές 340 παρακολουθούν την αγγλική γλώσσα και 240 τη γαλλική γλώσσα. Επιλέγουμε τυχαία ένα μαθητή. Έστω Α το ενδεχόμενο να παρακολουθεί την αγγλική γλώσσα και Γ να παρακολουθεί τη γαλλική γλώσσα.

α. Να εξετάσετε αν τα ενδεχόμενα Α και Γ είναι ασυμβίβαστα.

Μονάδες 5

β. Να αποδείξετε ότι:

$$P(\Gamma\text{-}A)\leq \frac{3}{5}$$

Μονάδες 5

γ. Να βρείτε την πιθανότητα ο μαθητής να παρακολουθεί μόνο την αγγλική γλώσσα.

Μονάδες 8

δ. Να βρείτε την πιθανότητα ο μαθητής να παρακολουθεί μία μόνο ξένη γλώσσα από αυτές.

Μονάδες 7

Γ΄ ΤΑΞΗ

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΠΕΜΠΤΗ 7 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2000
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΠΕΝΤΕ (5)

ΘΕΜΑ 1ο

Α.1 Να αποδείξετε ότι για δύο ενδεχόμενα Α και Β ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύει: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Μονάδες 6,5

Α.2 Να συμπληρώσετε τις παρακάτω σχέσεις:

α. $P(A \cup B) =$ ..... όταν τα ενδεχόμενα Α και Β είναι ασυμβίβαστα μεταξύ τους.

β. $P(A') =$ ....., όπου Α΄ είναι το συμπληρωματικό του Α.

Μονάδες 6

Β. Δίνεται ο δειγματικός χώρος $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5\}$ ενός πειράματος τύχης με:

$P(\omega_2) = \frac{1}{4}$, $P(\omega_3) = P(\omega_4) = \frac{1}{24}$ και $P(\omega_5) = \frac{1}{2}$

α. *Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.*

Η πιθανότητα $P(\omega_1)$ είναι:

Γ΄ ΤΑΞΗ

Α: $\frac{1}{2}$ Β: $\frac{1}{6}$ Γ: $\frac{1}{3}$ Δ: $\frac{1}{12}$ Ε: $\frac{1}{8}$

Μονάδες 6,5

β. Δίνονται τα ενδεχόμενα Α = {ω_1, ω_3, ω_5} και Β = {ω_1, ω_2} του δειγματικού χώρου Ω.
Να γράψετε στο τετράδιό σας τα γράμματα της ***Στήλης Α*** *και δίπλα τον αριθμό της* ***Στήλης Β*** *που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.*

Στήλη Α	**Στήλη Β**
α. Ρ(Α∪Β)	1. $\frac{1}{4}$
β. Ρ(Α∩Β)	2. $\frac{7}{24}$
γ. Ρ(Α΄)	3. $\frac{23}{24}$
	4. $\frac{1}{6}$

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x - 7$,
όπου x πραγματικός αριθμός.

α. Να βρείτε την f΄(x).

Μονάδες 5

β. Να βρείτε τα σημεία της καμπύλης της συνάρτησης f στα οποία η παράγωγος είναι 0.

Μονάδες 10

γ. Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης f.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ 3ο

Σε ένα κυκλικό διάγραμμα παριστάνεται το μορφωτικό επίπεδο των 400 εργαζομένων μιας επιχείρησης σε τέσσερις κατηγορίες.
Α΄Κατηγορία: Απόφοιτοι Γυμνασίου
Β΄Κατηγορία: Απόφοιτοι Λυκείου
Γ΄Κατηγορία:Πτυχιούχοι Ανωτάτης Εκπαίδευσης
Δ΄Κατηγορία: Κάτοχοι Μεταπτυχιακού Τίτλου
Κάθε εργαζόμενος ανήκει σε μία μόνον από τις κατηγορίες αυτές.
Στην Α΄ κατηγορία ανήκει το 25% των εργαζομένων της επιχείρησης. Η γωνία του κυκλικού τομέα που αντιστοιχεί στους εργαζόμενους της Δ΄ κατηγορίας είναι 18°. Οι εργαζόμενοι της επιχείρησης της Β΄ κατηγορίας είναι εξαπλάσιοι των εργαζομένων της Γ΄ κατηγορίας.

α. Να υπολογίσετε τον αριθμό των εργαζομένων κάθε κατηγορίας.

Μονάδες 20

β. Να μετατρέψετε το κυκλικό διάγραμμα σε ραβδόγραμμα συχνοτήτων.

Μονάδες 5

Γ΄ ΤΑΞΗ

ΘΕΜΑ 4ο

Στις 12 το μεσημέρι, η θερμοκρασία (σε βαθμούς Κελσίου) δύο πόλεων Α και Β, το τελευταίο δεκαήμερο του Μαρτίου, ήταν :

Πόλη Α: 20 18 20 17 18 17 16 17 16 10

Πόλη Β: 18 16 17 15 16 12 16 17 20 22

α. Να βρείτε τη μέση, τη διάμεσο και την επικρατούσα θερμοκρασία των πόλεων Α και Β.

Μονάδες 9

β. Αν η τυπική απόκλιση των θερμοκρασιών (σε βαθμούς Κελσίου) των πόλεων Α και Β είναι $s_A = 2,66$ και $s_B = 2,59$ αντίστοιχα, να δικαιολογήσετε σε ποια από τις δύο πόλεις οι τιμές της θερμοκρασίας έχουν μεγαλύτερη διασπορά.

Μονάδες 6

γ. Εκ των υστέρων διαπιστώθηκε ότι το θερμόμετρο που χρησιμοποιήθηκε για τη μέτρηση της θερμοκρασίας στην πόλη Α παρουσίαζε, λόγω κατασκευαστικού λάθους, αυξημένη θερμοκρασία κατά 5 βαθμούς.
Αφού υπολογίσετε τις σωστές θερμοκρασίες της πόλης Α, να βρείτε σε ποια από τις δύο πόλεις Α και Β οι τιμές της θερμοκρασίας έχουν μεγαλύτερη ομοιογένεια. Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 10

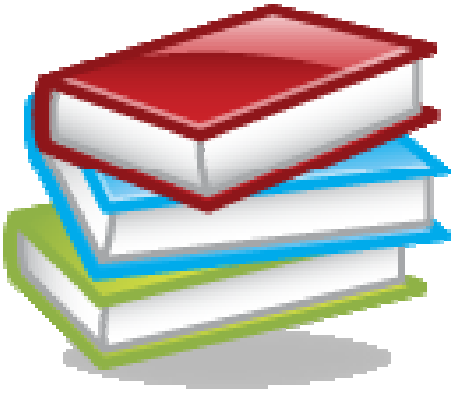
Γ΄ ΤΑΞΗ

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζόμενους)

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, κατεύθυνση, εξεταζόμενο μάθημα). Τα θέματα να μην τα αντιγράψετε στο τετράδιο. Τα σχήματα που θα χρησιμοποιήσετε στο τετράδιο μπορούν να γίνουν και με μολύβι.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Καμιά άλλη σημείωση δεν επιτρέπεται να γράψετε. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα, τα οποία και θα καταστραφούν μετά το πέρας της εξέτασης.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα.
4. Κάθε λύση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: Τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης : μία (1) ώρα μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ



Γενικό Λύκειο Νεστορίου
Σχολικό έτος 2013-2014
Βοηθητικό Υλικό της Γ΄ Λυκείου