Μαθηματικά Γενικής Παιδείας

Γ΄ Λυκείου

Λύσεις Επαναληπτικών Εξετάσεων

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ: ΚΑΡΑΦΕΡΗΣ ΓΕΩΡΓΙΟΣ

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΠΕΜΠΤΗ 7 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2000
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ & ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

ΘΕΜΑ 1ο

Α. 1. Σχολικό βιβλίο σελίδα 151

Α. 2. α. P (A) + P (B), **β.** 1 - P (A).

Β. α. Β, **β.** α - 3, β - 4, γ - 2.

ΘΕΜΑ 2ο

α. $f'(x) = (2x^3 - 3x^2 - 12x - 7)' = \mathbf{6x^2 - 6x - 12,\ x \in IR}$

β. $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 6x^2 - 6x - 12 = 0 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow$ **x = 2 ή x = -1**

γ.

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
f΄(x)		+	○	-	○	+	
f (x)		↗		↘		↗	

τοπικό μέγιστο f (-1) = $2(-1)^3 - 3(-1)^2 - 12(-1) - 7 = -2 - 3 + 12 - 7 =$ **0**

τοπικό μέγιστο f (2) = $2 \cdot 2^3 - 3 \cdot 2^2 - 12 \cdot 2 - 7 = 16 - 12 - 24 - 7 =$ **-27**

ΘΕΜΑ 3ο

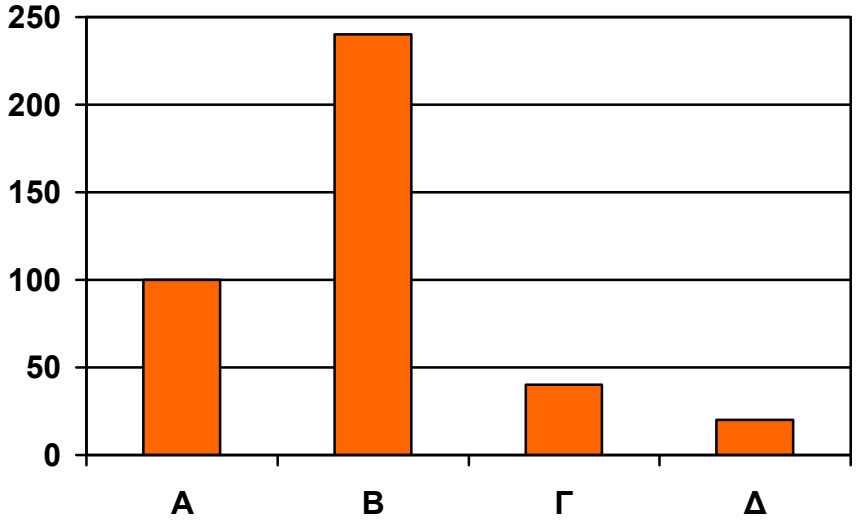
α. • $f_1\% = \frac{v_1}{v} \cdot 100\% \Rightarrow 25 = \frac{v_1}{4\cancel{00}} \cdot 1\cancel{00} \Leftrightarrow \mathbf{v_1 = 100}$

• $\alpha_4 = \frac{v_4}{v} \cdot 360^0 \Rightarrow 18 = \frac{v_4}{40\cancel{0}} \cdot 36\cancel{0} \Leftrightarrow v_4 = \frac{40 \cdot 18}{36} \Leftrightarrow \mathbf{v_4 = 20}$

• $v_1 + v_2 + v_3 + v_4 = v \overset{v_2 = 6v_3}{\Rightarrow} 120 + 7v_3 = 400 \Leftrightarrow \mathbf{v_3 = 40}$

• $v_2 = 6v_3 \Rightarrow v_2 = 6 \cdot 40 \Leftrightarrow \mathbf{v_2 = 240}$

β.



ΘΕΜΑ 4ο

α. Για την πόλη Α

- $\overline{x_A} = \dfrac{10 + 16 \cdot 2 + 17 \cdot 3 + 18 \cdot 2 + 20 \cdot 2}{10} = \dfrac{169}{10} = \mathbf{16,9}$
- Γράφουμε τις παρατηρήσεις με αύξουσα σειρά :

  10 , 16 , 16 , 17 , 17 , 17 , 18 , 18 , 20 , 20

  $\delta_A = \dfrac{17 + 17}{2} = \mathbf{17}$
- $\mathbf{M_0 = 17}$

Για την πόλη Β

- $\overline{x_B} = \dfrac{12 + 15 + 16 \cdot 3 + 17 \cdot 2 + 18 + 20 + 22}{10} = \dfrac{169}{10} = \mathbf{16,9}$
- Γράφουμε τις παρατηρήσεις με αύξουσα σειρά :

  12 , 15 , 16 , 16 , 16 , 17 , 17 , 18 , 20 , 22

  $\delta_B = \dfrac{16 + 17}{2} = \mathbf{16,5}$
- $\mathbf{M_0 = 16}$

β. Είναι $\overline{x_A} = \overline{x_B}$ και $s_A > s_B$ άρα η πόλη Α έχει μεγαλύτερη διασπορά από την πόλη Β.

γ. Κάθε θερμοκρασία της πόλης Α μειώνεται κατά 5.
Άρα από εφαρμογή σχολικού βιβλίου είναι
$\overline{x'_A} = \overline{x_A} - 5 = 16,9 - 5 = 11,9$ και $s_A' = s_A = 2,66$

1ος τρόπος

Είναι $s'_A > s_B$ και $\overline{x'_A} < \overline{x_B}$, άρα $CV_A' = \dfrac{s'_A}{\overline{x'_A}} > \dfrac{s_B}{\overline{x_B}} = CV_B$,

δηλαδή **μεγαλύτερη ομοιογένεια έχουν οι θερμοκρασίες της πόλης Β από τις θερμοκρασίες της πόλης Α.**

2ος τρόπος

$$CV_A' = \frac{s_A}{\overline{x'_A}} \cdot 100\% = \frac{2,66}{11,9} \cdot 100\% \cong 22,35\%$$

$$CV_B = \frac{s_B}{\overline{x_B}} \cdot 100\% = \frac{2,59}{16,9} \cdot 100\% \cong 15,33\%$$

Είναι $CV_B < CV_A'$, άρα **μεγαλύτερη ομοιογένεια έχουν οι θερμοκρασίες της πόλης Β από τις θερμοκρασίες της πόλης Α.**

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΣΑΒΒΑΤΟ 30 ΙΟΥΝΙΟΥ 2001
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ & ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

ΘΕΜΑ 1ο

Α. 1. Σχολικό βιβλίο σελίδα 30

Α. 2. α. Λάθος, **β.** Σωστό, **γ.** Λάθος, **δ.** Σωστό, **ε.** Σωστό, **στ.** Λάθος.

Β. 1. α - 4, β - 5, γ - 2.

Β. 2. $f'(x) = \left[\frac{1}{4}(x-1)^4\right]' = \frac{1}{4}\left[(x-1)^4\right]' = \frac{1}{4}4(x-1)^3(x-1)' = (x-1)^3$

$f'(\alpha) = 27 \Leftrightarrow (\alpha - 1)^3 = 27 \Leftrightarrow \alpha - 1 = 3 \Leftrightarrow \boldsymbol{\alpha = 4}$

ΘΕΜΑ 2ο

Α. α. • $v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + v_5 + v_6 = 20 \Leftrightarrow 11 + v_3 + v_4 = 20 \Leftrightarrow$
$v_3 + v_4 = 9 \Leftrightarrow v_4 = 9 - v_3$ (1)

• $\bar{x} = \frac{\sum x_i v_i}{v} \Leftrightarrow$

$24{,}4 = \frac{22\cdot 2+23\cdot 4+24\cdot v_3+25\cdot(9-v_3)+26\cdot 2+27\cdot 3}{20} \overset{(1)}{\Leftrightarrow}$

$488 = 44 + 92 + 24\cdot v_3 + 225 - 25v_3 + 52 + 81 \Leftrightarrow$

$488 = 494 - v_3 \Leftrightarrow \boldsymbol{v_3 = 6}$

άρα **6 ημέρες είχαν θερμοκρασία 24^0C**

• (1) $\overset{v_3 = 6}{\Rightarrow} v_4 = 9 - 6 \Leftrightarrow \boldsymbol{v_4 = 3}$

άρα **3 ημέρες είχαν θερμοκρασία 25^0C**

β.

Τιμές Θερμοκρασίας x_i	Πλήθος Ημερών v_i	N_i
22	2	2
23	4	6
24	**6**	12
25	**3**	15
26	2	17
27	3	20
Σύνολα	20	-

M_0 = 24

Από τη στήλη N_i παρατηρούμε ότι αν γράψουμε τις παρατηρήσεις με αύξουσα σειρά οι δύο μεσαίες παρατηρήσεις στις θέσεις $10^η$ και $11^η$ είναι 2. Άρα $δ = \frac{24 + 24}{2}$ = **24**

Β. Είναι δ = 24,5 και αν γράψουμε τις παρατηρήσεις με αύξουσα σειρά οι δύο μεσαίες παρατηρήσεις στις θέσεις $10^η$ και $11^η$ είναι 24 και 25 αντίστοιχα.

Τότε $v_1 + v_2 + v_3 = 10 \Leftrightarrow 6 + v_3 = 10 \Leftrightarrow v_3 = 4$

Επομένως **4 ημέρες είχαν θερμοκρασία 24^0C.**

Επίσης $v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + v_5 + v_6 = 20 \Leftrightarrow 15 + v_4 = 20 \Leftrightarrow v_4 = 5$

Επομένως **5 ημέρες είχαν θερμοκρασία 25^0C.**

ΘΕΜΑ 3ο

α.

Κλάσεις	v_i	N_i	f_i%	F_i%
[11 , 14)	**8**	8	10	10
[14 , 17)	16	24	20	**30**
[17 , 20)	24	**48**	30	60
[20 , 23)	20	68	25	85
[23 , 26)	12	80	**15**	100
Σύνολα	**80**	-	100	-

β. f_4% + f_5% = 25% + 15% = **40% των επιβατών θα έχει πρόσθετη οικονομική επιβάρυνση.**

γ. $\alpha_1 = f_1 \cdot 360^0 = 0,1 \cdot 360^0 = \mathbf{36^0}$
$\alpha_2 = f_2 \cdot 360^0 = 0,2 \cdot 360^0 = \mathbf{72^0}$
$\alpha_3 = f_3 \cdot 360^0 = 0,3 \cdot 360^0 = \mathbf{108^0}$
$\alpha_4 = f_4 \cdot 360^0 = 0,25 \cdot 360^0 = \mathbf{90^0}$
$\alpha_5 = f_5 \cdot 360^0 = 0,15 \cdot 360^0 = \mathbf{54^0}$

ΘΕΜΑ 4ο

α. $P(A) = \frac{340}{400} = \frac{17}{20}$, $P(\Gamma) = \frac{240}{400} = \frac{12}{20}$ ή $\frac{3}{5}$ και $P(A \cup \Gamma) = 1$

Έστω ότι Α , Γ είναι ασυμβίβαστα.
Ισχύει ο απλός προσθετικός νόμος

$P(A \cup \Gamma) = P(A) + P(\Gamma) \Leftrightarrow 1 = \frac{17}{20} + \frac{12}{20} \Leftrightarrow 1 = \frac{29}{20} \rightarrow$ άτοπο

Άρα τα **Α , Γ δεν είναι ασυμβίβαστα.**

β. ***1ος τρόπος***

Είναι $\Gamma - A \subseteq \Gamma \Rightarrow P(\Gamma - A) \leq P(\Gamma) \Leftrightarrow \mathbf{P(\Gamma - A) \leq \frac{3}{5}}$

2ος τρόπος

$P(A \cup \Gamma) = P(A) + P(\Gamma) - P(A \cap \Gamma) \Leftrightarrow$

$1 = \frac{17}{20} + \frac{12}{20} - P(A \cap \Gamma) \Leftrightarrow P(A \cap \Gamma) = \frac{9}{20}$

Είναι $P(\Gamma - A) = P(\Gamma) - P(A \cap \Gamma) = \frac{12}{20} - \frac{9}{20} = \frac{3}{20} \leq \frac{3}{5}$

γ. $P(A - \Gamma) = P(A) - P(A \cap \Gamma) = \frac{17}{20} - \frac{9}{20} = \frac{8}{20} = \mathbf{\frac{2}{5}}$

δ. ***1ος τρόπος***

$P[(A - \Gamma) \cup (\Gamma - A)] = P(A) + P(\Gamma) - 2P(A \cap \Gamma) = \frac{17}{20} + \frac{12}{20} - 2\frac{9}{20} = \mathbf{\frac{11}{20}}$

2ος τρόπος

$P[(A - \Gamma) \cup (\Gamma - A)] = P(A - \Gamma) + P(\Gamma - A) = \frac{8}{20} + \frac{3}{20} = \mathbf{\frac{11}{20}}$

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΠΕΜΠΤΗ 4 ΙΟΥΛΙΟΥ 2002
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ & ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

ΘΕΜΑ 1ο

Α. 1. Σχολικό βιβλίο σελίδα 16

2. Σχολικό βιβλίο σελίδα 13

3. Σχολικό βιβλίο σελίδα 28

Β.1. Σχολικό βιβλίο σελίδα 85

2. σταθμισμένο αριθμητικό μέσο, σταθμικό μέσο , $\bar{x} = \dfrac{\sum x_i w_i}{\sum w_i}$

ΘΕΜΑ 2ο

Α. $f(x) = \alpha x(2 - x) = 2\alpha x - \alpha x^2$ και $f'(x) = 2\alpha - 2\alpha x$.

Η εφαπτομένη της C_f στο $O(0, f(0))$ σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία 45^0, άρα $f'(0) = \varepsilon\varphi 45^0 = 1 \Leftrightarrow 2\alpha = 1 \Leftrightarrow \alpha = \dfrac{1}{2}$.

Β. Για $\alpha = \dfrac{1}{2}$, είναι $f(x) = x - \dfrac{1}{2}x^2$ και $f'(x) = 1 - x$.

α. $x_0 = 1$, $y_0 = f(1) = \dfrac{1}{2}$ και $\lambda = f'(1) = 0$,

$(\varepsilon) : y - y_0 = \lambda(x - x_0) \Leftrightarrow y - \dfrac{1}{2} = 0(x - 1) \Leftrightarrow y = \dfrac{1}{2}$.

β. $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
f΄(x)	+	0	-
f (x)	↗		↘

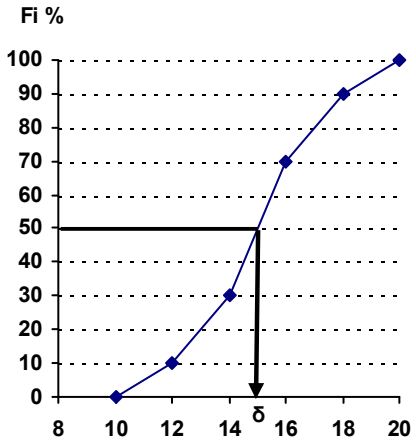
τ. μέγιστο $f(1) = \dfrac{1}{2}$

ΘΕΜΑ 3ο

α. $f_2\% = F_2\% - F_1\% = 30\% - 10\% = 20\%$, άρα

$$f_2 = 0{,}2 \Leftrightarrow \frac{v_2}{v} = 0{,}2 \Leftrightarrow \frac{10}{v} = \frac{1}{5} \Leftrightarrow v = 50.$$

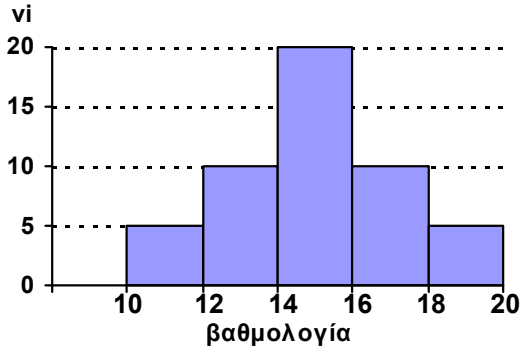
β.



$\delta = 15$

γ.

Κλάσεις	$F_i\%$	$f_i\%$	v_i
[10 , 12)	10	10	5
[12 , 14)	30	20	10
[14 , 16)	70	40	20
[16 , 18)	90	20	10
[18 , 20)	100	10	5
Σύνολα	-	100	50



δ. $P(A) = f_4\% + f_5\% = 20\% + 10\% = 30\%$

ΘΕΜΑ 4ο

Α. i. $P(1) + P(2) + P(3) + P(6) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 2 > 1 \rightarrow$ άτοπο

ii. $P(1) + P(2) + P(3) + P(6) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{64} = \frac{57}{64} < 1 \rightarrow$ άτοπο

iii. $P(1) + P(2) + P(3) + P(6) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} = 1 \rightarrow$ δεκτό

Β. α. Αν $\kappa = 1$, τότε η τιμή με τη μεγαλύτερη συχνότητα είναι η 1.
Αν $\kappa = 2$, τότε η τιμή με τη μεγαλύτερη συχνότητα είναι η 3.
Αν $\kappa = 3$, τότε η τιμή με τη μεγαλύτερη συχνότητα είναι η 3.
Αν $\kappa = 6$, τότε η τιμή με τη μεγαλύτερη συχνότητα είναι η 3.
Επομένως $A = \{2 , 3 , 6\}$.

$$\bar{x} = \frac{1+1+7+\kappa+\kappa+3+3+3}{8} \Leftrightarrow 2{,}5 = \frac{2\kappa + 18}{8} \Leftrightarrow$$

$2\kappa + 18 = 20 \Leftrightarrow \kappa = 1$

Άρα $B = \{1\}$.

β. $P(A) = P(2) + P(3) + P(6) = \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} = \frac{1}{2}$

$P(B) = P(1) = \frac{1}{2}$

$A \cup B = \Omega$, άρα $P(A \cup B) = 1$

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΠΕΜΠΤΗ 3 ΙΟΥΛΙΟΥ 2003
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ & ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Σχολικό βιβλίο σελίδες 150-151

Β. γ

Γ. β

Δ. Σχολικό βιβλίο σελίδα 96

ΘΕΜΑ 2ο

α. Πρέπει $x^2 - 1 \geq 0$.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$x^2 - 1$		+	0	-	0	+	

Άρα $A = (-\infty , -1] \cup [1 , +\infty)$.

β. $$f'(x) = \left(\sqrt{x^2 - 1}\right)' = \frac{(x^2 - 1)'}{2\sqrt{x^2 - 1}} = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 - 1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

$$f'(3) = \frac{3}{\sqrt{3^2 - 1}} = \frac{3}{\sqrt{8}} = \frac{3}{2\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2(\sqrt{2})^2} = \frac{3\sqrt{2}}{2 \cdot 2} = \frac{3\sqrt{2}}{4}$$

γ. $$\lim_{x\to 2} h(x) = \lim_{x\to 2} \frac{f(x) - \sqrt{3}}{x - 2} = \lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x^2 - 1} - \sqrt{3}}{x - 2}$$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{\left(\sqrt{x^2 - 1} - \sqrt{3}\right)\left(\sqrt{x^2 - 1} + \sqrt{3}\right)}{(x - 2)\left(\sqrt{x^2 - 1} + \sqrt{3}\right)}$$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{x^2 - 4}{(x - 2)\left(\sqrt{x^2 - 1} + \sqrt{3}\right)} = \lim_{x\to 2} \frac{(x - 2)(x + 2)}{(x - 2)\left(\sqrt{x^2 - 1} + \sqrt{3}\right)}$$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{x + 2}{\sqrt{x^2 - 1} + \sqrt{3}} = \frac{4}{2\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

ΘΕΜΑ 3ο

α. A = {2 , 4 , 6 , 8 , … , 30} και B = { 5 , 10 , 15 , 20 , 25 , 30}

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{15}{30} = 0,5 \quad \text{και} \quad P(B) = \frac{N(B)}{N(\Omega)} = \frac{6}{30} = 0,2$$

β. $A \cap B = \{10 , 20 , 30\}$ και $P(A \cap B) = \frac{N(A \cap B)}{N(\Omega)} = \frac{3}{30} = 0,1.$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,5 + 0,2 - 0,1 = 0,6.$

γ. $P(A \cup B') = P(A) + P(B') - P(A \cap B')$

$= P(A) + 1 - P(B) - P(A - B)$

$= P(A) + 1 - P(B) - [P(A) - P(A \cap B)]$

$= P(A) + 1 - P(B) - P(A) + P(A \cap B)$

$= 1 - P(B) + P(A \cap B)$

$= 1 - 0,2 + 0,1 = 0,9.$

δ. $P[(A' \cap B) \cup (A \cap B')] = P[(A - B) \cup (B - A)]$

$= P(A) + P(B) - 2P(A \cap B)$

$= 0,5 + 0,2 - 2 \cdot 0,1 = 0,5.$

ΘΕΜΑ 4ο

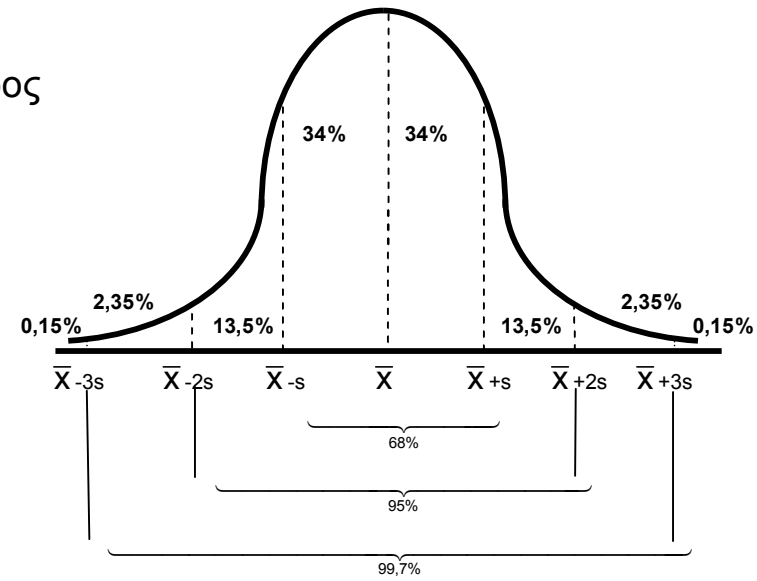
α. Το 50% των μαθητών του δείγματος έχουν βάρος το πολύ 65 Kg, άρα $\bar{x} = \delta = 65$.

Το 47,5% των μαθητών του δείγματος έχουν βάρος από 65Kg έως 75Kg, άρα $\bar{x} + 2s = 75 \Leftrightarrow$

$65 + 2s = 75 \Leftrightarrow$

$2s = 10 \Leftrightarrow$

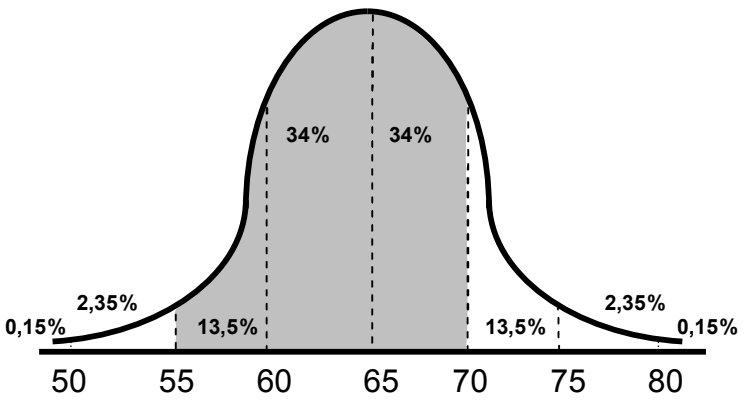
$s = 5$



β. $CV = \frac{s}{\bar{x}} = \frac{5}{65} \cong 7,69\% < 10\%$

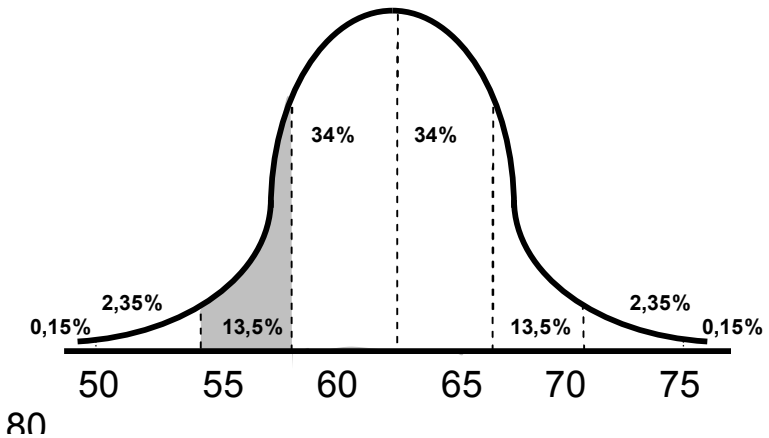
Άρα **είναι ομοιογενές**.

γ.



13,5% + 34% + 34% = **81,5%**

δ.



[55 , 60) → 13,5%

$f_i = \frac{v_i}{v} \Leftrightarrow 0{,}135 = \frac{27}{v} \Leftrightarrow v = \frac{27}{0{,}135} \Leftrightarrow$ **v = 200**.

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΤΕΤΑΡΤΗ 7 ΙΟΥΛΙΟΥ 2004
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ & ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

ΘΕΜΑ 1ο

Α. **Σχολικό βιβλίο σελίδα 151**

Β. α. **Σχολικό βιβλίο σελίδα 138,**
β. **Σχολικό βιβλίο σελίδα 139**

Γ. α. Σωστό, **β.** Λάθος, **γ.** Σωστό, **δ.** Λάθος, **ε.** Λάθος, **στ.** Σωστό.

ΘΕΜΑ 2ο

α. $$f'(x) = \left(\frac{x+2}{e^x}\right)' = \frac{(x+2)'\cdot e^x - (x+2)\cdot(e^x)'}{(e^x)^2} = \frac{-x-1}{e^x}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{-x-1}{e^x} = 0 \Leftrightarrow -x-1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$$

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
f΄(x)		+	0	-	
f (x)		↗		↘	

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty , -1]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[-1 , +\infty)$. Η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο την τιμή $f(-1) = e$

β. $$f(x) + f'(x) = \frac{x+2}{e^x} + \frac{-x-1}{e^x} = \frac{x+2-x-1}{e^x} = \frac{1}{e^x}$$

γ. $x_0 = 0$, $y_0 = f(x_0) = f(0) = 2$ και $\lambda = f'(x_0) = f'(0) = -1$

$(\varepsilon) : y - y_0 = \lambda (x - x_0) \Leftrightarrow$

$(\varepsilon) : y - 2 = -1(x - 0) \Leftrightarrow$

$(\varepsilon) : y = -x + 2.$

ΘΕΜΑ 3ο

α. $\bar{x} = \dfrac{\sum_{i=1}^{25} t_i}{25} \Leftrightarrow 14 = \dfrac{\sum_{i=1}^{25} t_i}{25} \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{25} t_i = 350$

$\bar{x}_1 = \dfrac{\sum_{i=1}^{10} t_i}{10} \Leftrightarrow 11 = \dfrac{\sum_{i=1}^{10} t_i}{10} \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{10} t_i = 110$

$\bar{x}_2 = \dfrac{\sum_{i=1}^{25} t_i - \sum_{i=1}^{10} t_i}{15} = \dfrac{350 - 110}{15} = \dfrac{240}{15} = 16$

β. $s^2 = \dfrac{1}{25}\left[\sum_{i=1}^{25} t_i^2 - \dfrac{\left(\sum_{i=1}^{25} t_i\right)}{25}\right] = \dfrac{\sum_{i=1}^{25} t_i^2}{25} - \bar{x}^2 = \dfrac{5000}{25} - 14^2 = 200 - 196 = 4$

$s = \sqrt{s^2} = \sqrt{4} = 2$ και $CV = \dfrac{s}{\bar{x}} = \dfrac{2}{14} = 0{,}1429$ ή $14{,}29\%$

ΘΕΜΑ 4ο

α. Έστω ότι $P(1) = P(3) = P(5) = 2P(2) = 4P(4) = 2P(6) = 4\kappa$.
Άρα $P(1) = P(3) = P(5) = 4\kappa$, $P(2) = P(6) = 2\kappa$ και $P(4) = \kappa$.
Ισχύει $P(1) + P(2) + P(3) + P(4) + P(5) + P(6) = 1 \Leftrightarrow$
$4\kappa + 2\kappa + 4\kappa + \kappa + 4\kappa + 2\kappa = 1 \Leftrightarrow 17\kappa = 1 \Leftrightarrow \kappa = \dfrac{1}{17}$
Άρα $P(1) = P(3) = P(5) = \dfrac{4}{17}$, $P(2) = P(6) = \dfrac{2}{17}$ και $P(4) = \dfrac{1}{17}$

β. $A = \{2 , 4 , 6\}$ και $B = \{1 , 3 , 5\} = A'$
$P(A) = P(2) + P(4) + P(6) = \dfrac{2}{17} + \dfrac{1}{17} + \dfrac{2}{17} = \dfrac{5}{17}$
$P(B) = P(A') = 1 - P(A) = 1 - \dfrac{5}{17} = \dfrac{12}{17}$

γ. $f'(x) = x^2 - 2\kappa x + 4$.

Για να είναι η f γνησίως αύξουσα στο IR,

πρέπει $f'(x) \geq 0$, για κάθε $x \in IR$.

Άρα πρέπει το τριώνυμο να έχει $\Delta \leq 0 \Leftrightarrow$

$(-2\kappa)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 \leq 0 \Leftrightarrow 4\kappa^2 - 16 \leq 0 \Leftrightarrow \kappa^2 - 4 \leq 0$

κ	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$\kappa^2 - 4$		+	0	-	0	+	

άρα $-2 \leq \kappa \leq 2$ και επειδή $\kappa \in \Omega$, θα είναι $\kappa = 1$ ή $\kappa = 2$.

$\Gamma = \{1 , 2\}$ και

$P(\Gamma) = P(1) + P(2) = \frac{4}{17} + \frac{2}{17} = \frac{6}{17}$

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ & ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ
ΠΑΡΑΣΚΕΥΗ 8 - 7 - 2005

ΘΕΜΑ 1ο

Α.1. Σχολικό βιβλίο σελίδα 31

Α.2. $CV = \frac{s}{\bar{x}}$, αν $\bar{x} > 0$, ενώ $CV = \frac{s}{-\bar{x}}$, αν $\bar{x} < 0$.

Β. α. Λάθος, **β.** Σωστό, **γ.** Σωστό, **δ.** Λάθος, **ε.** Σωστό, **στ.** Σωστό.

ΘΕΜΑ 2ο

α. Πρέπει $x > 0$, άρα $A_f = (0 , +\infty)$.

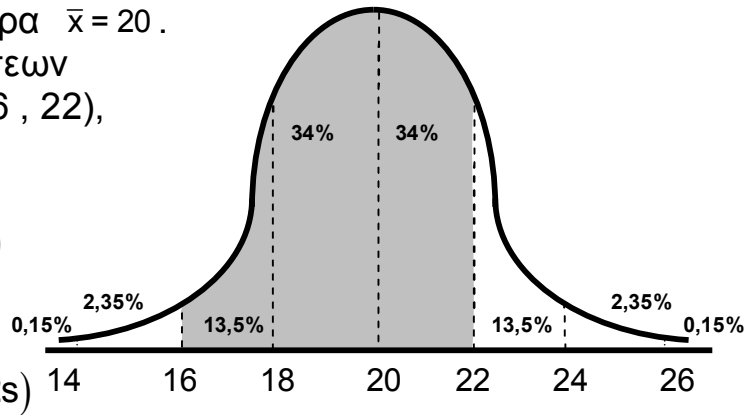
β. $f'(x) = (\alpha \ell n x - \beta x^2)' = \frac{\alpha}{x} - 2\beta x,\ x > 0.$

γ. $A(1 , 1) \in C_f \Leftrightarrow f(1) = 1 \Leftrightarrow \alpha \cdot \ell n 1 - \beta \cdot 1^2 = 1 \Leftrightarrow -\beta = 1 \Leftrightarrow \beta = -1.$
Η εφαπτομένη της C_f στο $A(1 , 1)$ είναι η $y = 3x - 2$,
άρα $f'(1) = 3 \Leftrightarrow \alpha - 2\beta = 3 \Leftrightarrow \alpha + 2 = 3 \Leftrightarrow \alpha = 1.$

δ. $\lim\limits_{x\to 2}\left(f'(x)\cdot x^3\right) = \lim\limits_{x\to 2}\left[\left(\frac{\alpha}{x} - 2\beta x\right)\cdot x^3\right] = \left(\frac{\alpha}{2} - 4\beta\right)\cdot 8 = 4\alpha - 32\beta \overset{\alpha = 1}{\underset{\beta = -1}{=}} \mathbf{36}$

ΘΕΜΑ 3ο

α. Το 50% των παρατηρήσεων έχουν τιμή μεγαλύτερη του 20, άρα $\bar{x} = 20$.
Το 81,5% των παρατηρήσεων βρίσκεται στο διάστημα (16 , 22),
άρα $s = 2$.



β. Στο διάστημα $(\bar{x} - s , \bar{x} + s)$ βρίσκεται το 68% των παρατηρήσεων.
Στο διάστημα $(\bar{x} - 2s , \bar{x} + 2s)$ βρίσκεται το 95% των παρατηρήσεων.
Στο διάστημα $(\bar{x} - 3s , \bar{x} + 3s)$ βρίσκεται το 99,7% των παρατηρήσεων.
Άρα $\alpha = 2$.

γ. $R \approx 6s = 6 \cdot 2 = 12$

$f(x) = \frac{R}{2}x^2 - (\bar{x} + 4)x + 9s = 6x^2 - 24x + 18.$

$f'(x) = 12x - 24$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 12x - 24 = 0 \Leftrightarrow 12x = 24 \Leftrightarrow x = 2$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
f´(x)	-	0	+
f (x)	↘		↗

$f_{min} = f(2) = 6 \cdot 2^2 - 24 \cdot 2 + 18 = -6.$

ΘΕΜΑ 4ο

α. ● $A = (A \cap B) \cup (A - B) = \{1, 2, 3, 4, 6\}$

$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{5}{10} = 0,5$

● $B = (A \cup B) - (A - B) = \{1, 2, 3, 5\}$

$P(B) = \frac{N(B)}{N(\Omega)} = \frac{4}{10} = 0,4$

● $\frac{x+1}{x-1} \geq 2 \Leftrightarrow$

$(x - 1)\frac{x+1}{x-1} \geq 2(x - 1) \Leftrightarrow$

$x + 1 \geq 2x - 2 \Leftrightarrow x - 2x \geq -1 - 2 \Leftrightarrow$

$-x \geq -3 \Leftrightarrow x \leq 3 \Leftrightarrow x = 2$ ή $x = 3.$

άρα $\Gamma = \{2, 3\}$

$P(\Gamma) = \frac{N(\Gamma)}{N(\Omega)} = \frac{2}{10} = 0,2$

Πρέπει $x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$

$x \in \Omega$, άρα $x - 1 > 0$

β. Είναι $B \cap \Gamma = \{3\}$ και $P(B \cap \Gamma) = \frac{N(B \cap \Gamma)}{N(\Omega)} = \frac{1}{10} = 0,1$

$P(B - \Gamma) = P(B) - P(B \cap \Gamma) = 0,4 - 0,1 = 0,3$

γ. $P((B - \Gamma) \cup (\Gamma - B)) = P(B) + P(\Gamma) - 2 \cdot P(B \cap \Gamma) = 0,4 + 0,2 - 0,2 = 0,4$

δ. $\bar{x} = \dfrac{\lambda + 3\lambda + 5\lambda}{3} = \dfrac{9\lambda}{3} = 3\lambda$

$$s^2 = \frac{(\lambda - 3\lambda)^2 + (3\lambda - 3\lambda)^2 + (5\lambda - 3\lambda)^2}{3} = \frac{4\lambda^2 + 0 + 4\lambda^2}{3} = \frac{8\lambda^2}{3}$$

$$s^2 > 24 \Leftrightarrow \frac{8\lambda^2}{3} > 24 \Leftrightarrow 8\lambda^2 > 72 \Leftrightarrow \lambda^2 > 9 \underset{\lambda>0}{\overset{\lambda\in\Omega}{\Leftrightarrow}} \lambda > 3$$

άρα $\Delta = \{4 , 5 , 6 , 7 , 8 , 9 , 10\}$ και

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{7}{10} = 0{,}7.$$

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΔΕΥΤΕΡΑ 3 ΙΟΥΛΙΟΥ 2006
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ & ΣΤΟΙΧΕΙΑ
ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

ΘΕΜΑ 1^{ο}

Α. Σχολικό βιβλίο σελίδες 150 - 151

Β. 1. Σχολικό βιβλίο σελίδα 14,

2. Σχολικό βιβλίο σελίδα 13.

Γ. α. ΛΑΘΟΣ, **β.** ΛΑΘΟΣ, **γ.** ΣΩΣΤΟ, **δ.** ΛΑΘΟΣ, **ε.** ΣΩΣΤΟ.

ΘΕΜΑ 2^{ο}

α. Η εφαπτομένη της C_f στο $A(2, e^2)$ είναι

$y = -e^2x + 3e^2$, τότε $f(2) = e^2$ και $f'(2) = -e^2$.

$f(2) = e^2 \Leftrightarrow e^2(\alpha \cdot 2^2 + \beta \cdot 2 + 9) = e^2 \Leftrightarrow$

$4\alpha + 2\beta + 9 = 1 \Leftrightarrow 2\alpha + \beta = -4$ **(1)**

$f'(x) = [e^x(\alpha x^2 + \beta x + 9)]'$

$= (e^x)' \cdot (\alpha x^2 + \beta x + 9) + e^x \cdot (\alpha x^2 + \beta x + 9)'$

$= e^x(\alpha x^2 + \beta x + 9) + e^x(2\alpha x + \beta)$

$= e^x(\alpha x^2 + \beta x + 2\alpha x + \beta + 9)$

$f'(2) = -e^2 \Leftrightarrow e^2(\alpha \cdot 2^2 + \beta \cdot 2 + 2\alpha \cdot 2 + \beta + 9) = -e^2 \Leftrightarrow$

$8\alpha + 3\beta = -10$ **(2)**

Από τις (1) και (2) παίρνουμε **α = 1** και **β = -6**.

β. Για $\alpha = 1$ και $\beta = -6$ είναι :

$f(x) = e^x(x^2 - 6x + 9)$ και $f'(x) = e^x(x^2 - 4x + 3)$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x(x^2 - 4x + 3) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow$

$x = 1$ ή $x = 3$

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
f΄(x)		+	0	-	0	+	
f (x)		↗		↘		↗	

τ. μέγιστο τ. ελάχιστο

τ. μέγιστο $f(1) = e^1(1^2 - 6 \cdot 1 + 9) = 4e$

τ. ελάχιστο $f(3) = e^3(3^2 - 6 \cdot 3 + 9) = 0$

ΘΕΜΑ 3ο

α. Α : «Ο πελάτης έχει πάρει στεγαστικό δάνειο»

Β : «Ο πελάτης έχει πάρει καταναλωτικό δάνειο»

Είναι $P((A - B) \cup (B - A)) = 0,7$ και $P((A \cup B)') = 0,1$

$P((A \cup B)') = 0,1 \Leftrightarrow 1 - P(A \cup B) = 0,1 \Leftrightarrow$

$P(A \cup B) = 0,9$ **(1)**

$P((A - B) \cup (B - A)) = 0,7 \Leftrightarrow$

$P(A) + P(B) - 2P(A \cap B) = 0,7 \Leftrightarrow$

$P(A) + P(B) - P(A \cap B) - P(A \cap B) = 0,7 \Leftrightarrow$

$P(A \cup B) - P(A \cap B) = 0,7 \overset{(1)}{\Leftrightarrow}$

$0,9 - P(A \cap B) = 0,7 \Leftrightarrow P(A \cap B) = 0,2$ **(2)**

Άρα $A \cap B \neq \varnothing$, δηλαδή τα Α, Β δεν είναι ασυμβίβαστα.

β. Α - Β : «Ο πελάτης έχει πάρει μόνο στεγαστικό δάνειο»

Β - Α : «Ο πελάτης έχει πάρει μόνο καταναλωτικό δάνειο»

Είναι $P(A - B) = 0,6$.

$P((A - B) \cup (B - A)) = P(A - B) + P(B - A) \Leftrightarrow$

$0,7 = 0,6 + P(B - A)) \Leftrightarrow$ **$P(B - A) = 0,1$**

$P(B - A) = P(B) - P(A \cap B) \overset{(2)}{\Leftrightarrow} 0,1 = P(B) - 0,2 \Leftrightarrow$

$P(B) = 0,3$

ΘΕΜΑ 4ο

α. Η $3^η$ κλάση είναι $[7 , 7 + c)$ και η $4^η$ είναι $[7 + c , 7 + 2c)$.

Για την τέταρτη κλάση έχουμε :

$$x_4 = \frac{7 + c + 7 + 2c}{2} \Leftrightarrow 10 = \frac{14 + 3c}{2} \Leftrightarrow c = 2$$

β. Αν $f_2 = x$ τότε $f_4 = 2x$.

$f_1 + f_2 + f_3 + f_4 = 1 \Leftrightarrow 0,1 + x + 0,3 + 2x = 1 \Leftrightarrow$

$3x = 0,6 \Leftrightarrow x = 0,2$, άρα $f_2 = 0,2$ και $f_4 = 0,4$.

Απουσίες	x_i	f_i	$x_i f_i$
[3 , 5)	4	0,1	0,4
[5 , 7)	6	0,2	1,2
[7 , 9)	8	0,3	2,4
[9 , 11)	10	0,4	4

Σύνολα	-	1	8

γ. i. $\bar{x} = \sum x_i f_i = 8$

ii. α΄ τρόπος

Απουσίες	x_i	f_i	$x_i f_i$	$x_i^2 f_i$
[3 , 5)	4	0,1	0,4	1,6
[5 , 7)	6	0,2	1,2	7,2
[7 , 9)	8	0,3	2,4	19,2
[9 , 11)	10	0,4	4	40
Σύνολα	-	1	8	68

$$s^2 = \frac{1}{v}\left[\sum_{i=1}^{k} x_i^2 v_i - \frac{\left(\sum_{i=1}^{k} x_i v_i\right)}{v}\right] \Leftrightarrow s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{k} x_i^2 v_i}{v} - \bar{x}^2 \Leftrightarrow$$

$$s^2 = \sum_{i=1}^{k} x_i^2 \frac{v_i}{v} - \bar{x}^2 \Leftrightarrow s^2 = \sum_{i=1}^{k} x_i^2 f_i - \bar{x}^2 \Rightarrow$$

$s^2 = 68 - 8^2 = 68 - 64 = 4$, άρα $s = \sqrt{s^2} = \sqrt{4} = 2$

β΄ τρόπος

Απουσίες	x_i	f_i	$x_i f_i$	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$	$(x_i - \bar{x})^2 f_i$
[3 , 5)	4	0,1	0,4	-4	16	1,6
[5 , 7)	6	0,2	1,2	-2	4	0,8
[7 , 9)	8	0,3	2,4	0	0	0
[9 , 11)	10	0,4	4	2	4	1,6
Σύνολα	-	1	8	-	-	4

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{k} (x_i - \bar{x})^2 v_i}{v} \Leftrightarrow s^2 = \sum_{i=1}^{k} (x_i - \bar{x})^2 \frac{v_i}{v} \Leftrightarrow$$

$$s^2 = \sum_{i=1}^{k} (x_i - \bar{x})^2 f_i \Rightarrow s^2 = 4$$

Άρα $s = \sqrt{s^2} = \sqrt{4} = 2$

ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΤΗΣ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ
2007

ΘΕΜΑ 1^{ο}

Α. Απόδειξη από το σχολικό βιβλίο, σελ. 152.

Β. **α.** Ορισμός από το σχολικό βιβλίο, σελ. 22.
β. Ορισμός από το σχολικό βιβλίο, σελ. 87.

Γ1. Ερωτήσεις Σ – Λ
α $\rightarrow \Sigma$
β $\rightarrow \Sigma$
γ $\rightarrow \Lambda$

Γ2. $f_1'(x) = \left(x^{\nu}\right)' = \nu \cdot x^{\nu-1}$

$f_2'(x) = (\ln x)' = \dfrac{1}{x}$

$f_3'(x) = \left(\sqrt{x}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

$f_4'(x) = (\sigma\upsilon\nu x)' = -\eta\mu x$

ΘΕΜΑ 2^{ο}

α.
$$\left.\begin{array}{l} f(x) = x \cdot e^x + 3 \Leftrightarrow x \cdot e^x = f(x) - 3 \\ \text{f παραγωγίσιμη στο R με,} \\ f'(x) = (x)' e^x + x\left(e^x\right)' + (3)' = e^x + x \cdot e^x \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$f'(x)=e^x+f(x)-3 \Leftrightarrow f'(x)=f(x)+e^x-3$$

β. $$\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-e^x}{x^2-x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cancel{e^x}+x\cdot e^x-\cancel{e^x}}{x^2-x}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cancel{x}\cdot e^x}{\cancel{x}(x-1)}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{x-1}=\frac{e^0}{0-1}=\frac{1}{-1}=-1$$

ΘΕΜΑ 3ο

α. $P(-1)=P(0)=P(1)=P(2)=2P(3)=2P(4)=2P(5)$

$$P(3)=P(4)=P(5)=\frac{P(-1)}{2}$$

$$P(-1)+P(0)+P(1)+P(2)+P(3)+P(4)+P(5)=1$$

$$P(-1)+P(-1)+P(-1)+P(-1)+\frac{P(-1)}{2}+\frac{P(-1)}{2}+\frac{P(-1)}{2}=1$$

$$2P(-1)+2P(-1)+2P(-1)+2P(-1)+P(-1)+P(-1)+P(-1)=2$$

$$11P(-1)=2 \Rightarrow P(-1)=\frac{2}{11}$$

Άρα $P(-1)=P(0)=P(1)=P(2)=\frac{2}{11}$

$$P(3)=P(4)=P(5)=\frac{1}{11}$$

β. Για κάθε $x\in(A\cap B)\Rightarrow x\in A$. Άρα $(A\cap B)\subseteq A$

Ομοίως $(A\cap B)\subseteq B$.

Αφού $(A\cap B)=\{-1,\ 3\}\Rightarrow -1\in A,\ 3\in A$ και $-1\in B,\ 3\in B$.

Άρα πρέπει $x^2-x-3=-1 \Leftrightarrow x^2-x-2=0 \begin{cases} x=2 \\ \text{ή} \\ x=-1 \end{cases}$

Για $x=2$ έχουμε $A=\{1,\ 3,\ -1\}$ και $B=\{2,\ 3,\ 8,\ -3\}$

Άρα $A\cap B=\{3\}$, άτοπο αφού εξ υποθέσεως $A\cap B=\{-1,\ 3\}$

Για $x=-1$ έχουμε $A=\{1,\ 3,\ -1\}$ και $B=\{2,\ 0,\ -1,\ 3\}$

Άρα $A\cap B=\{-1,\ 3\}$

Επομένως η τιμή $x=-1$ είναι δεκτή

γ. Για $x=-1$, έχουμε $A=\{1, 3, -1\}$ και $B=\{2, 0, -1, 3\}$

$$P(A)=P(1)+P(3)+P(-1)=\frac{2}{11}+\frac{1}{11}+\frac{2}{11}=\frac{5}{11}$$

$$P(B)=P(2)+P(0)+P(-1)+P(3)=\frac{2}{11}+\frac{2}{11}+\frac{2}{11}+\frac{1}{11}=\frac{7}{11}$$

$$P(A\cap B)=P(-1)+P(3)=\frac{2}{11}+\frac{1}{11}=\frac{3}{11}$$

$$P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)=\frac{5}{11}-\frac{3}{11}=\frac{2}{11}$$

$$P(A\cup B')=P(A)+P(B')-P(A\cap B')=$$

$$=P(A)+P(B')-P(A-B)=$$

$$=\cancel{P(A)}+1-P(B)-\cancel{P(A)}+P(A\cap B)=$$

$$=1-P(B)+P(A\cap B)=1-\frac{7}{11}+\frac{3}{11}=\frac{7}{11}$$

ΘΕΜΑ 4^{ο}

α. $$\bar{x}_A=\frac{\sum_{i=1}^{25}t_i}{25}=\frac{12+18+t_3+...+t_{25}}{25}=\frac{12+18+345}{25}=\frac{375}{25}=15$$

$$\bar{x}_B=\frac{\sum_{i=1}^{25}t_i'}{25}=\frac{16+14+t_3+...+t_{25}}{25}=\frac{16+14+345}{25}=\frac{375}{25}=15$$

β. $$s_A^2-s_B^2=\frac{1}{25}\sum_{i=1}^{25}(t_i-\bar{x})^2-\frac{1}{25}\sum_{i=1}^{25}(t_i'-\bar{x})^2=$$

$$=\frac{(12-15)^2+(18-15)^2+(t_3-15)^2+...+(t_{25}-15)^2}{25}-$$

$$-\frac{(16-15)^2+(14-15)^2+(t_3-15)^2+...+(t_{25}-15)^2}{25}=$$

$$=\frac{(-3)^2+3^2+\cancel{(t_3-15)^2}+...+\cancel{(t_{25}-15)^2}-1^2-(-1)^2-\cancel{(t_3-15)^2}-...-\cancel{(t_{25}-15)^2}}{25}=$$

$$=\frac{9+9-1-1}{25}=\frac{16}{25}$$

γ. $$CV_A=\frac{1}{15}\Leftrightarrow\frac{s_A}{\bar{x}_A}=\frac{1}{15}\Leftrightarrow s_A=\frac{1}{15}\bar{x}_A\Leftrightarrow s_A=\frac{1}{15}\cdot 15\Leftrightarrow s_A=1$$

$$s_A^2-s_B^2=\frac{16}{25}\Leftrightarrow s_B^2=s_A^2-\frac{16}{25}\Leftrightarrow s_B^2=1-\frac{16}{25}\Leftrightarrow s_B^2=\frac{9}{25}\Leftrightarrow s_B=\frac{3}{5}$$

$$CV_B=\frac{s_B}{\bar{x}_B}=\frac{\frac{3}{5}}{\frac{15}{1}}=\frac{3}{75}=\frac{1}{25}$$

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΤΡΙΤΗ 1 ΙΟΥΛΙΟΥ 2008
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ & ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Σχολικό βιβλίο σελίδα 31

Β. α. Σχολικό βιβλίο σελίδα 93

β. Σχολικό βιβλίο σελίδα 142

Γ. α. Σωστό, **β.** Σωστό, **γ.** Σωστό, **δ.** Λάθος, **ε.** Λάθος.

ΘΕΜΑ 2ο

α. • $\alpha_4 = f_4 \cdot 360^0 \Leftrightarrow 108^0 = f_4 \cdot 360^0 \Leftrightarrow f_4 = 0,3$ ή $\mathbf{f_4 = \frac{3}{10}}$

Κλάσεις	x_i	f_i	$x_i f_i$
[20 , 40)	30	f_1	$30f_1$
[40 , 60)	50	f_1	$50f_1$
[60 , 80)	70	f_3	$70f_3$
[80 , 100)	90	0,3	27
ΣΥΝΟΛΑ	**-**	**1**	$\mathbf{27 + 80f_1 + 70f_3}$

• $\sum f_i = 1 \Leftrightarrow 2 \cdot f_1 + f_3 + 0,3 = 1 \Leftrightarrow f_3 = 0,7 - 2f_1$ **(1)**

• $\bar{x} = \sum x_i f_i \Leftrightarrow 70 = 27 + 80f_1 + 70f_3 \overset{(1)}{\Leftrightarrow}$

$70 = 27 + 80f_1 + 70(0,7 - 2f_1) \Leftrightarrow$

$70 = 27 + 80f_1 + 49 - 140f_1 \Leftrightarrow$

$60f_1 = 6 \Leftrightarrow f_1 = 0,1$ ή $\mathbf{f_1 = f_2 = \frac{1}{10}}$

(1) $\overset{f_1 = 0,1}{\Rightarrow} f_3 = 0,7 - 2 \cdot 0,1 \Leftrightarrow f_3 = 0,5$ ή $\mathbf{f_3 = \frac{5}{10}}$

β. i.

Κλάσεις	x_i	v_i	f_i
[20 , 40)	30	5	0,1
[40 , 60)	50	5	0,1
[60 , 80)	70	25	0,5
[80 , 100)	90	15	0,3
ΣΥΝΟΛΑ	**-**	**50**	**1**

ii. Το πλήθος των μαθητών με βαθμολογία τουλάχιστον 60, είναι $v_3 + v_4 = 25 + 15 =$ **40 μαθητές**.

iii. Το ποσοστό των μαθητών με βαθμολογία από 50 ως 70, είναι $\frac{f_2\%}{2} + \frac{f_3\%}{2} = \frac{10\%}{2} + \frac{50\%}{2} = \frac{60\%}{2} = \mathbf{30\%}$.

ΘΕΜΑ 3ο

α. • Είναι $A \cap B \subseteq A \subseteq A \cup B$ άρα $P(A \cap B) \leq P(A) \leq P(A \cup B)$ και επειδή οι πιθανότητες είναι ανά δύο διαφορετικές μεταξύ τους, τότε $P(A \cap B) < P(A) < P(A \cup B)$ **(1)**.

• Επίσης $0 < p < 1$, άρα $p - 1 < 0$ και $p + 1 > 1$. Επομένως τα $p - 1$ και $p + 1$ δεν είναι πιθανότητες **(2)**

• $0 < p < 1 \overset{\cdot p>0}{\Leftrightarrow} 0 < p^2 < p \overset{\cdot p>0}{\Leftrightarrow} 0 < p^3 < p^2$

Επομένως $p^3 < p^2 < p$ **(3)**.

Από (1), (2) και (3) συμπεραίνουμε ότι :

$\mathbf{P(A \cap B) = p^3}$, $\mathbf{P(A) = p^2}$ και $\mathbf{P(A \cup B) = p}$.

β. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Leftrightarrow$

$P(B) = P(A \cap B) - P(A) + P(A \cup B) \Leftrightarrow$

$\mathbf{P(B) = p^3 - p^2 + p}$

γ. $P(B - A) > P(A - B) \Leftrightarrow$

$P(B) - P(A \cap B) > P(A) - P(A \cap B) \Leftrightarrow$

$P(B) > P(A) \Leftrightarrow$

$p^3 - p^2 + p > p^2 \Leftrightarrow$

$p^3 - 2p^2 + p > 0 \Leftrightarrow$

$p \cdot (p^2 - 2p + 1) > 0 \Leftrightarrow$

$p \cdot (p - 1)^2 > 0$ που ισχύει διότι $p > 0$ και $p \neq 1$.

Επομένως $\mathbf{P(B - A) > P(A - B)}$.

ΘΕΜΑ 4ο

α. $x + 2y = 200 \Leftrightarrow 2y = 200 - x \Leftrightarrow y = 100 - \frac{1}{2}x$.

Εμβαδόν περιφραγμένης περιοχής $= x \cdot y \Leftrightarrow$

$f(x) = x \cdot (100 - \frac{1}{2}x) \Leftrightarrow$

$\mathbf{f(x) = 100x - \frac{1}{2}x^2,\ 0 < x < 200.}$

• $\mathbf{x > 0}$

• $y > 0 \Leftrightarrow 100 - \frac{1}{2}x > 0 \Leftrightarrow$

$200 - x > 0 \Leftrightarrow \mathbf{x < 200}$

β. $f'(x) = 100 - x$

x	0	100	200
$f'(x) = 100 - x$	+	○	-
f (x)	↗		↘

Η f παρουσιάζει μέγιστο για $x = 100$ την τιμή

$f(100) = 100 \cdot 100 - \frac{1}{2}100^2 = 10000 - 5000 =$ **5000 m²**.

γ. $f'(100) = 100 - 100 = 0$

$f'(101) = 100 - 101 = -1$

$f'(102) = 100 - 102 = -2$

$f'(103) = 100 - 103 = -3$

$f'(104) = 100 - 104 = -4$

$$\bar{x} = \frac{0 + (-1) + (-2) + (-3) + (-4)}{5} = \frac{-10}{5} \Leftrightarrow \mathbf{\bar{x} = -2}$$

δ. Από εφαρμογή σχολικού βιβλίου έχουμε :

$\bar{x}' = \bar{x} + c = -2 + c = c - 2$ και

$s' = s$.

$$CV' = 2CV \Leftrightarrow \frac{s'}{|\bar{x}'|} = 2\frac{s}{|\bar{x}|} \Leftrightarrow \frac{s}{|c-2|} = 2\frac{s}{|-2|} \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{|c-2|} = 1 \Leftrightarrow |c-2| = 1 \Leftrightarrow c - 2 = 1 \text{ ή } c - 2 = -1 \Leftrightarrow$$

c = 3 ή **c = 1**.

Σημείωση : Θα μπορούσε κάποιος να είχε υπολογίσει την τυπική απόκλιση.

$$s^2 = \frac{(0+2)^2 + (-1+2)^2 + (-2+2)^2 + (-3+2)^2 + (-4+2)^2}{5} = \frac{10}{5} = 2$$

$$s = \sqrt{s^2} = \sqrt{2} = s'$$

$$CV' = 2CV \Leftrightarrow \frac{s'}{|\bar{x}'|} = 2\frac{s}{|\bar{x}|} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{|c-2|} = 2\frac{\sqrt{2}}{|-2|} \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{|c-2|} = 1 \Leftrightarrow |c-2| = 1 \Leftrightarrow c - 2 = 1 \text{ ή } c - 2 = -1 \Leftrightarrow$$

c = 3 ή **c = 1**.

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΤΡΙΤΗ 7 ΙΟΥΛΙΟΥ 2009
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
& ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Σχολικό βιβλίο σελίδα 151

Β. α. Σχολικό βιβλίο σελίδα 14

β. Σχολικό βιβλίο σελίδα 85

Γ. α. Σωστό αν $\ell = 0$ ή $\ell = \nu$, Λάθος σε κάθε άλλη περίπτωση,

β. Σωστό, **γ.** Σωστό, **δ.** Λάθος, **ε.** Σωστό.

ΘΕΜΑ 2ο

α. $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1}(\alpha x^3 - 8) = \alpha - 8$

$\lim\limits_{x\to 1} f(x) = -7 \Leftrightarrow \alpha - 8 = -7 \Leftrightarrow \boldsymbol{\alpha = 1}$

β. Για $\alpha = 1$ είναι $f(x) = x^3 - 8$

i. $$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)}{x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x-2}$$
$$= \lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x^2-2x+4)}{x-2}$$
$$= \lim_{x\to 2}(x^2-2x+4)$$
$$= 4+4+4$$
$$= \mathbf{12}$$

ii. $x_0 = 2$

$y_0 = f(2) = 2^3 - 8 = 0$

$f'(x) = (x^3 - 8)' = 3x^2$

$\lambda = f'(2) = 3\cdot 2^2 = 12$

$(\varepsilon) : y - y_0 = \lambda(x - x_0) \Leftrightarrow$

$(\varepsilon) : y - 0 = 12(x - 2) \Leftrightarrow$

$\boldsymbol{(\varepsilon) : y = 12x - 24}$

ΘΕΜΑ 3ο

α. • $\alpha_1 = \frac{v_1}{v}360^0 \Leftrightarrow 50^0 = \frac{v_1}{72}360^0 \Leftrightarrow 50 = 5v_1 \Leftrightarrow \mathbf{v_1 = 10}$

• $\alpha_2 = \frac{v_2}{v}360^0 \Leftrightarrow 30^0 = \frac{v_2}{72}360^0 \Leftrightarrow 30 = 5v_2 \Leftrightarrow \mathbf{v_2 = 6}$

• $v_1 + v_2 + v_3 + v_4 = v$ άρα

$10 + 6 + v_3 + 3v_3 = 72 \Leftrightarrow 4v_3 = 56 \Leftrightarrow$

$\mathbf{v_3 = 14}$ και $\mathbf{v_4 = 42}$

β. • $\alpha_3 = \frac{v_3}{v}360^0 = \frac{14}{72}360^0 \Leftrightarrow \mathbf{\alpha_3 = 70^0}$

• $\alpha_4 = \frac{v_4}{v}360^0 = \frac{42}{72}360^0 \Leftrightarrow \mathbf{\alpha_4 = 210^0}$

γ.

x_i	v_i	N_i	x_iv_i
x_1	10	10	$10x_1$
x_2	6	16	$6x_2$
x_3	14	30	$14x_3$
x_4	42	72	$42x_4$
ΣΥΝΟΛΑ	**72**	**-**	$\mathbf{10x_1 + 6x_2 + 14x_3 + 42x_4}$

• $R = x_4 - x_1$

• $\bar{x} = \frac{\sum x_iv_i}{v} = \frac{10x_1 + 6x_2 + 14x_3 + 42x_4}{72}$

• Από τη στήλη Ni προκύπτει ότι αν γράψουμε τις παρατηρήσεις με αύξουσα σειρά, οι "μεσαίες" παρατηρήσεις (θέσεις $36^η$ και $37^η$) είναι x_4, άρα $\delta = x_4$.

$$10R + 72\bar{x} = 10(x_4 - x_1) + 72\frac{10x_1 + 6x_2 + 14x_3 + 42x_4}{72}$$
$$= 10x_4 - 10x_1 + 10x_1 + 6x_2 + 14x_3 + 42x_4$$
$$= 52x_4 + 6x_2 + 14x_3$$
$$= 52x_4 + 6\cdot(-7) + 14\cdot 3$$
$$= 52x_4 - 42 + 42$$
$$= 52\delta$$

ΘΕΜΑ 4ο

Α.α. $f'(x) = (v^3x + 4x^{-2})' = v^3 - 8x^{-3}$

$$= v^3 - \frac{8}{x^3} = \frac{v^3x^3 - 8}{x^3},\ x \in (0\ ,\ 1).$$

Για $x \in (0\ ,\ 1)$: $f'(x) > 0 \Leftrightarrow \dfrac{v^3x^3 - 8}{x^3} > 0 \Leftrightarrow$

$$v^3x^3 - 8 > 0 \Leftrightarrow v^3x^3 > 8 \Leftrightarrow$$

$$x^3 > \frac{8}{v^3} \Leftrightarrow x^3 > \left(\frac{2}{v}\right)^3 \Leftrightarrow x > \frac{2}{v}$$

x	0	$\frac{2}{v}$	1
f΄(x)	-	○	+
f (x)	↘		↗

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left(\frac{2}{v}\ ,\ 1\right)$, ενώ

είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left(0\ ,\ \frac{2}{v}\right)$.

β. Η f παρουσιάζει ελάχιστο για $x = \frac{2}{v}$ την τιμή

$$f\left(\frac{2}{v}\right) = v^3\frac{2}{v} + \frac{4}{\left(\frac{2}{v}\right)^2} = 2v^2 + \frac{4}{\frac{4}{v^2}} = 2v^2 + v^2 = 3v^2$$

Άρα για κάθε $x \in (0\ ,\ 1)$ είναι :

$$f(x) \geq f\left(\frac{2}{v}\right) \Leftrightarrow$$

$$\mathbf{f(x) \geq 3v^2}$$

Β.α. $*$ Προφανώς $P(A) > 0$

$*$ αν $P(A) = 1$, τότε η $v^3P(A) + \dfrac{4}{P^2(A)} = 3v^2$ γίνεται

$v^3 + 4 = 3v^2 \Leftrightarrow v^3 - 3v^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow v = -1$ ή $v = 2$

Από το δειγματικό χώρο Ω προκύπτει ότι $v \in \mathbb{N}$,

άρα $v = 2$ και $N(A) = -22 \rightarrow$ άτοπο

$*$ αν $0 < P(A) < 1$, τότε $v^3P(A) + \dfrac{4}{P^2(A)} = 3v^2 \Leftrightarrow f\left(P(A)\right) = 3v^2$

- αν $0<P(A)<\dfrac{2}{v} \overset{f\downarrow}{\Rightarrow} f\left(P(A)\right)>f\left(\dfrac{2}{v}\right) \Leftrightarrow f\left(P(A)\right)> 3v^2 \rightarrow$ άτοπο
- αν $\dfrac{2}{v}<P(A)<1 \overset{f\uparrow}{\Rightarrow} f\left(\dfrac{2}{v}\right)<f\left(P(A)\right) \Leftrightarrow f\left(P(A)\right)> 3v^2 \rightarrow$ άτοπο

άρα $P(A) = \dfrac{2}{v} \Leftrightarrow \dfrac{N(A)}{v} = \dfrac{2}{v} \Leftrightarrow N(A) = 2 \Leftrightarrow$

$v^2 - 9v - 8 = 2 \Leftrightarrow v^2 - 9v - 10 = 0 \Leftrightarrow v = 10$ ή $v = -1$

Από το δειγματικό χώρο Ω προκύπτει ότι

το v είναι φυσικός αριθμός άρα $v = 10$

και $P(A) = \dfrac{2}{10} \Leftrightarrow$ $\mathbf{P(A) = \dfrac{1}{5}}$.

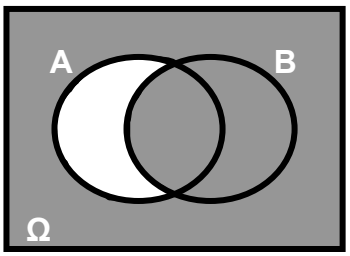
β. *1ος τρόπος*

$$\begin{aligned}
P(A'\cup B) &= P(A') + P(B) - P(A'\cap B)\\
&= 1 - P(A) + P(B) - P(B - A)\\
&= 1 - P(A) + P(B) - [P(B) - P(A\cap B)]\\
&= 1 - P(A) + P(B) - P(B) + P(A\cap B)\\
&= 1 - P(A) + P(A\cap B)\\
&= 1 - \frac{1}{5} + \frac{1}{6} = \mathbf{\frac{29}{30}}
\end{aligned}$$

2ος τρόπος

Από το διάγραμμα Venn προκύπτει ότι $A'\cup B = (A\cap B')'$.

$$\begin{aligned}
P(A'\cup B) &= P((A\cap B')')\\
&= P((A - B)')\\
&= 1 - P(A - B)\\
&= 1 - [P(A) - P(A\cap B)]\\
&= 1 - P(A) + P(A\cap B)\\
&= 1 - \frac{1}{5} + \frac{1}{6} = \mathbf{\frac{29}{30}}
\end{aligned}$$



ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΔΕΥΤΕΡΑ 4 ΙΟΥΛΙΟΥ 2010
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ & ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό βιβλίο σελίδα 30

Α2. Σχολικό βιβλίο σελίδα 13

Α3. Σχολικό βιβλίο σελίδα 139

Α4. α. Λάθος, β. Σωστό, γ. Σωστό, δ. Λάθος, ε. Σωστό.

ΘΕΜΑ Β

Β1.

Κλάσεις	x_i	v_i	f_i	$f_i\%$	x_iv_i
[10 , 12)	11	12	0,2	20	132
[12 , 14)	13	12	0,2	20	156
[14 , 16)	15	24	0,4	40	360
[16 , 18)	17	6	0,1	10	102
[18 , 20)	19	6	0,1	10	114
ΣΥΝΟΛΑ	-	60	1	100	864

Β2. $\bar{x} = \dfrac{\sum x_i v_i}{v} = \dfrac{864}{60} = \mathbf{14,4}$

Β3. $v_1 + v_2 = 12 + 12 =$ **24 μαθητές**

Β4. Θεωρούμε ότι οι παρατηρήσεις είναι ομοιόμορφα κατανεμημένες μέσα στις κλάσεις άρα

$\dfrac{f_1\%}{2} + f_2\% = 5\% + 10\% =$ **15% των μαθητών**

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. $A \cap B = \varnothing$ και $A \cup B = \Omega$, άρα $A = B'$ και $B = A'$

Είναι $A - B = A$ και $B - A = B$, άρα

$P(A - B) = P(A)$ και $P(B - A) = P(B)$

Γ2. $P(A) + P(B) = 1$ άρα

$$\frac{v+1}{v+4} + \frac{v-1}{2v} = 1 \Leftrightarrow v^2 - 3v - 4 = 0 \Leftrightarrow v = -1 \text{ ή } v = 4$$

και επειδή v είναι θετικός ακέραιος θα είναι **$v = 4$**.

Γ3. $P(A) = \dfrac{4+1}{4+4} = \dfrac{\mathbf{5}}{\mathbf{8}}$ και $P(B) = \dfrac{4-1}{2\cdot 4} = \dfrac{\mathbf{3}}{\mathbf{8}}$

Γ4. $P(A' \cup B') = P(B \cup A) = P(\Omega) =$ **1**

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. $f'(t) = \dfrac{1}{300s^2} \cdot 3 \cdot (t - \overline{x})^2 \cdot (t - \overline{x})' = \dfrac{1}{100s^2}(t - \overline{x})^2$

Είναι $f'(t) \geq 0$ και το "=" ισχύει μόνο για $t = \overline{x}$

άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο IR.

Δ2. $f''(t) = \dfrac{1}{100s^2} \cdot 2 \cdot (t - \overline{x}) \cdot (t - \overline{x})' = \dfrac{1}{50s^2}(t - \overline{x})$

t	$-\infty$	$\overline{x}$	$+\infty$
$f''(t)$	-	○	+
$f'(t)$	↘		↗

ελάχιστο

Ο ρυθμός μεταβολής γίνεται ελάχιστος για $t = \overline{x}$.

$f'_{min} = f'(\overline{x}) = \dfrac{1}{100s^2}(\overline{x} - \overline{x})^2 = 0.$

Δ3. $f'(0) = 1 \Leftrightarrow \dfrac{1}{100s^2}\overline{x}^2 = 1 \Leftrightarrow \dfrac{s^2}{\overline{x}^2} = \dfrac{1}{100} \Leftrightarrow$

$CV^2 = \dfrac{1}{100} \Leftrightarrow CV = \dfrac{1}{10}$ ή $CV = 10\%$.

Είναι $CV \leq 10\%$, άρα **το δείγμα είναι ομοιογενές**.

Δ4. $\overline{x}' = \dfrac{f'(t_1) + f'(t_2) + \ldots + f'(t_\nu)}{\nu}$

$$= \frac{\frac{1}{100s^2}(t_1 - \overline{x})^2 + \frac{1}{100s^2}(t_2 - \overline{x})^2 + \ldots + \frac{1}{100s^2}(t_\nu - \overline{x})^2}{\nu}$$

$$= \frac{1}{100s^2} \cdot \frac{(t_1 - \overline{x})^2 + (t_2 - \overline{x})^2 + \ldots + (t_\nu - \overline{x})^2}{\nu}$$

$$= \frac{1}{100s^2} \cdot s^2$$

$$= \frac{1}{100}$$

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΣΑΒΒΑΤΟ 4 ΙΟΥΝΙΟΥ 2011
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ & ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. **Σχολικό βιβλίο σελίδα 151**

Α2. **Σχολικό βιβλίο σελίδα 149**

Α3. **Σχολικό βιβλίο σελίδα 22**

Α4. **α.** **Λάθος,** **β.** **Σωστό,** **γ.** **Σωστό,** **δ.** **Λάθος,** **ε.** **Λάθος.**

ΘΕΜΑ Β

Β1. $\theta'(t) = \left(t - 4\sqrt{t} + \alpha\right)' = 1 - 4\dfrac{1}{2\sqrt{t}} = 1 - \dfrac{2}{\sqrt{t}} = \dfrac{\sqrt{t} - 2}{\sqrt{t}}, \ t \in (0\ ,\ 24]$

- $\theta'(t) < 0 \ \Leftrightarrow\ \dfrac{\sqrt{t} - 2}{\sqrt{t}} < 0 \ \Leftrightarrow\ \sqrt{t} - 2 < 0 \ \Leftrightarrow\ \sqrt{t} < 2 \ \Leftrightarrow\ t < 4$

  άρα η θερμοκρασία μειώνεται για $t \in (0\ ,\ 4]$

- $\theta'(t) > 0 \ \Leftrightarrow\ \dfrac{\sqrt{t} - 2}{\sqrt{t}} > 0 \ \Leftrightarrow\ \sqrt{t} - 2 > 0 \ \Leftrightarrow\ \sqrt{t} > 2 \ \Leftrightarrow\ t > 4$

  άρα η θερμοκρασία αυξάνεται για $t \in (4\ ,\ 24]$

Β2. $\theta_{min} = \theta\,(4) \ \Leftrightarrow\ -1 = \alpha - 4 \ \Leftrightarrow\ \boldsymbol{\alpha = 3}$

Β3. $\theta\,(t) = 0 \ \Leftrightarrow\ t - 4\sqrt{t} + 3 = 0 \overset{\sqrt{t} = x}{\Leftrightarrow} x^2 - 4x + 3 = 0 \ \Leftrightarrow\ x = 1$ ή $x = 3$

- $x = 1 \ \Leftrightarrow\ \sqrt{t} = 1 \ \Leftrightarrow\ t = 1 \ \rightarrow$ 01:00
- $x = 3 \ \Leftrightarrow\ \sqrt{t} = 3 \ \Leftrightarrow\ t = 9 \ \rightarrow$ 09:00

Β4. $$\lim_{t\to 4}\frac{\theta'(t)}{t^2 - 16} = \lim_{t\to 4}\frac{\frac{\sqrt{t} - 2}{\sqrt{t}}}{t^2 - 16} = \lim_{t\to 4}\frac{\sqrt{t} - 2}{\sqrt{t}\cdot(t^2 - 16)} = \lim_{t\to 4}\frac{(\sqrt{t} - 2)(\sqrt{t} + 2)}{\sqrt{t}(t - 4)(t + 4)(\sqrt{t} + 2)}$$

$$= \lim_{t\to 4}\frac{\cancel{t - 4}}{\sqrt{t}\,\cancel{(t - 4)}(t + 4)(\sqrt{t} + 2)} = \lim_{t\to 4}\frac{1}{\sqrt{t}(t + 4)(\sqrt{t} + 2)} = \boldsymbol{\frac{1}{64}}$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. $\sum f_i\% = 100\% \Leftrightarrow x + x + 20 + 2x + x^2 - 6x = 100 \Leftrightarrow$

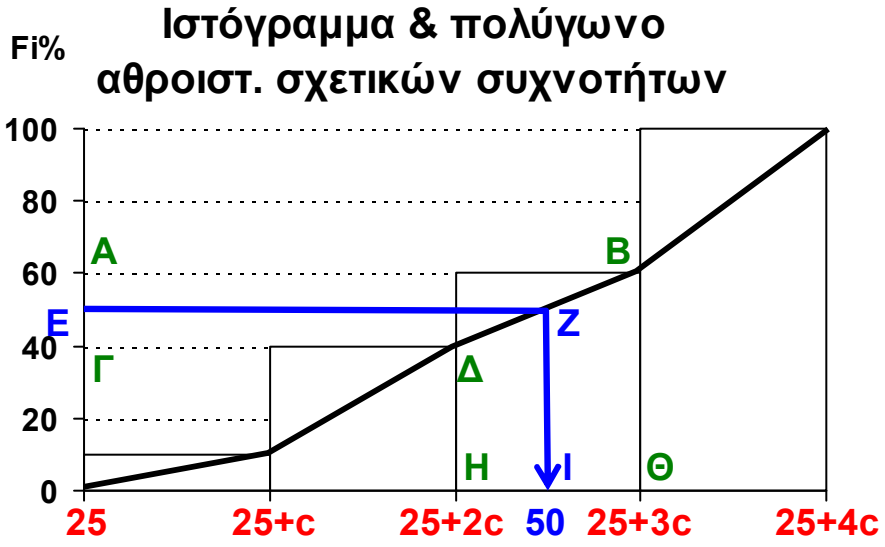
$x^2 - 2x - 80 = 0 \Leftrightarrow$ $\mathbf{x = 10}$ ή $x = -8$ (απορρίπτεται)

$\mathbf{f_1\% = 10\%}$, $\mathbf{f_2\% = 30\%}$, $\mathbf{f_3\% = 20\%}$ και $\mathbf{f_4\% = 40\%}$.

Γ2.

Κλάσεις	$f_i\%$	$F_i\%$
[25 , 25+c)	10	10
[25+c , 25+2c)	30	40
[25+2c , 25+3c)	20	60
[25+3c , 25+4c)	40	100
ΣΥΝΟΛΑ	100	-

Κατασκευάζουμε ιστόγραμμα και πολύγωνο αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων



Το Ε είναι το μέσο του ΑΓ και η ΕΖ είναι μεσοπαράλληλη των ΑΒ και ΓΔ, άρα το Ζ είναι το μέσο του ΔΒ και η ΖΙ είναι μεσοπαράλληλη των ΔΗ και ΒΔ, άρα το Ι είναι μέσο του ΗΘ.

$$\frac{(25 + 2c) + (25 + 3c)}{2} = 50 \Leftrightarrow \frac{25 + 2c + 25 + 3c}{2} = 50 \Leftrightarrow$$

$50 + 5c = 100 \Leftrightarrow 5c = 50 \Leftrightarrow$ $\mathbf{c = 10}$

Γ3.

Κλάσεις	x_i	v_i	f_i%	N_i	F_i%	$x_i\ v_i$
[25 , 35)	30	5	10	5	10	150
[35 , 45)	40	15	30	20	40	600
[45, 55)	50	10	20	30	60	500
[55 , 65)	60	20	40	50	100	1200
ΣΥΝΟΛΑ	-	50	100	-	-	2450

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i v_i}{v} = \frac{2450}{50} = 49$$

Η μέση τιμή των ηλικιών είναι 49 χρόνια.

Γ4. Έστω ότι προσλαμβάνονται x άτομα που ανήκουν στην $1^η$ κλάση
Ο πίνακας τότε διαμορφώνεται ως εξής:

Κλάσεις	x_i	v_i	$x_i\ v_i$
[25 , 35)	30	5 + x	150 + 30x
[35 , 45)	40	15	600
[45, 55)	50	10	500
[55 , 65)	60	20	1200
ΣΥΝΟΛΑ	-	50 + x	2450 + 30x

$$\bar{x}' = \frac{\sum x_i v_i'}{v'} \Leftrightarrow 40 = \frac{2450 + 30x}{50 + x} \Leftrightarrow$$

$$40(50 + x) = 2450 + 30x \Leftrightarrow$$

$$2000 + 40x = 2450 + 30x \Leftrightarrow$$

$$40x - 30x = 2450 - 2000 \Leftrightarrow$$

$$10x = 450 \Leftrightarrow x = 45$$

Άρα για να γίνει η μέση ηλικία 40 χρόνια, **πρέπει να προσληφθούν 45 άτομα που ανήκουν στην πρώτη κλάση.**

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. • $P((A - B)\cup(B - A)) = \dfrac{\lambda + 1}{3\lambda}$

• $P((A\cap B)') = \dfrac{3\lambda - 1}{3\lambda} \Leftrightarrow P(A\cap B) = 1 - \dfrac{3\lambda - 1}{3\lambda} = \dfrac{1}{3\lambda}$

• $P((A\cup B)') = \dfrac{1}{\lambda - 2} \Leftrightarrow P(A\cup B) = 1 - \dfrac{1}{\lambda - 2} = \dfrac{\lambda - 3}{\lambda - 2}$

• $P((A - B)\cup(B - A)) = P(A - B) + P(B - A) \Leftrightarrow$

$P((A - B)\cup(B - A)) = P(A) - P(A\cap B) + P(B) - P(A\cap B) \Leftrightarrow$

$P((A - B)\cup(B - A)) = P(A\cup B) - P(A\cap B) \Rightarrow$

$\dfrac{\lambda + 1}{3\lambda} = \dfrac{\lambda - 3}{\lambda - 2} - \dfrac{1}{3\lambda} \Leftrightarrow \dfrac{\lambda + 2}{3\lambda} = \dfrac{\lambda - 3}{\lambda - 2} \Leftrightarrow$

$3\lambda^2 - 9\lambda = \lambda^2 - 4 \Leftrightarrow 2\lambda^2 - 9\lambda + 4 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 4$ ή $\lambda = \dfrac{1}{2}$

Για $\lambda = \dfrac{1}{2}$, είναι $P((A\cup B)') < 0 \rightarrow$ άτοπο

Άρα $\boldsymbol{\lambda = 4}$.

Δ2. α. Για $\lambda = 4$, είναι $P(A\cup B) = \dfrac{1}{2}$ και $P(A\cap B) = \dfrac{1}{12}$

• $N(A) = N(B) - 50$ **(1)**

• $P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B) \Rightarrow \dfrac{1}{2} = \dfrac{N(A)}{600} + \dfrac{N(B)}{600} - \dfrac{1}{12} \overset{\cdot 600}{\Leftrightarrow}$

$300 = N(A) + N(B) - 50 \overset{(1)}{\Leftrightarrow} 300 = N(B) - 50 + N(B) - 50 \Leftrightarrow$

$2N(B) = 400 \Leftrightarrow N(B) = 200$ και $P(B) = \dfrac{200}{600} = \dfrac{1}{3}$

• $(1) \overset{N(B) = 200}{\Rightarrow} N(A) = 150$ και $P(A) = \dfrac{150}{600} = \dfrac{1}{4}$

- $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) = \frac{1}{4} - \frac{1}{12} = \frac{1}{6} \Leftrightarrow \frac{N(A - B)}{600} = \frac{1}{6} \Leftrightarrow$

  $N(A-B) = 100$, άρα

  100 κρίθηκαν κατάλληλοι μόνο από την εταιρεία Α

- $P(B - A) = P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{3} - \frac{1}{12} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{N(B - A)}{600} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow$

  $N(B - A) = 150$, άρα

  150 κρίθηκαν κατάλληλοι μόνο από την εταιρεία Β

- $P(A \cap B) = \frac{1}{12} \Leftrightarrow \frac{N(A \cap B)}{600} = \frac{1}{12} \Leftrightarrow N(A \cap B) = 50$, άρα

  50 κρίθηκαν κατάλληλοι και από τις δύο εταιρείες και θα βρεθούν στο δίλημμα να επιλέξουν σε ποιά από τις δύο εταιρίες επιθυμούν να προσληφθούν

β. $P(A \cup B) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{N(A \cup B)}{600} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow N(A \cup B) = 300$, άρα

300 κρίθηκαν κατάλληλοι να προσληφθούν από τις εταιρείες Α ή Β

Δ3. $P(A \cup B) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow P((A \cup B)') = \frac{1}{2} \Leftrightarrow N((A \cup B)') = 300$,

άρα 300 απόφοιτοι κρίθηκαν ακατάλληλοι από τις εταιρείες Α και Β.

Γ : Ο απόφοιτος που κρίθηκε ακατάλληλος βρίσκει εργασία

$P(Γ) = 2 \cdot P(Γ') \Leftrightarrow P(Γ) = 2 \cdot [1 - P(Γ)] \Leftrightarrow$

$P(Γ) = 2 - 2P(Γ) \Leftrightarrow 3P(Γ) = 2 \Leftrightarrow P(Γ) = \frac{2}{3} \Leftrightarrow$

$\frac{N(Γ)}{N((A \cup B)')} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{N(Γ)}{300} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow N(Γ) = 200$, άρα

200 από αυτούς που κρίθηκαν ακατάλληλοι και από τις δύο εταιρείες θα βρουν εργασία.

Παρατήρηση : Έπρεπε να δοθεί ότι όλοι όσοι παρακολούθησαν το πρόγραμμα θα βρουν εργασία και όσοι δεν παρακολουθήσουν το πρόγραμμα δεν θα βρουν.

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΤΡΙΤΗ 12 ΙΟΥΝΙΟΥ 2012
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ & ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό βιβλίο σελίδα 28

Α2. Σχολικό βιβλίο σελίδα 85

Α3. Σχολικό βιβλίο σελίδα 14

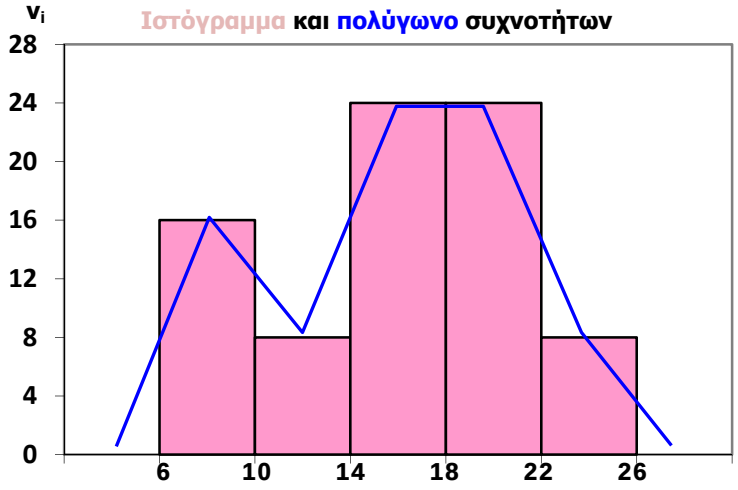
Α4. α. Σωστό, β. Λάθος, γ. Σωστό, δ. Λάθος, ε. Σωστό.

ΘΕΜΑ Β

Β1.

Κλάσεις	x_i	v_i	f_i	N_i	F_i
[6 , 10)	8	16	0,2	16	0,2
[10 , 14)	12	8	0,1	24	0,3
[14 , 18)	16	24	0,3	48	0,6
[18 , 22)	20	24	0,3	72	0,9
[22 , 26)	24	8	0,1	80	1
ΣΥΝΟΛΑ	-	80	1	-	-

Β2.



Β3.

Κλάσεις	x_i	v_i	$x_i\, v_i$	$x_i-\bar{x}$	$(x_i-\bar{x})^2$	$(x_i-\bar{x})^2 v_i$
[6 , 10)	8	16	128	-8	64	1024
[10 , 14)	12	8	96	-4	16	128
[14 , 18)	16	24	384	0	0	0
[18 , 22)	20	24	480	4	16	384
[22 , 26)	24	8	192	8	64	512
ΣΥΝΟΛΑ	-	80	1280	-	-	2048

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i v_i}{v} = \frac{1280}{80} = 16$$

$$s^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2 v_i}{v} = \frac{2048}{80} = 25{,}6$$

$$s = \sqrt{s^2} = \sqrt{25{,}6} \cong 5{,}06$$

Β4. Στην κλάση [10 , 14) έχουμε :

Σε πλάτος 4 (14 – 10) αντιστοιχεί το 10% των υπαλλήλων

Σε πλάτος 2 (14 – 12) αντιστοιχεί το x% των υπαλλήλων

$4x = 2 \cdot 10 \Leftrightarrow$ **x = 5% των υπαλλήλων**

Στην κλάση [14 , 18) αντιστοιχεί το 30% των υπαλλήλων

Στην κλάση [18 , 22) αντιστοιχεί το 30% των υπαλλήλων

Στην κλάση [22 , 26) έχουμε :

Σε πλάτος 4 (26 – 22) αντιστοιχεί το 10% των υπαλλήλων

Σε πλάτος 3 (25 – 22) αντιστοιχεί το y% των υπαλλήλων

$4y = 3 \cdot 10 \Leftrightarrow$ **y = 7,5% των υπαλλήλων**

Επομένως **το ποσοστό των υπαλλήλων που πήραν άδεια από 12 μέχρι 25 μέρες είναι** : 5% + 30% + 30% + 7,5% = **72,5%**

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. • $26\alpha^2 - 10\alpha - 2\alpha\beta + \beta^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow$

$25\alpha^2 - 10\alpha + 1 + \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 = 0 \Leftrightarrow$

$(5\alpha - 1)^2 + (\alpha - \beta)^2 = 0 \Leftrightarrow 5\alpha - 1 = 0$ και $\alpha - \beta = 0 \Leftrightarrow$

$\boldsymbol{\alpha = \beta = \frac{1}{5}}$

• $P(A) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow P(\omega_1) + P(\omega_2) + P(\omega_3) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$

$\alpha + \beta + \gamma = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \gamma = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \boldsymbol{\gamma = \frac{1}{10}}$

Γ2. $g(x) = P(\omega_4)\cdot x^3$

$g'(x) = 3\cdot P(\omega_4)\cdot x^2$

• Η εφαπτομένη της Cg στο σημείο (1 , g (1)) είναι παράλληλη στην ευθεία $y = x$ άρα $g'(1) = 1 \Leftrightarrow$

$3\cdot P(\omega_4) = 1 \Leftrightarrow \boldsymbol{P(\omega_4) = \frac{1}{3}}$

• $P(\omega_1) + P(\omega_2) + P(\omega_3) + P(\omega_4) + P(\omega_5) = 1 \Leftrightarrow$

$\frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{10} + \frac{1}{3} + P(\omega_5) = 1 \Leftrightarrow \frac{5}{6} + P(\omega_5) = 1 \Leftrightarrow$

$P(\omega_5) = 1 - \frac{5}{6} \Leftrightarrow \boldsymbol{P(\omega_5) = \frac{1}{6}}$

Γ3. • $K = (A - B)\cup(B - A) = \{\omega_1, \omega_2, \omega_4, \omega_5\}$

άρα $P(K) = 1 - P(\omega_3) = 1 - \frac{1}{10} = \boldsymbol{\frac{9}{10}}$

• $\Lambda = A\cup B' = A$, άρα $P(\Lambda) = P(A) = \boldsymbol{\frac{1}{2}}$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Οι διαστάσεις του ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου είναι :

$\alpha = 6 - 2x$, $\beta = 6 - 2x$ και $\gamma = x$

Επομένως ο όγκος της δεξαμενής είναι :

$$f(x) = (6 - 2x)\cdot(6 - 2x)\cdot x$$
$$= 2(3 - x)\cdot 2(3 - x)\cdot x$$
$$= 4x(3 - x)^2,\ 0 < x < 3$$

Δ2. $f'(x) = \left[4x\cdot(3 - x)^2\right]' = (4x)'\cdot(3 - x)^2 + 4x\cdot\left[(3 - x)^2\right]'$

$$= 4\cdot(3 - x)^2 + 4x\cdot 2(3 - x)\cdot(3 - x)' = 4\cdot(3 - x)^2 - 8x\cdot(3 - x)$$
$$= 4\cdot(3 - x)\cdot(3 - x - 2x) = 12\cdot(3 - x)\cdot(1 - x)$$

x	0	1	3
f΄(x)	+	○	-
f (x)	↗		↘

Η δεξαμενή έχει μέγιστο όγκο όταν x = 1 m.

Δ3. $$\lim_{x\to 0}\frac{f(x + 2) - 8}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{4(x + 2)\cdot[3 - (x + 2)]^2 - 8}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{4(x + 2)\cdot(1 - x)^2 - 8}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{(4x + 8)\cdot(1 - 2x + x^2) - 8}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{4x \cancel{- 8x^2} + 4x^3 \cancel{+ 8} - 16x \cancel{+ 8x^2} \cancel{- 8}}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\cancel{x}(4x^2 - 12)}{\cancel{x}} = \lim_{x\to 0}(4x^2 - 12) = \mathbf{-12}$$

Δ4. $1 = x_1 < x_2 < x_3 < x_4 < x_5 = 2 \overset{f \downarrow \text{ στο } [1\,,\,3]}{\Rightarrow}$

$f(1) = f(x_1) > f(x_2) > f(x_3) > f(x_4) > f(x_5) = f(2) \Leftrightarrow$

$16 = y_1 > y_2 > y_3 > y_4 > y_5 = 8$

$R = y_1 - y_5 = 16 - 8 \Rightarrow$ $\mathbf{R = 8}$

$CV_y = \dfrac{s_y}{\bar{y}} = \dfrac{2}{12} = \dfrac{1}{6}$

Από εφαρμογή σχολικού βιβλίου όταν σε όλες τις τιμές μιας μεταβλητής y_i προσθέσουμε μια σταθερά α, τότε οι νέες τιμές ω_i που προκύπτουν, έχουν:

- $\bar{\omega} = \bar{y} + \alpha = 12 + \alpha > 0$
- $s_\omega = s_y = 2$ και

Επομένως $CV = \dfrac{s_\omega}{\bar{\omega}} = \dfrac{2}{12 + \alpha}$.

Είναι $CV = 2CV_y + \dfrac{R}{12} \Leftrightarrow \dfrac{2}{12 + \alpha} = 2 \cdot \dfrac{1}{6} + \dfrac{8}{12} \Leftrightarrow$

$\dfrac{2}{12 + \alpha} = 1 \Leftrightarrow 12 + \alpha = 2 \Leftrightarrow$ $\boldsymbol{\alpha = -10}$

Δ5. $\varnothing \neq A \subseteq B \Rightarrow 0 < P(A) \leq P(B) \leq 1 \overset{f \uparrow \text{ στο } [0\,,\,1]}{\Rightarrow}$

$f\big(P(A)\big) \leq f\big(P(B)\big) \Leftrightarrow$

$\cancel{4} \cdot P(A) \cdot [3 - P(A)]^2 \leq \cancel{4} \cdot P(B) \cdot [3 - P(B)]^2$

και επειδή $P(B) > 0$ και $[3 - P(B)]^2 > 0$, έχουμε

$\dfrac{P(A)}{P(B)} \leq \dfrac{[3 - P(B)]^2}{[3 - P(A)]^2} \Leftrightarrow$ $\boldsymbol{\dfrac{P(A)}{P(B)} \leq \left(\dfrac{3 - P(B)}{3 - P(A)}\right)^2}$

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΔΕΥΤΕΡΑ 10 ΙΟΥΝΙΟΥ 2013

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ & ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό βιβλίο σελίδα 151

Α2. Σχολικό βιβλίο σελίδα 92

Α3. Σχολικό βιβλίο σελίδα 22

Α4. **α.** Σωστό, **β.** Σωστό, **γ.** Σωστό*, **δ.** Λάθος, **ε.** Λάθος.

***έπρεπε να δίνεται ότι η μεταβλητή είναι ποσοτική διακριτή**

ΘΕΜΑ Β

Β1. $f'(x) = \left[2e^x(2x-3)\right]' = 2e^x(2x-3) + 4e^x = 2e^x(2x-1)$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2e^x(2x-1) \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘		↗	

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right]$, ενώ είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$. Η f παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_1 = \frac{1}{2}$ την τιμή $f(x_1) = f\left(\frac{1}{2}\right) = 2e^{\frac{1}{2}}\left(2\cdot\frac{1}{2} - 3\right) = 2\sqrt{e}(-2) = -4\sqrt{e}$

B2. $P(A) = x_1 = \frac{1}{2}$

$P(B) = -\frac{f(x_1)}{6\sqrt{e}} = -\frac{-4\sqrt{e}}{6\sqrt{e}} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

B3. Έστω ότι A, B είναι ασυμβίβαστα

Ισχύει ο απλός προσθετικός νόμος

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{7}{6} > 0 \rightarrow$ ΑΤΟΠΟ

Άρα **τα A, B δεν είναι ασυμβίβαστα**.

B4. $A' - B' = A' \cap (B')' = A' \cap B = B \cap A' = B - A$

- $B - A \subseteq B \Rightarrow P(B - A) \leq P(B) \Leftrightarrow P(A' - B') \leq \frac{2}{3}$ **(1)**

  ή $A' - B' \subseteq A' \Rightarrow P(A' - B') \leq P(A') \Leftrightarrow P(A' - B') \leq \frac{1}{2} < \frac{2}{3}$ **(1)**

- Θα δείξουμε ότι $\frac{1}{6} \leq P(A' - B') \Leftrightarrow \frac{1}{6} \leq P(B - A) \Leftrightarrow$

  $\frac{1}{6} \leq P(B) - P(A \cap B) \Leftrightarrow \frac{1}{6} \leq \frac{2}{3} - P(A \cap B) \Leftrightarrow$

  $P(A \cap B) \leq \frac{2}{3} - \frac{1}{6} \Leftrightarrow P(A \cap B) \leq \frac{1}{2}$ που ισχύει διότι

  $A \cap B \subseteq A \Rightarrow P(A \cap B) \leq P(A) \Leftrightarrow P(A \cap B) \leq \frac{1}{2}$

  άρα $\frac{1}{6} \leq P(A' - B')$ **(2)**

Από (1) και (2) : $\mathbf{\frac{1}{6} \leq P(A' - B') \leq \frac{2}{3}}$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. $F_5 = 1$ και $F_5\% = 100$

Από τύπους Vieta έχουμε :

$$\begin{cases} F_3 + F_5 = \dfrac{8}{5} \\ F_3 \cdot F_5 = \dfrac{3\kappa}{5} \end{cases} \overset{F_5 = 1}{\Leftrightarrow} \begin{cases} F_3 + 1 = \dfrac{8}{5} \\ F_3 = \dfrac{3\kappa}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} F_3 = \dfrac{3}{5} \\ \dfrac{3}{5} = \dfrac{3\kappa}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} F_3 = \dfrac{3}{5} \\ \kappa = 1 \end{cases}$$

$F_5\% = 100 \Leftrightarrow \kappa\lambda^2 - 3\lambda + 30 = 100 \overset{\kappa = 1}{\Leftrightarrow} \lambda^2 - 3\lambda - 70 = 0$

$\Delta = 289$ και $\lambda = 10$ ή $\lambda = -7$

Όμως $F_1\% = \lambda \geq 0$, άρα $\lambda = 10$

Γ2. $f_1\% = F_1\% = \lambda = \mathbf{10}$

$F_2\% = 3\lambda + 10 = 40$

$f_2\% = F_2\% - F_1\% = 40 - 10 = \mathbf{30}$

$F_3\% = 100 \cdot F_3 = 60$

$f_3\% = F_3\% - F_2\% = 60 - 40 = \mathbf{20}$

$F_4\% = \kappa\lambda^2 - 2\lambda + 10 = 90$

$f_4\% = F_4\% - F_3\% = 90 - 60 = \mathbf{30}$

$f_5\% = F_5\% - F_4\% = 100 - 90 = \mathbf{10}$

Γ3. • $25\% = f_1\% + \dfrac{f_2\%}{2} \Rightarrow x_2 = 16$ **(1)**

• $25\% = \dfrac{f_4\%}{2} + f_5\% \Rightarrow x_4 = 24$ **(2)**

• $x_4 - x_2 = 2c \underset{(2)}{\overset{(1)}{\Leftrightarrow}} 2c = 8 \Leftrightarrow c = 4$

$1^{η}$ κλάση : $[\alpha , \alpha + 4)$, $2^{η}$ κλάση : $[\alpha + 4 , \alpha + 8)$

$x_2 = \dfrac{\alpha + 4 + \alpha + 8}{2} \Leftrightarrow 16 = \dfrac{2\alpha + 12}{2} \Leftrightarrow$

$2\alpha + 12 = 32 \Leftrightarrow 2\alpha = 20 \Leftrightarrow \alpha = 10$

Κλάσεις	Κεντρικές τιμές x_i	f_i%	F_i	F_i%
[10 , 14)	12	10	0,1	10
[14 , 18)	16	30	0,4	40
[18 , 22)	20	20	0,6	60
[22 , 26)	24	30	0,9	90
[26 , 30)	28	10	1	100
ΣΥΝΟΛΑ	-	100	-	-

Γ4. Το 40% (f_4% + f_5%) των παρατηρήσεων είναι μεγαλύτερες ή ίσες του 22.

Στο 40% των παρατηρήσεων αντιστοιχούν 800 παρατηρήσεις

Στο 100% των παρατηρήσεων αντιστοιχούν ν παρατηρήσεις

$40v = 800 \cdot 100 \Leftrightarrow 40v = 80000 \Leftrightarrow$ **v = 2000**

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.α. • $P(\omega_1) = P(-1) = f(-1) - \frac{1}{3} = -\frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$

• $P(\omega_2) = P(0) = f(0) - \frac{1}{3} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

• $f'(x) = \left(\frac{x}{x^2+1}+1\right)' = \frac{(x^2+1) - x\cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{-(x-1)(x+1)}{(x^2+1)^2}$

$$\lim_{x\to 1}\frac{f'(x)}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{\frac{-\cancel{(x-1)}(x+1)}{(x^2+1)^2}}{\cancel{x-1}} = \lim_{x\to 1}\frac{-(x+1)}{(x^2+1)^2} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$$

$$P(\omega_3) = -\frac{1}{6}\cdot\lim_{x\to 1}\frac{f'(x)}{x-1} = -\frac{1}{6}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{12}$$

• $P(\omega_4) = 1 - P(\omega_1) - P(\omega_2) - P(\omega_3) = 1 - \frac{1}{6} - \frac{2}{3} - \frac{1}{12} = \frac{1}{12}$

Δ1.β. • $f'(\omega) \le 0 \Leftrightarrow \dfrac{1-\omega^2}{(\omega^2+1)^2} \le 0 \overset{\omega^2+1>0}{\Leftrightarrow} 1-\omega^2 \le 0 \Leftrightarrow$

$\omega^2 \ge 1 \Leftrightarrow |\omega| \ge 1 \Leftrightarrow \omega \ge 1$ ή $\omega \le -1$

Άρα $A = \{-1, \omega_3, \omega_4\}$

και $P(A) = P(-1) + P(\omega_3) + P(\omega_4) = \dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{12} + \dfrac{1}{12} = \dfrac{1}{3}$

• $f(\omega) > 1 \Leftrightarrow \dfrac{\omega}{\omega^2+1} + 1 > 1 \Leftrightarrow \dfrac{\omega}{\omega^2+1} > 0 \overset{\omega^2+1>0}{\Leftrightarrow} \omega > 0$

Άρα $B = \{\omega_3, \omega_4\}$

και $P(B) = P(\omega_3) + P(\omega_4) = \dfrac{1}{12} + \dfrac{1}{12} = \dfrac{1}{6}$

• $x^2 + \omega x \ge -\dfrac{1}{4}$, για κάθε $x \in IR \Leftrightarrow x^2 + \omega x + \dfrac{1}{4} \ge 0$, για κάθε $x \in IR$

Πρέπει $\Delta \le 0 \Leftrightarrow \omega^2 - 1 \le 0 \Leftrightarrow \omega^2 \le 1 \Leftrightarrow |\omega| \le 1 \Leftrightarrow -1 \le \omega \le 1$

Άρα $\Gamma = \{-1, 0\}$

και $P(\Gamma) = P(-1) + P(0) = \dfrac{1}{6} + \dfrac{2}{3} = \dfrac{5}{6}$

• $A - B = \{-1\}$ και $P(A - B) = P(-1) = \dfrac{1}{6}$

Δ2. • $f'(x_0) = \varepsilon\varphi 45^0 = 1 \Rightarrow \dfrac{1-x_0^2}{(x_0^2+1)^2} = 1 \Leftrightarrow$

$(x_0^2+1)^2 = 1 - x_0^2 \Leftrightarrow x_0^4 + 2x_0^2 + \cancel{1} = \cancel{1} - x_0^2 \Leftrightarrow$

$x_0^4 + 3x_0^2 = 0 \Leftrightarrow x_0^2(x_0^2+3) = 0 \overset{x_0^2+3\neq 0}{\Leftrightarrow} x_0^2 = 0 \Leftrightarrow x_0 = 0$

$f(0) = 1$ και $f'(0) = 1$, άρα

$(\varepsilon): y - f(0) = f'(0)\cdot(x-0) \Leftrightarrow y - 1 = x \Leftrightarrow$ **$y = x + 1$**

Δ3. $\omega_i = -1 , 0 , \omega_3 , \omega_4$

- $M_1 \in \varepsilon \Leftrightarrow y_1 = \omega_1 + 1 = -1 + 1 = 0$
- $M_2 \in \varepsilon \Leftrightarrow y_2 = \omega_2 + 1 = 0 + 1 = 1$
- $M_3 \in \varepsilon \Leftrightarrow y_3 = \omega_3 + 1$
- $M_4 \in \varepsilon \Leftrightarrow y_4 = \omega_4 + 1$

Είναι $1 < \omega_3 < \omega_4$, άρα $y_1 < y_2 < y_3 < y_4$

$R_y = y_4 - y_1 \Leftrightarrow 5 = (\omega_4 + 1) - 0 \Leftrightarrow 5 = \omega_4 + 1 \Leftrightarrow$ **$\omega_4 = 4$**

- $\delta_{\omega_\kappa} = \dfrac{0 + \omega_3}{2} = \dfrac{\omega_3}{2}$
- $\delta_{y_\kappa} = \dfrac{1 + \omega_3 + 1}{2} = \dfrac{2 + \omega_3}{2}$

Είναι $2\delta_{\omega_\kappa} = \delta_{y_\kappa} \Leftrightarrow$

$2\dfrac{\omega_3}{2} = \dfrac{2 + \omega_3}{2} \overset{(\cdot 2)}{\Leftrightarrow}$

$2\omega_3 = 2 + \omega_3 \Leftrightarrow$

$\omega_3 = 2$

Γενικό Λύκειο Νεστορίου
Σχολικό έτος 2013-2014
Βοηθητικό Υλικό της Γ΄ Λυκείου