ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ ΛΥΚΕΙΟΥ **ΜΙΑ ΣΥΛΛΟΓΗ 50 ΑΣΚΗΣΕΩΝ**

ΘΕΤΙΚΗΣ - ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ **ΣΕ ΔΙΑΦΟΡΙΚΟ ΛΟΓΙΣΜΟ**

Α' ΕΚΔΟΣΗ:31/01/2012

ΑΣΚΗΣΗ 71 (από Περικλή Παντούλα)

Η συνάρτηση f είναι ορισμένη στο R, συνεχής στο σημείο x_0 και ισχύει $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f\left(x_0-2h\right)}{h}=m\in R$.

Να αποδείξετε ότι ισχύει $f'(x_0)=-\dfrac{m}{2}$

ΑΣΚΗΣΗ 72 (από Δημήτρη Κατσίποδα)

Η συνάρτηση $f:R\to R$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και ισχύουν οι σχέσεις

$$\bullet f(2)=2 \qquad \bullet \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{\eta\mu 3x}=3 \qquad \bullet f''(x)\neq 0 \text{ για κάθε } x\in(0,2)$$

α. Να δείξετε ότι $f(0)=0$

β. Να αποδείξετε ότι $f'(0)=9$

γ. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(0,f(0))$

δ. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f'(x)=0$ δεν μπορεί να έχει δύο διαφορετικές ρίζες στο διάστημα $(0,2)$

ε. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(0,2)$ τέτοιο ώστε $f(\xi)=2-\xi$

στ. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $x_1,x_2\in(0,2)$ τέτοια ώστε $f'(x_1)\cdot f'(x_2)=1$

Πηγή: Ι.Γαρατζιώτης - Π. Μάστακας (εκδόσεις Κέδρος)

ΑΣΚΗΣΗ 73 (από Περικλή Παντούλα)

Έστω η συνάρτηση $f\left(x\right)=\left(\dfrac{x^3}{6}+\dfrac{x^2}{2}+x+1\right)e^{-x},\ x\in R$.

α. Να μελετηθεί η συνάρτηση ως προς την μονοτονία, τα ακρότατα, τα κοίλα και τα σημεία καμπής.

β. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f

γ. Να δείξετε ότι $e^x\geq\dfrac{x^3}{6}+\dfrac{x^2}{2}+x+1,\ x\in R$

δ. Έστω η συνάρτηση $g:R\to R$ ώστε $\lim\limits_{x\to 0}\left(e^{g(x)}-g\left(x\right)-\dfrac{g^3\left(x\right)}{6}\right)=1$. Να δείξετε ότι $\lim\limits_{x\to 0}g\left(x\right)=0$

Πηγή: Γ.Μπαϊλάκης (εκδόσεις Σαββάλας)

ΑΣΚΗΣΗ 74 (από pito)

Έστω f τρεις φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση στο R τέτοια ώστε να ισχύει $f(x)\le \dfrac{f(a)+f(\beta)}{2}$ για κάθε x πραγματικό.

α. Να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_1 \in (a,\beta)$ τέτοιο ώστε $f'(x_1)=0$

β. Να δείξετε ότι $f'(a)=f'(\beta)=0$

γ. Να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (a,\beta)$ τέτοιο ώστε $f'''(\xi)=0$.

Πηγή: <u>Ε.Τσακουμάγκος – Α.Μπαλωμένου (εκδόσεις Ελληνοεκδοτική)</u>

ΑΣΚΗΣΗ 75 (από Δημήτρη Κατσίποδα)

Έστω συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο R με $f^3(x)+3f(x)=x$ για κάθε $x\in R$.

α. Να μελετηθεί η μονοτονία της f

β. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να ορίσετε την f^{-1}

γ. Να βρεθεί το πρόσημο της f

δ. Να αποδείξετε ότι η f έχει ένα μόνο σημείο καμπής, το οποίο και να προσδιορίσετε

ε. Αν $0<\alpha<\beta$, να αποδείξετε ότι $\dfrac{f(\alpha)}{\alpha}>\dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$

στ. i. Να βρεθεί η μονοτονία της $g(x)=f(x)-x$

ii. Να λυθεί η ανίσωση $f(x^2-x)+x<x^2$

Πηγή: <u>Κ.Ρεκούμης - Κ.Λαγός (εκδόσεις Μεταίχμιο)</u>

ΑΣΚΗΣΗ 76 (από pito)

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to R$ με την ιδιότητα $e^y f'(x)-2xe^y = f'(\dfrac{x}{e^y})-\dfrac{2x}{e^y}$ για κάθε $x>0$ και y πραγματικό καθώς και $f'(1)=-6,\ f(1)=3$.

α. Να βρείτε την $f'(x)$ για $x>0$.

β. Να βρείτε την $f(x)$ στο $(0,+\infty)$.

γ. Να βρείτε το ελάχιστο της f.

δ. Να δείξετε ότι η f είναι κυρτή στο $(0,+\infty)$ και να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(1,f(1))$.

ε. Αν για τους θετικούς $a,\beta,\gamma\in R$ ισχύει $a\beta\gamma=1$ και $a+\beta+\gamma=\dfrac{10}{3}$, να δείξετε ότι $a^2+\beta^2+\gamma^2>1$.

Πηγή: <u>Χ. Πατήλας (εκδόσεις Ελληνοεκδοτική)</u>

ΑΣΚΗΣΗ 77 (από Βασίλη Κακαβά)

Έστω συνάρτηση $f:[0,+\infty)\to R$ που είναι συνεχής και γνήσια αύξουσα, για την οποία ισχύει ότι

$$f(x)+f(f(x))=2x \text{ για κάθε } x\in[0,+\infty)$$

α. Να δείξετε ότι $f(x)\geq 0$ για $x\in[0,+\infty)$ και ότι $f(0)=0$.

β. Να δείξετε ότι η εξίσωση $\dfrac{e^{f(x)}}{f(x)}+\dfrac{f(x)}{f(x)-1}=0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(0,1)$.

γ. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=1$ να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της f στο σημείο της $A(1,f(1))$.

ΑΣΚΗΣΗ 78 (από Περικλή Παντούλα)

Έστω οι συναρτήσεις $f,g:(0,+\infty)\to R$, όπου η f είναι παραγωγίσιμη, με $f(1)=-1$ και $f(e)=0$, ώστε να ισχύει $e^{f'(x)}=x+ce^{g(x)}$, για κάθε $x>0$ όπου $c\in R$

α. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $\phi(x)=f(x)+x-x\ln x$ ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[1,e]$

β. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ξ, ώστε $f'(\xi)=\ln\xi$

γ. Να βρείτε την σταθερά c

δ. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f

Πηγή: Γ.Μπαϊλάκης (εκδόσεις Σαββάλας)

ΑΣΚΗΣΗ 79 (από Δημήτρη Κατσίποδα)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=xe^{\frac{1}{x}}, x\in R^*$

α. Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα

β. Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα

γ. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f

δ. Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $e^{\frac{1}{x}}=\dfrac{\alpha}{x}$, για τις διάφορες τιμές του $\alpha\in R$

ε. Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to 0}\left(f\left(\dfrac{1}{x}\right)-\dfrac{\ln(x+1)}{x^2}\right)$

Πηγή: Α.Μπάρλας (εκδόσεις Ελληνοεκδοτική)

ΑΣΚΗΣΗ 80 (από Γιάννη Σταματογιάννη)

Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο R με $f(0)=0$ και ικανοποιεί τη συνθήκη

$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+3h)-f(x_0-2h)}{h}=-10x_0e^{f(x_0)}$ για κάθε $x_0\in R$ τότε

α. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f

β. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα κοίλα

γ. Να βρείτε τα ακρότατα και τα σημεία καμπής

Πηγή: Γ. Κομπότης (εκδόσεις Κωστόγιαννος)

ΑΣΚΗΣΗ 81 (από Δημήτρη Κατσίποδα)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=(x-2)e^{-x}+2x^2-3x+2, x\in R$

α. Να βρεθούν f' και f''

β. Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και να βρεθούν τα σημεία καμπής.

γ. Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα τοπικά ακρότατα.

δ. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f

ε. Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=0$ και να προσδιορίσετε το πρόσημο της f

στ. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f

Πηγή: Σημειώσεις Μπ.Στεργίου με τίτλο Γενικά Θέματα στην Κατεύθυνση της Γ΄(21/5/2008)

ΑΣΚΗΣΗ 82 (από pito)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^{-x}+x-1$.

α. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα, να βρείτε τις ρίζες και το πρόσημό της.

β. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f και το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $e^x(x-1)=e^x a-1$ για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού a

γ. Να δείξετε ότι $e^{-x}<1-x+\frac{x^2}{2}, x>0$.

δ. Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=f(x^2)+lnx$

ΑΣΚΗΣΗ 83 (από dennys)

Έστω οι συναρτήσεις $f, g : R \to R$ με τύπους $f(x) = e^x$ και $g(x) = -x^2 - x$.

α. Να δείξετε ότι η εφαπτομένη της $f(x)$ στο $A(0,1)$ εφάπτεται και της $g(x)$

β. Να δειχθεί ότι υπάρχει ακριβώς ένα $a \in (-1, 0)$ τέτοιο ώστε $e^a + 2a + 1 = 0$

γ. Έστω $h(x) = f(x) - g(x)$, να δείξετε ότι :

i. $h(x) \geq a^2 - a - 1$ για κάθε $x \in R$

ii. Η εξίσωση $h(x) = 2012$ έχει ακριβώς δυο λύσεις

ΑΣΚΗΣΗ 84 (από Νίκο Αλεξανδρόπουλο)

Έστω συνάρτηση f με $f(x) = 2e^x + \eta\mu 2x + ex$.

α. Να προσδιορισθεί το σύνολο τιμών της f.

β. Να δειχθεί ότι η εξίσωση $f(x) = -2$ έχει μοναδική λύση

ΑΣΚΗΣΗ 85 (από Χάρη Γ. Λάλα)

Αν η συνάρτηση $f : R \to R$ είναι παραγωγίσιμη στο $a \in R_+^*$, να δειχθεί ότι:

$$\lim_{x \to a} \frac{\sqrt{a}\, f(x) - \sqrt{x}\, f(a)}{x - a} = \frac{2a \cdot f'(a) - f(a)}{2\sqrt{a}}$$

ΑΣΚΗΣΗ 86 (από Βασίλη Κακαβά)

Έστω συνάρτηση $f : R \to R$ συνεχής και $g : R \to R$ γνήσια αύξουσα ώστε να ισχύει $\ln(f(x)) = g(x)$ για κάθε $x \in R$.

α. Να δείξετε ότι η f είναι γνήσια αύξουσα στο R.

Β. Να δείξετε ότι:

i) $\displaystyle \lim_{x \to +\infty} \frac{(f(1))^x + (f(2))^x + (f(3))^x}{(f(4))^x - (f(2))^x + (f(3))^x} = 0$

ii) $\displaystyle \lim_{x \to -\infty} \frac{(f(1))^x + (f(2))^x + (f(3))^x}{(f(4))^x - (f(2))^x + (f(3))^x} = -\infty$

γ. Αν ισχύει ότι $\displaystyle \lim_{x \to 1} \frac{(f(1))^x - f(1)}{x - 1} = 2g(1)$ με $f(1) \neq 1$ να δείξετε ότι $g(1) = \ln 2$.

δ. Αν $f(1) = 2$ και ισχύει $\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$, να δείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (1, +\infty)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 2012$

ΑΣΚΗΣΗ 87 (από Νίκο Αλεξανδρόπουλο)

Έστω συνάρτηση f με $f(x)=\dfrac{5^x-5^{-x}}{ln^2 5}+2\eta\mu x$.

α. Να δειχθεί ότι η f παρουσιάζει καμπή στο $x_0=0$.

β. Να βρεθεί η εφαπτομένη στο $x_0=0$.

ΑΣΚΗΣΗ 88 (από Νίκο Αλεξανδρόπουλο)

Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:R\to R$ με $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{f(x)-6}{x-3}=0$ και $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\eta\mu(6x-30)}{x-5}=f(5)$.

α. Να δειχθεί ότι η εξίσωση $f(x)=x+2$ έχει μια τουλάχιστον λύση στο $(3,5)$.

β. Αν η f είναι κυρτή, να βρεθεί το πλήθος των ριζών της $f'(x)=0$ στο $(3,5)$.

ΑΣΚΗΣΗ 89 (από Περικλή Παντούλα)

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=x^3+3^x+\ln\left(x^3+1\right), x\in\left(-1,+\infty\right)$ και $g(x)=-x+5^{-x}-x\ln 2, x\in R$.

α. Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των δύο συναρτήσεων, έχουν μοναδικό κοινό σημείο, το οποίο και να βρεθεί.

β. Να βρεθούν οι εξισώσεις των εφαπτομένων των C_f και C_g στο κοινό τους σημείο.

γ. Να βρεθούν τα σύνολα τιμών των δύο συναρτήσεων, και να αποδειχθεί ότι υπάρχει μία μόνο ρίζα της f στο $\left(-1,0\right)$ και μία μόνο ρίζα της g στο $\left(0,1\right)$

Πηγή: Μαντάς (εκδόσεις Μαντά) Βιβλίο από Δέσμες

ΑΣΚΗΣΗ 90 (από dennys)

α. Να δείξετε ότι υπάρχει ένα ακριβώς $r>0$ τέτοιο ώστε $lnr+r-3=0$

β. Δίνεται η συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to R$ με $f(x)=(1-\dfrac{1}{x})(lnx-2)$

i. Μελετήστε την $f(x)$ ως προς μονοτονία και ακρότατα.

ii. Για τον αριθμό r του ερωτήματος (α) να δείξετε ότι:

α. $f(x)+\dfrac{(r-1)^2}{r}\geq 0$ για κάθε $x>0$

β. Υπάρχει $x_o>r$ τέτοιο ώστε $f(x_o)+f'(x_o)=0$

ΑΣΚΗΣΗ 91 (από Κώστα Ρεκούμη)

Η συνάρτηση $f: R \to R$ είναι παραγωγίσιμη και ισχύουν:

• $f(x) \neq 0$, για κάθε $x \in R$

• $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{(x-2)f(x)+\eta\mu(x^2-4)}{\sqrt{x-1}-1} = -2$

α.i. Να αποδείξετε ότι $f(2) = -5$

ii. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (1,2)$ τέτοιο, ώστε $\dfrac{1}{x_0-1}+\dfrac{1}{x_0-2}=\dfrac{2012}{f(x_0)}$

β. Αν επιπλέον ισχύει $f^2(x)+f(x^2)=2x^2$, για κάθε $x \in R$, τότε:

i. Να αποδείξετε ότι $f(1) = -2$

ii. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής της παράστασης στο σημείο της $(1, f(1))$

iii. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (1,2)$ τέτοιο, ώστε $(\xi-3)f'(\xi)+f(\xi)=1$

ΑΣΚΗΣΗ 92 (από dennys)

α. Δίνεται $f(x) = ln(e^x - x) - x$. Ποιά είναι η μονοτονία της, τα ακρότατα της και οι ρίζες της;

β. Αν $g(x) = ln(e^x - x)$ να δείξετε ότι οι εφαπτόμενες των $f(x)$, $g(x)$, εκεί που τέμνονται από την ευθεία $x = x_o > 0$, τέμνονται πάνω στον άξονα $y'y$

γ. Να αποδείξετε ότι η $f(x)$ έχει δυο σημεία καμπής r_1, r_2 για τα οποία ισχύουν οι σχέσεις:

$$f'(r_1)\, e^{f(r_1)} = (r_1-2)(1-r_1) \quad (1) \qquad \text{και} \qquad e^{r_1-r_2} = \frac{2-r_2}{2-r_1} \quad (2)$$

ΑΣΚΗΣΗ 93 (από dennys)

Έστω μια συνάρτηση $f(x)$,που ορίζεται στο $[0,1]$ και είναι παραγωγίσιμη και ισχύει:

$$2f'(x) \geq f^2(0)+f^2(1)+2 \text{ για κάθε } x \in [0,1]$$

α.i Να αποδείξετε ότι υπάρχει $c \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $f'(c) = f(1) - f(0)$

ii. Να αποδείξετε ότι $f(0) = -1$, και $f(1) = 1$

iii. Να βρείτε την μονοτονία της $f(x)$ και να αποδείξετε ότι $f'(x) \geq 2$ για κάθε $x \in [0,1]$

iv. Να αποδείξετε ότι $-1 \leq f(x) \leq 1$ για κάθε $x \in [0,1]$

Αν $t \in (0,1)$ τυχαίος, να δείξετε ότι:

β.i. Υπάρχει $r_1 \in (0,t)$ τέτοιο ώστε $tf'(r_1) = f(t)+1$

ii. Υπάρχει $r_2 \in (t,1)$ τέτοιο ώστε $(t-1)f'(r_2) = f(t)-1$

iii. Να βρείτε τον τύπο της $f(x)$ για κάθε $x \in [0,1]$

ΑΣΚΗΣΗ 94 (από Απόστολο Τιντινίδη)

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη και κοίλη στο $\left[\alpha,\beta\right]$.

Αν γνωρίζετε ότι $f\left(\alpha\right)=f\left(\beta\right)=0$ τότε:

α. Να δείξετε ότι: $f'\left(\alpha\right)f'\left(\beta\right)<0$

β. Να βρείτε το πρόσημο της f

γ. Να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in\left(\alpha,\beta\right)$ τέτοιο ώστε $f\left(x_0\right)\le f'\left(x_0\right)$

ΑΣΚΗΣΗ 95 (από Απόστολο Τιντινίδη)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$.

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f και να δείξετε ότι είναι γνησίως αύξουσα σ' αυτό.

β. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η C_f είναι κυρτή ή κοίλη καθώς και τα ενδεχόμενα σημεία καμπής.

γ. Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{\ln x}$

δ. Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=2x+f\left(3x\right)$.

ΑΣΚΗΣΗ 96 (από Χρήστο Κανάβη)

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f\left(x\right)=ln\left(\left(\dfrac{1}{4}\right)^x-\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x-1}+1\right)$.

α. Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f έχει ακριβώς ένα σημείο τομής με τον $x'x$

β. Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f δεν δέχεται οριζόντια εφαπτομένη.

γ. Να δείξετε ότι $\dfrac{f\left(x\right)}{4ln\left(\dfrac{1}{2}\right)}\ge x+1$ για κάθε $x<0$.

ΑΣΚΗΣΗ 97 (από Απόστολο Τιντινίδη)

α. Για τις συναρτήσεις h,g ισχύει πως $h(x)\le g(x)$ για κάθε x κοντά στο x_0, όπου $x_0\in R\cup\{\pm\infty\}$.

Να δείξετε ότι:

i. $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=-\infty\Rightarrow\lim\limits_{x\to x_0}h(x)=-\infty$

ii. $\lim\limits_{x\to x_0}h(x)=+\infty\Rightarrow\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=+\infty$

β. Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:R\to R$ για την οποία ισχύει :

$$f'(x)=2012-\frac{x^2}{x^2+e^x} \text{ για κάθε } x\in R.$$

i. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η f είναι κυρτή ή κοίλη καθώς και τα ενδεχόμενα σημεία καμπής.

ii. Να δείξετε ότι η $g(x)=f(x)-2011x$ είναι γνησίως αύξουσα στο R

iii. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f

iv. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x+2)-f(x)\right]$

ΑΣΚΗΣΗ 98 (από parmenides51)

Έστω η δυο φορές παραγωγίσιμη $f:R\to R$ με $f''(x)>0$ για κάθε $x\in R$, ώστε $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$.

Να δείξετε ότι :

α. η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα

β. ισχύει $f(x)>0$ για κάθε $x\in R$.

Πηγή: Γ. Μπαϊλάκης (εκδόσεις Σαββάλας)

ΑΣΚΗΣΗ 99 (από Περικλή Παντούλα)

Δίνεται η μη μηδενική συνάρτηση $f:R\to R$ με $f(x+y)=4^{xy}f(x)f(y)$ για κάθε $x,y\in R$.

α. Να αποδείξετε ότι $f(0)=1$

β. Αν ισχύει $f'(0)=0$, τότε να αποδείξετε ότι:

i. Η f είναι παραγωγίσιμη στο R

ii. Η συνάρτηση $g:R\to R$ με $g(x)=2^{-x^2}f(x)$ είναι σταθερή στο R

iii. Να βρεθεί ο τύπος της f

ΑΣΚΗΣΗ 100 (από Δημήτρη Κατσίποδα)

Δίνεται η συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to R$ με $f(x)=x\ln a-a\ln x, a>0$

α. Να βρείτε το $a>0$ αν ισχύει $f(x)\geq 0$ για κάθε $x>0$

Για $a=e$:

β. Να μελετηθεί η f ως προς την μονοτονία και να δείξετε ότι $e^x\geq x^e$ για κάθε $x>0$

γ. Να λύσετε την εξίσωση $e^x=x^e$, $x>0$

δ. Να προσδιορίσετε τους θετικούς β,γ αν ισχύει $\beta^x+\gamma^x\geq x^\beta+x^\gamma$ για κάθε $x>0$

Πηγή: Γ.Μιχαηλίδης (εκδόσεις Διόφαντος)

ΑΣΚΗΣΗ 101 (από Στάθη Κούτρα)

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : R \to R$, για την οποία ισχύει η σχέση:

$$2f(x)+\sigma\upsilon\nu(f(x))=x \text{ για κάθε } x\in R$$

α. Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα

β. Να αποδείξετε ότι : $|f(x)-f(y)|\leqslant|x-y|,\ \forall x,y\in R$

γ. Να δείξετε ότι: $\frac{x-1}{2}\leqslant f(x)\leqslant\frac{x+1}{2},\ \forall x\in R$

δ. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f και την f^{-1}

ΑΣΚΗΣΗ 102 (από Στάθη Κούτρα)

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to R$, για την οποία ισχύει η σχέση:

$$x\cdot e^{f(x)} = f^2(x)+2 \text{ για κάθε } x\in(0,+\infty)$$

α. Να εκφράσετε την $f'(x)$ συναρτήσει μόνο του $f(x)$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$

β. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως μονότονη

γ. Να μελετήσετε την f ως προς τα κοίλα

δ. Να βρείτε τον τύπο της αντίστροφης συνάρτησης f^{-1}

ΑΣΚΗΣΗ 103 (από Στάθη Κούτρα)

α. Να αποδείξετε ότι $e^x > x > \ln x$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$

β. Μια κατακόρυφη ευθεία $x=t, t\in(0,+\infty)$ τέμνει τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)=e^x$ και $g(x)=\ln x$ στα σημεία A, B αντίστοιχα.

i. Να βρείτε την απόσταση (AB) συναρτήσει του $t\in(0,+\infty)$ και έστω ότι $(AB)=d(t)$

ii. Να δείξετε ότι η εξίσωση $d'(t)=0$ έχει ακριβώς μια λύση και μάλιστα αυτή ανήκει στο διάστημα $(0,1)$

iii. Να αποδείξετε ότι η απόσταση d γίνεται ελάχιστη για κάποιο $t_0\in(0,1)$

ΑΣΚΗΣΗ 104 (από Χρήστο Κανάβη)

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f\left(x\right)=ln\left(1+e^{-x}\right)+\frac{1}{3}x$.

α. Να μελετηθεί η συνάρτηση ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

β. Να βρεθούν τα όρια $\lim\limits_{x\to+\infty} f\left(x\right)$ και $\lim\limits_{x\to-\infty} f\left(x\right)$.

γ. Να βρεθούν οι ασύμπτωτες της συνάρτησης και το σημείο τομής τους.

δ. Να προσδιοριστεί η θέση της C_f ως προς τις ασύμπτωτες.

Πηγή: Annales corrigées 2010 - Mathématiques - Bac, Vuibert

ΑΣΚΗΣΗ 105 (από Δημήτρη Κατσίποδα)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{\ln x}{x}, x>0$

α. Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

β. Να βρείτε το σύνολο τιμών της

γ. Για τις διάφορες τιμές του $\kappa\in R$ να βρείτε το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $x=e^{\kappa x}, x>0$

δ. Να λύσετε την εξίσωση $(\eta\mu x)^{\sigma\upsilon\nu x}=\left(\sigma\upsilon\nu x\right)^{\eta\mu x}$ στο διάστημα $(0,\frac{\pi}{2})$

ε. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $\xi\in(0,+\infty)$ ώστε η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $M(\xi, f(\xi))$ να τέμνει τον άξονα $y'y$ στο -2010

στ. Να δείξετε ότι για κάθε $x\geq e$ ισχύει $f(x+1)<\frac{\ln^2(x+1)-\ln^2 x}{2}<f(x)$

ζ. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\ln^2(x+1)-\ln^2 x\right)$

Πηγή: Β. Παπαδάκης (εκδόσεις Σαββάλας) και Γ. Μιχαηλίδης (εκδόσεις Διόφαντος)

ΑΣΚΗΣΗ 106 (από pito)

Έστω η f δυο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:R\to R$ για την οποία ισχύουν

$$f(x+1)=f(3-x) \text{ και } f''(x)\neq 0$$

α. Να λύσετε την εξίσωση $f'(x)=0$.

β. Αν επιπλέον η f'' είναι συνεχής στο $\left[0,3\right]$ και ισχύει $f(0)<f(1)$, να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε τις θέσεις των ολικών ακροτάτων στο $\left[0,3\right]$

Πηγή: Α.Μπάρλας (εκδόσεις Ελληνοεκδοτική)

ΑΣΚΗΣΗ 107 (από Περικλή Παντούλα)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln x-\frac{a}{x}+a, a\in R$. Αν $f(x)\geq 0$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$, τότε:

α. Να βρείτε τον $a\in R$

Για την τιμή του a που βρήκατε:

β. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα

γ. Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής

δ. Να υπολογίσετε τα όρια $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

ε. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f και να λύσετε την εξίσωση $f(x)=0$

στ. Να λύσετε την ανίσωση $\ln\left(2\lambda^2+2\right)-\frac{1}{\lambda^2+6}>\ln\left(\lambda^2+6\right)-\frac{1}{2\lambda^2+2}$

Πηγή: Χ.Γκουβιέρος – Θ. Διαμαντόπουλος (εκδόσεις Ξιφαράς)

ΑΣΚΗΣΗ 108 (από Περικλή Παντούλα)

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:[1,2]\to R$ τέτοια, ώστε $f'(x)>0$, για κάθε $x\in R$.

Δίνεται επίσης ότι ο μιγαδικός $=\frac{1+if(1)}{2+if(2)}$ είναι φανταστικός και έχει μέτρο 1. Να δείξετε ότι:

α. $f(1)=-2$ και $f(2)=1$

β. Η εξίσωση $f(x)=-x$ έχει ακριβώς μία λύση στο διάστημα $(1,2)$

γ. Η εξίσωση $f(x)f'(x)=-x$ έχει τουλάχιστον μία λύση στο $(1,2)$

Πηγή: Γ.Μπαϊλάκης (εκδόσεις Σαββάλας)

ΑΣΚΗΣΗ 109 (από Απόστολο Τιντινίδη)

Έστω η συνεχής συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to R$ για την οποία ισχύει

$$(x-1)^2 f(x)=(\ln x)\eta\mu\pi x \quad \text{για κάθε } x>0$$

α. Να βρείτε το $f(1)$

β. Να εξετάσετε αν η C_f έχει ασύμπτωτες

γ. Να εξετάσετε αν υπάρχουν $\alpha,\beta\in R$, ώστε για τη συνάρτηση g με $g(x)=\begin{cases}\alpha+f(x), \alpha\nu\ 0<x<1\\ \beta\ \ , \alpha\nu\ \ x=0\end{cases}$

να ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θ. Rolle στο $[0,1]$

Πηγή: Γ.Μπαϊλάκης (εκδόσεις Σαββάλας)

ΑΣΚΗΣΗ 110 (από dennys)

Δίνονται οι συναρτήσεις $f,g:(0,+\infty)\to R$ για τις οποίες ισχύει $|f(x)g(x)+x^2|\leq xlnx$ για κάθε $x>1$.

α. Αν οι συναρτήσεις έχουν πλάγιες ασύμπτωτες στο $+\infty$ τις e_1,e_2 αντίστοιχα, να δείξετε οτι οι ευθείες e_1,e_2 είναι κάθετες.

β. Αν ισχύει πως $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+5h)-f(x-3h)}{sin(4h)}=\dfrac{x^2+1-lnx}{x^2}$ και $f(1)=\dfrac{1}{2}$, να βρεθεί ο τύπος της $f(x)$

γ. Αν η πλάγια ασύμπτωτη της $g(x)$ διέρχεται από το σημείο $A(1,2)$, ποια είναι η εξίσωση της;

ΑΣΚΗΣΗ 111 (από Περικλή Παντούλα)

Η συνάρτηση $f:[1,e]\to[-1,4]$, όπου το $[-1,4]$ είναι το σύνολο τιμών της, είναι δύο φορές παραγωγίσιμη με $f(1)=2$ και $f(e)=e+1$. Να δείξετε ότι:

α.i. Υπάρχουν $x_1,x_2\in(1,e)$ με $x_1\neq x_2$ τέτοια ώστε $f'(x_1)=f'(x_2)=0$

ii. Υπάρχει $\xi\in(1,e)$ τέτοιο ώστε $f''(\xi)=0$

iii. Υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_o\in(1,e)$ τέτοιο ώστε $f(x_o)\left(f'(x_o)-3f^2(x_o)\right)=x_o$

β.i. Η ευθεία $e:x+y=e+2$ τέμνει την C_f σε ένα τουλάχιστον σημείο με τετμημένη $c_o\in(1,e)$

ii. Υπάρχουν $\xi_1,\xi_2\in(1,e)$ με $\xi_1\neq\xi_2\in(1,e)$ τέτοια ώστε $f'(\xi_1)\cdot f'(\xi_2)=1$

Πηγή: Χ.Γκουβιέρος – Θ. Διαμαντόπουλος (εκδόσεις Ξιφαράς)

ΑΣΚΗΣΗ 112 (από Δημήτρη Κατσίποδα)

Δίνεται η συνάρτηση f συνεχής στο διάστημα $[-2,2]$, παραγωγίσιμη δύο φορές στο διάστημα $(-2,2)$, για την οποία επίσης γνωρίζουμε ότι $f(0)=3$ και $f(x)f'(x)=f'(x)-x$ για κάθε $x\in[-2,2]$

Έστω και οι μιγαδικοί αριθμοί z για τους οποίους ισχύει $|z-i|=2$.Να αποδείξετε ότι :

α. Η f δεν έχει σημεία καμπής .

β. $f^2(x)-2f(x)+x^2-3=0$

γ. Η συνάρτηση $g(x)=f(x)-1$ διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $(-2,2)$.

δ. Η f είναι κοίλη

ε. $f(x)=1+\sqrt{4-x^2},x\in[-2,2]$

στ. Η γραφική παράσταση της f είναι μέρος του γεωμετρικού τόπου των μιγαδικών z και ότι η εφαπτομένη της στο σημείο που είναι η εικόνα του z για τον οποίο το $|z|$ γίνεται μέγιστο , είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$.

Πηγή: Θέμα 23 από την Συλλογή Επαναληπτικών Ασκήσεων του xgastone

ΑΣΚΗΣΗ 113 (από Χρήστο Τσιφάκη)

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$, παραγωγίσιμη στο (α,β) με $f(\alpha)=f(\beta)=0$ και η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο (α,β).

α. Αποδείξτε ότι $f(x)>0$ για κάθε $x\in(\alpha,\beta)$.

β. i. Αποδείξτε ότι υπάρχει ένα μόνο $x_0\in(\alpha,\beta)$ ώστε η f να παρουσιάζει μέγιστο στο x_0.

ii. Αποδείξτε ότι υπάρχουν $x_1,x_2\in(\alpha,\beta)$ ώστε $f'(x_1)-f'(x_2)\ge\dfrac{4f(x_0)}{\beta-\alpha}$.

γ. Αν επιπλέον η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο (α,β), αποδείξτε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(x_1,x_2)$ ώστε

i. $f''(\xi)<0$

ii. $f(x)\le -f''(\xi)\left(\dfrac{\beta-\alpha}{2}\right)^2$

Πηγή: Θέματα ΕΜΕ (2002)

ΑΣΚΗΣΗ 114 (από pito)

α. i. α. Να δείξετε ότι $x^2>ln2x$ για κάθε $x>0$

β. Να δείξετε ότι $e^{x^2}>2x$ για κάθε x πραγματικό.

ii. Να λύσετε την εξίσωση $x+e^{-x^2}=1$

β. Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:R\to R$ για την οποία ισχύει $f(x)+e^{-f^2(x)}=x$ για κάθε $x\in R$.

Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα και να βρείτε το σημείο τομής της C_f με την ευθεία $x=1$.

Πηγή: Α. Μπάρλας, (εκδόσεις Ελληνοεκδοτική)

ΑΣΚΗΣΗ 115 (από dennys)

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:R\to R$ για την οποία ισχύει: $f(x)+e^{f(x)}=x+1$ για κάθε $x\in R$.

α. Να αποδείξετε ότι $e^x\ge(x+1)$ για κάθε $x\in R$

β. Να αποδείξετε ότι $f(x)\le\dfrac{x}{2}$ για κάθε $x\in R$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$

γ. Να αποδείξετε ότι $f(x)\ge ln(1+\dfrac{x}{2})$ για κάθε $x\ge 0$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

δ. Να αποδείξετε ότι η $f(x)$ είναι γνησίως αύξουσα και στρέφει τα κοίλα κατω.

ε. Να βρείτε το σύνολο τιμών της

στ. Να δείξετε ότι η $f(x)$ αντιστρέφεται και βρείτε την $f^{-1}(x)$

ΑΣΚΗΣΗ 116 (από Δημήτρη Κατσίποδα)

Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο R , για την οποία ισχύει :

$f(\alpha-1)>\alpha-1, f(\alpha)<\alpha$ και $f(\alpha+1)>\alpha+1$, για κάποιο $\alpha\in R$.

α. Να αποδείξετε ότι, η γραφική παράσταση της f και η διχοτόμος του $1^{ου}$ και $3^{ου}$ τεταρτημορίου έχουν δυο τουλάχιστον κοινά σημεία.

β. Να αποδείξετε ότι, η εξίσωση $f'(x)-1=f(x)-x$ έχει μια τουλάχιστον λύση στο διάστημα $(\alpha-1,\alpha+1)$

γ. Αν επιπλέον η f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο R να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(\alpha-1,\alpha+1)$ ώστε $f''(\xi)>0$

Πηγή: Θέμα 12 από την Συλλογή Επαναληπτικών Ασκήσεων του xgastone

ΑΣΚΗΣΗ 117 (από Περικλή Παντούλα)

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to R$ για την οποία ισχύουν $f(1)=0$ και $xf'(x)-2f(x)=x$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$.

i. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $h(x)=\dfrac{f(x)}{x^2}$ είναι γνησίως αύξουσα στο $x\in(0,+\infty)$

ii. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f

iii. Η συνάρτηση $g(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο R διερχόμενη από το σημείο $(1,0)$ τέτοια ώστε $g'(x)=f(x)$ για κάθε $x\in R$. Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{g(x)}{\ln^2 x}$

Πηγή: Γ.Μπαϊλάκης (εκδόσεις Σαββάλας)

ΑΣΚΗΣΗ 118 (από Δημήτρη Κατσίποδα)

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to R$ για την οποία ισχύουν $f(1)=1$ και $f'(x)=\dfrac{2f(x)}{x}$ για κάθε $x>0$.

α. Να δείξετε ότι $f(x)=x^2$ για κάθε $x>0$.

β. Ένα σημείο M κινείται στη C_f και έστω A η προβολή του M στον άξονα $x'x$.Το σημείο A απομακρύνεται από την αρχή των αξόνων $O(0,0)$, με ρυθμό $\dfrac{2\mu o\nu}{\sec}$. Τη χρονική στιγμή t_0 που η τετμημένη του M είναι 3, να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής:

i. των αποστάσεων AM και OM

ii. της γωνία $\widehat{MOA}$

iii. της απόστασης OB, όπου B το σημείο τομής της εφαπτομένης της C_f στο M με τον άξονα $x'x$

Πηγή: Β.Παπαδάκης (εκδόσεις Σαββάλας)

ΑΣΚΗΣΗ 119 (από dennys)

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ με $a,b,c,d \in R, a>0$

Αν το πολυώνυμο έχει τρείς πραγματικές ρίζες ρ_1,ρ_2,ρ_3 να αποδείξετε ότι

α. $b^2>3ac$

β. Το πολυώνυμο παρουσιάζει ακριβώς δύο τοπικά ακρότατα.

γ. Αν x_1,x_2, οι θέσεις τοπικών ακροτάτων τότε: $P''(x_1)+P''(x_2)=0$

δ. Δεν είναι δυνατόν το πολυώνυμο να έχει σημείο καμπής σε κάποιο από τα x_1,x_2

ε. Ανάμεσα στα ακρότατα έχει ακριβώς ενα σημείο καμπής

στ. Αν η γραφική παράσταση της $f(x)=\dfrac{P(x)}{x^2+cx+d}$ έχει πλάγια ασύμπτωτη την $y=2x+25$ και κατακόρυφες τις $x=-1, x=13$ να αποδείξετε ότι $P(x)=2x^3+x^2-12x-13$

ΑΣΚΗΣΗ 120 (από dennys)

Έστω η δυο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f(x):(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, για την οποία ισχύουν:

$$x^3 f''(x)=e^{\frac{1}{x}} \text{ για κάθε } x>0 \text{ και } f(1)=e,\ f'(1)=0$$

α. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=xf'(x)-f(x)+e^{\frac{1}{x}}$ είναι σταθερή στο $(0,+\infty)$

β. Να δείξετε ότι $f(x)=xe^{\frac{1}{x}}$ για κάθε $x>0$

γ. Να βρείτε το σύνολο τιμών της $f(x)$

δ. Να δείξετε ότι:

i. Η εξίσωση της εφαπτομένης της $f(x)$ είναι στο σημείο $A(2,f(2))$ είναι $y=\frac{1}{2}(\sqrt{e})x+(\sqrt{e})$

ii. $2xe^{\frac{1}{x}}\geq(x+2)(\sqrt{e})$ για κάθε $x>0$

ΕΠΙΛΟΓΗ + ΕΠΙΛΥΣΗ ΑΣΚΗΣΕΩΝ ΣΥΛΛΟΓΗΣ: 16/01/2012 – 31/01/2012

Πηγή – Απαντήσεις

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=53&t=22305

ΕΠΙΛΟΓΗ + ΕΠΙΛΥΣΗ ΑΣΚΗΣΕΩΝ ΣΥΛΛΟΓΗΣ: 16/01/2012 – 31/01/2012

Πρότειναν οι:

Απόστολος Τιντινίδης
Βασίλης Κακαβάς
Γιάννης Σταματογιάννης
Δημήτρης Κατσίποδας
Κώστας Ρεκούμης
Νίκος Αλεξανδρόπουλος
Περικλής Παντούλας
Στάθης Κούτρας
Χρήστος Κανάβης
Χρήστος Τσιφάκης
dennys
parmenides51
pito

Έλυσαν (*) οι:

Απόστολος Τιντινίδης
Βασίλης Κακαβάς
Γιάννης Κουτσούκος
Γιάννης Σταματογιάννης
Δημήτρης Ιωάννου
Δημήτρης Κατσίποδας
Κώστας Ρεκούμης
Νίκος Αλεξανδρόπουλος
Περικλής Παντούλας
Ροδόλφος Μπόρης
Στάθης Κούτρας
Χρήστος Στραγάλης
Χρήστος Τσιφάκης
dennys
parmenides51
pito

Πηγή – Απαντήσεις

(*)http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=53&t=22305

Επιμέλεια: parmenides51