ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ ΛΥΚΕΙΟΥ — **ΜΙΑ ΣΥΛΛΟΓΗ 60 ΑΣΚΗΣΕΩΝ**

ΘΕΤΙΚΗΣ - ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ — **ΣΕ ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟ ΛΟΓΙΣΜΟ**

Α' ΕΚΔΟΣΗ:10/02/2012

ΑΣΚΗΣΗ 121 (από Περικλή Παντούλα)

Έστω η συνεχής συνάρτηση $f: R \to R$, με $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in R$, ώστε να ισχύει

$$f(x) = 1 + x^2 \int_0^1 \frac{t}{f(xt)} dt \text{, για κάθε } x \in R$$

α. Να δείξετε ότι $f(x) > 0$ για κάθε $x \in R$

β. Να βρείτε τον τύπο της f

γ. Να βρείτε την ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f όταν $x \to -\infty$

δ. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = \int_{-x}^{x} \frac{\eta\mu t}{f(t)} dt$ με $x \in R$ είναι σταθερή.

ε. Να αποδείξετε ότι $|f(b) - f(a)| \leq |b - a|$ για κάθε $a, b \in R$

ΑΣΚΗΣΗ 122 (από Δημήτρη Κατσίποδα)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \int_2^x e^{\frac{1}{t-1}} dt$.

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

β. Να μελετήσετε την συνάρτηση ως προς την κυρτότητα και να εξετάσετε αν η γραφική παράσταση της f έχει σημεία καμπής.

γ. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $A(2, f(2))$

δ. Να αποδείξετε ότι $f(x) \leq ex - 2e$ για κάθε $x > 1$

ε. Αν E το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται μεταξύ της C_f, του άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = 2$ και $x = 4$, να αποδείξετε ότι $E \leq 2e$

Πηγή: Ι.Γαρατζιώτης - Π.Μάστακας (εκδόσεις Κέδρος)

ΑΣΚΗΣΗ 123 (από Δημήτρη Κατσίποδα)

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:[0,1]\to R$ για την οποία ισχύει

$$f'(x)=xf(x)+\int_1^x f(t)dt \text{ για κάθε } x\in[0,1]$$

α. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα $[0,1]$

β. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0\in(0,1)$ τέτοιο ώστε $f''(x_0)=f(1)+\int_0^1 f(t)dt$

γ. Να αποδείξετε ότι $f(x)=x\int_1^x f(t)dt+c$ με $c\in R$ και $f(0)=f(1)$

δ. Αν η συνάρτηση f παρουσιάζει ακρότατο στο $\xi\in(0,1)$, τότε να αποδείξετε ότι $f(\xi)=\dfrac{f(1)}{\xi^2+1}$

Πηγή: <u>Ι.Γαρατζιώτης - Π.Μάστακας (εκδόσεις Κέδρος)</u>

ΑΣΚΗΣΗ 124 (από pito)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1})-\int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt$

α. Να εξετάσετε την f ως προς τη μονοτονία της.

β. Να δείξετε ότι $0<\int_0^{\frac{3}{4}}\frac{1}{1+t^2}dt<\ln 2$

γ. Να δείξετε ότι $\int_0^{\epsilon\varphi x}\frac{1}{1+t^2}dt=x$ για κάθε $x\in R$

δ. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=0$ και $x=1$.

Πηγή: <u>Χ. Πατήλας (εκδόσεις Ελληνοεκδοτική)</u>

ΑΣΚΗΣΗ 125 (από dennys)

Αν $f:R\to R,\ f(R)=R$ και $\int_0^{f(x)}(e^t+1)dt=x$ για κάθε $x\in R$

α. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $f(x)$ αντιστρέφεται και να ορίσετε την αντίστροφη της , την $f^{-1}(x)$

β. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f, τους άξονες $x'x$, $y'y$ και την ευθεία $x=e$

γ. Βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f

δ. Να αποδείξετε ότι $\int_{2009}^{2010} f(t)dt<\int_{2010}^{2011} f(t)dt$.

Σημείωση: Μπορεί να λυθεί χωρίς να γνωρίζουμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη, αρκεί μόνο να είναι συνεχής.

Επιμέλεια: parmenides51

ΑΣΚΗΣΗ 126 (από dennys)

Έστω η συνάρτηση $f(x)$ συνεχής στο R και παραγωγίσιμη στο $x_o = 0$.

Έστω συνάρτηση $g: R \to R$ με $g(x) = \int_0^1 f(xt)dt$, $t, x \in R$ και ο μιγαδικός z τέτοιος ώστε $|z - 2 + i| = |z + 2 - i|$ (1), τότε:

α. Να αποδείξετε ότι οι εικόνες του μιγαδικού z, ανήκουν στην ευθεία $(\varepsilon): y = 2x$

β. Αν η ευθεία (ε) είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$, να βρείτε τον πραγματικό αριθμό k ώστε

να ισχύει $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{xf\left(\frac{1}{x}\right) - 5x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) + k}{f\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{2}{x} + 2} = 10$

γ. Να αποδείξετε ότι: $$g(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(u)du & , x \neq 0 \\ f(0) & , x = 0 \end{cases}$$

δ. Να αποδείξετε ότι η $g(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο R

ε. Αν ο μιγαδικός $z = \int_1^2 f(t)dt + i\int_0^2 f(t)dt$ ικανοποιεί την σχέση (1) , να δειχθεί ότι υπάρχει $\xi \in (1, 2)$ τέτοιο ώστε $f(\xi) = g(\xi)$

ΑΣΚΗΣΗ 127 (από Γιάννη Σταματογιάννη)

Έστω συνάρτηση f δυο φορές παραγωγίσιμη στο R με συνεχή f'' στους πραγματικούς αριθμούς .

Αν ισχύουν πως $f''(x)f(x) + [f'(x)]^2 = f(x)f'(x)$ για κάθε $x \in R$ και $f(0) = 2f'(0) = 1$ τότε :

α. Να βρείτε τον τύπο της f

β. Να αποδείξετε ότι $\int_{-a}^{a} x^{2004} lnf(x)dx = 0$ για κάθε $a > 0$

γ. Αν g είναι συνεχής συνάρτηση στο διάστημα $[0,1]$ με σύνολο τιμών το $[0,1]$ να αποδείξετε ότι η

εξίσωση $2x - \int_0^x \dfrac{g(t)}{1 + f^2(t)}dt = 1$ έχει μια μόνο λύση στο $[0,1]$

Πηγή: Γ. Κομπότης (εκδόσεις Κωστόγιαννος)

ΑΣΚΗΣΗ 128 (από Γιάννη Σταματογιάννη)

Έστω η δυο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:[1,2]\to R$ για την οποία δίνονται $f''(x)<0$ για κάθε $x\in[1,2]$ και $f(1)=0,\ f(2)=2,\ f'(2)=1$

α. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη και να βρείτε το σύνολο τιμών της

β. Να αποδείξετε ότι η ευθεία $y=x$ εφάπτεται στην γραφική παράσταση της συνάρτησης f

γ. Να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0\in(1,2)$ τέτοιο ώστε $f''(x_0)<-1$

δ. Να αποδείξετε ότι :

i. $\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}>\dfrac{f(2)-f(x)}{2-x}$ για κάθε $x\in(1,2)$

ii. $f(x)\geq 2(x-1)$ για κάθε $x\in[1,2]$

iii. $\int_1^2 f(x)dx\geq 1$

ε. Να αποδείξετε ότι η ευθεία $x+y=2$ τέμνει ακριβώς σε ένα μόνο σημείο την C_f

στ. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1,\xi_2\in(1,2)$ με $\xi_1<\xi_2$ τέτοια ώστε $f'(\xi_1)f'(\xi_2)=f'(\xi_1)+2$

ζ. Να κάνετε μια πρόχειρη γραφική παράσταση της συνάρτησης f

Πηγή: Γ. Μπαϊλάκης (εκδόσεις Σαββάλας)

ΑΣΚΗΣΗ 129 (από Κώστα Τηλέγραφο)

Δίνονται οι συνεχείς στο R συναρτήσεις f,g,φ με $0<\alpha<\beta$, $f(x)\neq 0$, $g(x)\neq 0$, $\varphi(x)>0$,

$$h(x)=\frac{\int_0^x t\varphi(t)dt}{\int_0^x \varphi(t)dt} \quad \text{και} \quad \int_{h(2)}^{h(-1)} f(x)dx>0 .$$

α. Να δειχτεί ότι η h γνησίως αύξουσα για $x>0$ και h γνησίως αύξουσα για $x<0$.

β. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $h(x)$ είναι $1-1$ στο R αν $h(0)=0$.

γ. Αν f γνησίως αύξουσα και g γνησίως φθίνουσα για κάθε $x\in(\alpha,\beta)$, να δείξετε ότι :

αν $f(\beta)>g(\beta)$ και $\int_\alpha^\beta f(x)dx<\int_\alpha^\beta g(x)dx$ τότε υπάρχει ένα μόνο $\xi_o\in[\alpha,\beta]$ τέτοιο ώστε : $f(\xi_o)=g(\xi_o)$.

δ. Να δειχτεί ότι υπάρχει ξ ώστε $h\left(\dfrac{\int_\beta^\xi g(x^x)dx}{\xi-\alpha}\right)=h\left(\dfrac{f(\xi^\xi)g(\xi)}{\beta-\xi}\right)$ όταν $h(0)=0$.

ΑΣΚΗΣΗ 130 (από Δημήτρη Κατσίποδα)

Έστω η συνεχής στο $[1,2]$ συνάρτηση f για την οποία ισχύουν $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in[1,2]$ και $\displaystyle\int_x^{2x}\frac{t}{x^2}f\left(\frac{t}{x}\right)dt=1$.

α. Να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in(1,2)$ τέτοιο ώστε $f(\xi)=\dfrac{1}{\xi}$

Θεωρούμε την συνάρτηση $H(x)=\displaystyle\int_1^x f(t)dt+\int_2^x f(t)dt$

β. Να μελετήσετε την H ως προς την μονοτονία.

γ. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0\in(1,2)$ τέτοιο ώστε $\displaystyle\int_1^{x_0} f(t)dt=\int_{x_0}^{2} f(t)dt$

δ. Αν το εμβαδόν $E(\Omega)$ του χωρίου Ω που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f και τις ευθείες $x=1, x=2$ είναι $4\tau.\mu$, τότε να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\mathrm{I}=\displaystyle\int_1^2 H(x)dx$

Πηγή: Κ.Ρεκούμης - Κ.Λαγός (εκδόσεις Μεταίχμιο)

ΑΣΚΗΣΗ 131 (από Δημήτρη Κατσίποδα)

Οι συναρτήσεις f,g είναι ορισμένες και συνεχείς στο διάστημα $\Delta=[1,+\infty)$.

Η f είναι κυρτή με συνεχή παράγωγο και $f(1)=1$. Ακόμα $g(x)=\begin{cases}\dfrac{\displaystyle\int_1^x f(t)dt}{x-1} & ,x>1\\ \displaystyle\lim_{x\to 1}\left[\frac{f(t)-1}{t-1}+f(t)\right] & ,x=1\end{cases}$

α. Να αποδείξετε ότι $f'(1)=0$

β. Να βρεθεί $g'(1)$

γ. Να μελετηθούν οι συναρτήσεις f,g ως προς την μονοτονία.

δ. Να λυθεί , ως προς x, η ανίσωση $(x+1)\displaystyle\int_1^{x^2} f(t)dt>(x^2-1)\int_1^{x+2} f(t)dt$ στο διάστημα $(1,+\infty)$

Πηγή: Κ.Ρεκούμης - Κ.Λαγός (εκδόσεις Μεταίχμιο)

Επιμέλεια: parmenides51

ΑΣΚΗΣΗ 132 (από Κώστα Τηλέγραφο)

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση f με $\int_0^x 2t\eta\mu t f(t)dt = \int_0^x t^2 f^2(t)dt + \int_0^x \eta\mu^2 t dt$ για κάθε $x \in R$.

α. Να αποδείξετε ότι $xf(x) = \eta\mu x$ για κάθε $x \in R$.

β. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη.

γ. Να βρείτε τα ακρότατα και την μονοτονία της $f(x)$ στο $[-\pi, \pi]$.

δ. Να λυθεί η $f(x) + f(x^2) = f(x^8) + f(x^{2009})$ στο $[0, \pi]$

ε. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν μεταξύ των C_f, της ευθείας $y = x\eta\mu 1$, του άξονα των x και των ευθειών $x = 0, x = \pi$, είναι μικρότερο του $\dfrac{2\pi + 1}{2}\eta\mu 1$.

στ. Να βρεθεί το όριο $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\int_{2x}^{3x} \frac{\eta\mu t}{t} dt}{x}$

ΑΣΚΗΣΗ 133 (από Περικλή Παντούλα)

Έστω η συνεχής συνάρτηση $f:(0,+\infty) \to R$ τέτοια ώστε $f(x) = \int_1^x \dfrac{t+1}{t\left(e^{f(t)}+1\right)} dt$ για κάθε $x > 0$.

α. Να αποδείξετε ότι ισχύει $e^{f(x)} + f(x) = x + \ln x$ για κάθε $x > 0$

β. Να αποδείξετε ότι $f(x) = \ln x$ για κάθε $x > 0$

γ. Να βρείτε το μέγιστο της συνάρτησης $g(x) = f(x) f\left(\dfrac{e}{x}\right)$ με $x > 0$

δ. Αν $0 < a < b < c$ να αποδείξετε ότι ισχύει $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} > \dfrac{f(c) - f(b)}{c - b}$

ΑΣΚΗΣΗ 134 (από Βασίλη Κακαβά)

Αν $f:(0,+\infty) \to R,\ g: R \to R$ παραγωγίσιμες συναρτήσεις με $g(0) = 1$ ώστε να ισχύουν

$f(g(x))g(x) = x$ για κάθε $x \in R$ και $f'(g(x))g'(x) = \dfrac{1-x}{e^x}$ για κάθε $x \in R$.

α. Να δείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της g στο σημείο $A(1, g(1))$ είναι η $y = g(1)x$.

β. Να αποδειχθεί ότι $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}, x \in (0, +\infty)$, ότι η f είναι κοίλη στο $(0, e\sqrt{e}]$ και η g κυρτή στο R.

γ. Να βρείτε την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της με τετμημένη $x = 1$

δ. Να υπολογίσετε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται μεταξύ των γραφικών παραστάσεων των f, g και των ευθειών $x = 1, x = \ln 3$.

ε. Να δείξετε ότι $e^{\sqrt{6-2e}} > \ln 3$

Επιμέλεια: parmenides51

ΑΣΚΗΣΗ 135 (από dennys)

Δίνεται συνάρτηση $f: R \to R$, συνεχής με $\int_0^{f(x)} \frac{du}{\sqrt{1+u^2}} = x$ για κάθε $x \in R$.

α. Να δείξετε ότι $f'(0) = f(0)+1$

β. Να βρείτε την μονοτονία και τα ακρότατα της $f(x)$

γ. Να βρείτε το σύνολο τιμών της $f(x)$

Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη :

δ. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = f''(x) - f(x)$ είναι σταθερή.

ε. Να βρείτε τον τύπο της $f(x)$

ΑΣΚΗΣΗ 136 (από dennys)

Δίνεται συνάρτηση $f(x) = \int_1^x xlntdt$

α. Να βρείτε την συνάρτηση $f(x)$

β. Να βρείτε τις συναρτήσεις $f'(x)$ και $f''(\mathrm{x})$

γ. Να κάνετε πίνακα προσήμων και να δείξετε ότι η $f'(x)$ έχει ακριβώς δυο ρίζες.

δ. Αν x_o η μια ρίζα της $f'(x)$, να αποδείξετε πως $\int_{x_o}^1 f''(x) = 0$

ε. Να βρείτε την μονοτονία της $f(x)$ και το σύνολο τιμών της .

ΑΣΚΗΣΗ 137 (από Στάθη Κούτρα)

Έστω η δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:(0,+\infty) \to R$ για την οποία ισχύουν:

$x^2 f''(x) + 5xf'(x) + 4f(x) = 0$ για κάθε $x > 0$, $f(1) = 1$ και $f'(1) = -3$

α. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = x^2 f(x) + \ln x$ με $x > 0$ είναι σταθερή

β. Να βρείτε τον τύπο της f

γ. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f

δ. Να δείξετε ότι αν $0 < a < b < 2$ τότε $f(b) < \frac{b\ln a - a\ln b}{a^2 b - ab^2} < f(a)$

ε. Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f και τις ευθείες με εξισώσεις :

$y = 0,\ x = 1,\ x = e^2$

ΑΣΚΗΣΗ 138 (από Στάθη Κούτρα)

Έστω η συνεχής συνάρτηση $f : R \to R$ με $f(0)=1$ και $f(a)-f(b) \geqslant \int_b^a \frac{2tf(t)}{t^2+1}dt$ για κάθε $a,b \in R$

α. Να αποδείξετε ότι $f(x)=1+\int_0^x \frac{2tf(t)}{t^2+1}dt$ για κάθε $x \in R$

β. Να βρείτε τον τύπο της f

γ. Να αποδείξετε ότι για κάθε παραγωγίσιμη συνάρτηση $g : R \to R$ η εξίσωση

$f'(x)g(x)=(2-f(x))g'(x)$ έχει τουλάχιστον μια πραγματική ρίζα.

δ. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=2e^{x-1}$ έχει ακριβώς μια ρίζα στο R την οποία και να βρείτε.

ΑΣΚΗΣΗ 139 (από Γιάννη Κουτσούκο)

Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f(x)=lnx, x>0$, $K(x)=\int_0^{\varepsilon\phi x}\frac{2t^2}{t^2+1}dt$, $x \in \left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ και $h(x)=x^2+1$.

α. Να αποδείξετε ότι $f(x) \le x-1$ για κάθε $x>0$

β. Να αποδείξετε ότι $K(x)$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και βρείτε την $K''(x)$

γ. i. Να αποδείξετε ότι ορίζεται η συνάρτηση $g(x)=(foh)(x)$ στο R

ii. Να υπολογίσετε το εμβαδό $E(\theta)$ του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της g, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=0, x=\epsilon\phi\theta$ με $\theta \in \left(0,\frac{\pi}{2}\right)$

iii. Να υπολογιστεί το όριο $\lim\limits_{\theta \to \frac{\pi}{2}^-} E(\vartheta)$

iv. Να δειχθεί ότι $E(\theta) > 2(\theta - \eta\mu\theta)$ με $\theta \in \left(0,\frac{\pi}{2}\right)$

ΑΣΚΗΣΗ 140 (από Περικλή Παντούλα)

Δίνεται συνάρτηση $f : R \to R$ δύο φορές παραγωγίσιμη ώστε $\int_0^{f(x)} (e^t+1)dt = x-1$ για κάθε $x \in R$.

α. Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφη της

β. Να μελετήσετε την f ως προς το που στρέφει τα κοίλα

γ. Να βρείτε τις ρίζες και το πρόσημο της f για τις διάφορες τιμές του $x \in R$

δ. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=1$ και $x=e+1$

ε. Να δείξετε ότι $(x-1)f'(x) < f(x) < \frac{x-1}{2}$ για κάθε $x>1$

Πηγή: Ε.Τσακουμάγκος – Α.Μπαλωμένου (εκδόσεις Ελληνοεκδοτική)

Επιμέλεια: parmenides51

ΑΣΚΗΣΗ 141 (από Παναγιώτη Γκριμπαβιώτη)

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=e^x-3x$ και $g(x)=\int\limits_1^{\ln x}\frac{e^t(e^t+3t)}{e^t-3t}dt$

α. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f

β. Να δείξετε ότι υπάρχουν ακριβώς δυο ρίζες x_1,x_2 της εξίσωσης $f(x)=0$ οι οποίες ανήκουν στα διαστήματα $\left(0,\frac{e}{3}\right)$ και $(\ln 3,2)$

γ. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της g

δ. Να βρείτε το σημείο καμπής της g

ε. Να δείξετε ότι η g είναι γνησίως φθίνουσα στο πεδίο ορισμού της και ότι για κάθε $a,b\in D_g$ με $a<b$ ισχύει $(e-3)\int\limits_{\ln a}^{\ln b}\frac{e^t(e^t+3t)}{e^t-3t}dt\geq(b-a)(e+3)$

Πηγή: <u>Χ. Πατήλας (εκδόσεις Ελληνοεκδοτική)</u>

ΑΣΚΗΣΗ 142 (από Δημήτρη Κατσίποδα)

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:R\to R$ για την οποία ισχύουν

$$f(x)=1+x\int\limits_1^x f(x-t)dt \text{ με } x\in R \text{ και } \int\limits_{-1}^0 f(x)dx=-2$$

α. Να βρείτε την παράγωγο της f και την γωνία ω που σχηματίζει η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο $x_0=1$

β. Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to1}\frac{f(x)-1}{(x-1)^3}$

γ. Να δείξετε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[e^x\left(f(e^{-x})-1\right)\right]=2$

Πηγή: <u>Εισήγηση του Γεώργιου Κωτσάκη σε ημερίδα μαθηματικών , Βέροια 18/4/2010</u>

ΑΣΚΗΣΗ 143 (από Περικλή Παντούλα)

Έστω ο μιγαδικός $z\neq i$ και η συνεχής συνάρτηση $f:R\to R$ που είναι γνησίως αύξουσα, ώστε:

$$|z-i|\,f(x)+|z+i|\,f(1-x)=|z-i|+|z+i| \text{ για κάθε } x\in R$$

α. Να δείξετε ότι $|z-i|=|z+i|$

β. Να δείξετε ότι ο z είναι πραγματικός

γ. Να λύσετε την ανίσωση $f\left(x\right)>1$

δ. Να δείξετε ότι $\int\limits_0^1 f\left(x\right)dx=1$

ε. Να δείξετε ότι η εξίσωση $\int\limits_0^{2x} f\left(t\right)dt=1-xf\left(x\right)$ έχει τουλάχιστον μια λύση.

Πηγή: Γ. Μπαϊλάκης (εκδόσεις Σαββάλας)

ΑΣΚΗΣΗ 144 (από Δημήτρη Κατσίποδα)

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to R$ ώστε να ισχύει $\int\limits_e^x \frac{f(t)}{x}dt=f(x)-1$ για κάθε $x>0$.

Να βρείτε:

α. Τον τύπο της f

β. Την εφαπτομένη (ε) της C_f που διέρχεται από την αρχή των αξόνων

γ. Το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f τον άξονα $x'x$ και την εφαπτομένη (ε)

δ. Το όριο $\lim\limits_{x\to 1^+}\int\limits_x^{x^2}\frac{f(x)}{f(t)}dt$.

ΑΣΚΗΣΗ 145 (από Κώστα Τηλέγραφο)

Έστω οι πραγματικές συναρτήσεις f,g ορισμένες και συνεχείς στο R με

$\int_{\int_x^1 f(t)dt}^{\int_0^x f(t)dt} g(t)dt>0$ για κάθε $x\in R-\{0,1\}$ με $\mathrm{g(x)+g(2-x)=2}$ και $\mathrm{g(x)\neq 0}$ για κάθε $x\in R$

α. Να δείξετε ότι $\int_0^x f(t)dt>\int_x^1 f(t)dt$.

β. Να δείξετε ότι $\int_0^1 f(t)dt=0$.

γ. Να δείξετε ότι $\mathrm{f}\left(1\right)=0$ και $\mathrm{f}\left(0\right)=0$.

δ. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x)\int_x^1 f(t)dt=f(x)f'(x)$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $\left(0,1\right)$ αν f παραγωγίσιμη.

ε. Να δείξετε ότι η εξίσωση $\int_x^1 f(t)dt=xf(x)$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $\left(0,1\right)$

στ. Να δείξετε ότι η εξίσωση $2f(x)=-xf'(x)$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $\left(0,1\right)$ αν f παραγωγίσιμη.

ζ. Να βρείτε το εμβαδόν που περικλείεται μεταξύ της γραφικής παράστασης της $g(x)$ με τον άξονα $x'x$ από $x=0$ μέχρι $x=2$.

Επιμέλεια: parmenides51

ΑΣΚΗΣΗ 146 (από Κώστα Τηλέγραφο)

Έστω η πραγματική συνάρτηση f ορισμένη και συνεχής στο R με

$$\int_1^{x^2} \frac{f(tx)}{x|x|}dt \geq x^2 - 1 \text{ για κάθε } x \in R - \{0\}$$

α. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $\alpha(x) = \int_x^{x^3} f(t)dt$ παραγωγίζεται.

β. Να δείξετε ότι $f(1) = 1$ και $f(-1) = -1$

γ. Να βρείτε την παράγωγο της $\alpha(x)$ στο $x = 0$ και να δείξετε ότι $f(0) = 0$

δ. Αν η συνάρτηση f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη, να δείξετε ότι έχει ένα τουλάχιστον πιθανό σημείο καμπής .

ΑΣΚΗΣΗ 147 (από pito)

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f : R \to R$ ώστε $3f(x) - \int_{-2x}^{x} f\left(\frac{x-t}{3}\right)dt = x^3 - 6x + 6$ για κάθε $x \in R$.

α. Να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη.

β. Να βρείτε τον τύπο της f .

γ. Να αποδείξετε ότι η f είναι $1-1$.

δ. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της αντίστροφης συνάρτησης της f, την $C_{f^{-1}}$, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = \frac{2}{e^2}, x = 2$.

Βασίλης Παπαδάκης, εκδόσεις Σαββάλα

ΑΣΚΗΣΗ 148 (από Γιώργο Απόκη)

Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $(0, +\infty)$ έτσι ώστε $f(x) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2x^2} - 2\int_1^x \frac{1}{t} f\left(\frac{x}{t}\right)dt$ για κάθε $x > 0$.

α. Να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ και να βρείτε την $f'(x)$ συναρτήσει της $f(x)$.

β. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = \ln x + x^2 f(x)$ με $x > 0$ είναι σταθερή στο $(0, +\infty)$.

γ. Να βρείτε τον τύπο της f για κάθε $x \in (0, +\infty)$.

δ. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f .

ε. Να υπολογίσετε το εμβαδόν $E(k)$ του χωρίου που περικλείεται από τη C_f, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = 1, x = k$ με $k \in (0,1)$.

στ. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{k \to 0^+} E(k)$.

Επιμέλεια: parmenides51

ΑΣΚΗΣΗ 149 (από Δημήτρη Κατσίποδα)

Η συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to R$ είναι συνεχής και για κάθε $x>0$ ισχύει $f(x)=\int_1^x\left(\frac{1}{t^3}-\frac{2f(t)}{t}\right)dt$

α. Να αποδειχθεί ότι $f(x)=\frac{\ln x}{x^2}, x>0$

β. Να βρεθεί το σύνολο τιμών της f

γ. Αν $E(\lambda)$ το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=\frac{1}{e}$ και $x=\lambda$ με $\lambda>0$, τότε να βρεθούν τα $\lim\limits_{\lambda\to 0^+}E(\lambda)$ και $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}E(\lambda)$

δ. Να προσδιορίσετε τα $\alpha,\beta\in R$ για τα όποια ισχύει $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{\alpha x^3+\beta x^2-\ln x}{x^2}\right)=0$

Πηγή: Θ. Ξένος (εκδόσεις Ζήτη)

ΑΣΚΗΣΗ 150 (από Δημήτρη Κατσίποδα)

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $g:R\to R$ καθώς και η συνεχής συνάρτηση $f:R\to R$.

Επίσης, για κάθε $x\in R$ ισχύει $f(x)>0$ και $g(x)>0$. Έστω $F(x)=\int_0^{xg(x)} f\left(\frac{t}{g(x)}\right)dt$.

α. Να δείξετε ότι για κάθε $x\in R$ ισχύει $F(x)=g(x)\int_0^x f(u)du$

β. Να βρεθεί η συνάρτηση F, αν $f(x)=e^{-x}$ και $g(x)=e^x$

γ. Αν για κάθε $x\in R$ ισχύει $F(x)\geq x$, να δείξετε ότι $g(0)f(0)=1$

δ. Να δείξετε ότι ισχύει $F(1)g(2)<F(2)g(1)$

Πηγή: Γ.Μιχαηλίδης (εκδόσεις Διόφαντος)

ΑΣΚΗΣΗ 151 (από Χρήστο Κυριαζή)

Έστω η συνάρτηση $f:\left[0,\sqrt{2\pi}\right]\to R$ με την ιδιότητα $f''(x)=\sigma\upsilon\nu x^2$ για κάθε $x\in\left(0,\sqrt{2\pi}\right)$ και η συνάρτηση $g:[0,\sqrt{2\pi}]\to\mathbb{R}$ με $g(x)=\frac{f(x)}{x}, x\in\left(0,\sqrt{2\pi}\right)$ η οποία έχει συνεχή παράγωγο στο $[0,\sqrt{2\pi})$. Επίσης είναι $f'(\sqrt{\pi})=f(\sqrt{\pi})=0$

α. Να βρείτε την $g'(0)$

β. Να δείξετε ότι: $f'(x)\leq\frac{\eta\mu x^2}{2x}$ για κάθε $x\in\left(0,\sqrt{2\pi}\right)$

γ. Να δείξετε ότι: $\int_0^{\sqrt{\pi}} xf(x)dx=-\frac{1}{6}$

Επιμέλεια: parmenides51

ΑΣΚΗΣΗ 152 (από erxmer)

Έστω μια παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:R\to R$ για την οποία υποθέτουμε ότι $f'(x)>0$ για κάθε $x\in R$ και $f(0)=1$. Θεωρούμε την συνάρτηση $g(x)=\begin{cases}\displaystyle\int_x^{2x}\frac{f(t)}{t}dt & ,x\neq 0\\ ln2 & ,x=0\end{cases}$

α. Να αποδείξετε ότι $f(x)\le\dfrac{g(x)}{ln2}\le f(2x)$ όταν $x>0$ και $f(2x)\le\dfrac{g(x)}{ln2}\le f(x)$ όταν $x<0$

β. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g είναι συνεχής στο σημείο $x_0=0$

γ. Να μελετήσετε την συνάρτηση g ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

Πηγή: <u>Β. Βασιλείου (εκδόσεις Εκδοτικός Όμιλος Συγγραφέων Καθηγητών</u>)

ΑΣΚΗΣΗ 153 (από Απόστολο Τιντινίδη) (σαν 164)

Έστω η συνεχής συνάρτηση $f:R\to R$ με $f(x)=\displaystyle\int_0^x\frac{4}{1+f^2(t)}dt$, για κάθε $x\in R$.

α. Να δείξετε ότι η f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο R.

β. Να δείξετε ότι η C_f έχει ένα σημείο καμπής του οποίου να βρείτε τις συντεταγμένες.

γ. Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε τα κοινά σημεία των C_f, $C_{f^{-1}}$

δ. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από τις C_f, $C_{f^{-1}}$

ΑΣΚΗΣΗ 154 (από Απόστολο Τιντινίδη)

Έστω οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις $f,g:R\to R$ για τις οποίες γνωρίζουμε ότι:

- η f είναι γνησίως αύξουσα και η g γνησίως φθίνουσα στο R
- $\displaystyle\int_0^2 f(t)dt=\int_0^2 g(t)dt$
- $\displaystyle\int_0^x f(t)dt+\int_2^{2-x} g(t)dt\ge x^2-2x$, για κάθε $x\in R$.

Να αποδείξετε ότι:

α. οι γραφικές παραστάσεις των f,g τέμνονται σε μοναδικό σημείο του διαστήματος $(0,2)$.

β. $f(0)+f(2)=g(0)+g(2)$

γ. υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in(0,2)$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=g(2-x_0)$

δ. υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(0,2)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)+g'(2-\xi)=2$

ΑΣΚΗΣΗ 155 (από Κώστα Τηλέγραφο)

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση f στο $[0,1]$ και η συνάρτηση $g(x)=\int_0^{f(x)}\sqrt{-t^2-t+2}\,dt$ με $\int_0^1 \mathrm{f(x)}dx=0$

Να δείξετε ότι

α. $f^2(x)\le -f(x)+2$

β. υπάρχει $\xi\in[0,1]$ ώστε $\int_0^{\xi}\mathrm{f}^2(\mathrm{t})dt=6\xi-\xi^2-3$.

γ. υπάρχει $\xi\in(0,1)$ ώστε $\int_0^{\xi^2}\mathrm{f(t)}dt=2\xi\mathrm{f}(\xi^2)$.

ΑΣΚΗΣΗ 156 (από Κώστα Τηλέγραφο)

Θεωρούμε την παραγωγίσιμη για κάθε $x\ge 0$ συνάρτηση f με $f(x)\ \ge 0$ για κάθε $x\ge 0$, με συνεχή πρώτη παράγωγο , για την οποία ισχύει $f\left(\int_0^1[f(x)-4]dx\right)+6x=\int_0^x\frac{f'(x-t)}{e^t}dt$ για κάθε $x\ge 0$.

Να αποδείξετε ότι:

α. $f\left(\int_0^1[f(x)-4]dx\right)=0$

β. $f(x)=3x^2+6x$ με $x\in[0,+\infty)$

γ. η f είναι αντιστρέψιμη.

δ. $\int_0^9 f^{-1}(x)dx=5$

Πηγή: Αντώνης Σπυριδάκης

ΑΣΚΗΣΗ 157 (από Δημήτρη Κατσίποδα)

Δίνεται η συνάρτηση $f:R\to R$, για την οποία ισχύει $f(x)=\int_{-x}^{x}\frac{e^{t^2}}{10^t+1}dt, x\in R$

α. Να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο R και να βρεθεί η $f'(x)$

β. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα στο R

γ. Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και να βρεθούν τα σημεία καμπής.

δ. Να δείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z για τους οποίους ισχύει $|z+i|=|\overline{z}+1|$ είναι η εφαπτομένη της C_f στην αρχή των αξόνων.

ε. Να βρείτε το όριο $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{\eta\mu 3x}$

Πηγή: Μ.Τουμάσης - Γ.Τσαπακίδης (εκδόσεις Σαββάλας)

Επιμέλεια: parmenides51

ΑΣΚΗΣΗ 158 (από Κώστα Τηλέγραφο)

Δίνεται η συνάρτηση $f : R \to R$ συνεχής στο R με f γνησίως φθίνουσα και η g με $g(x) = \int_0^1 f(xt)dt$,

α. Να δειχτεί ότι η g γράφεται $g(x) = \begin{cases} \dfrac{\int_0^x f(t)dt}{x}, & x \neq 0 \\ f(0), & x = 0 \end{cases}$

β. Να δειχτεί ότι η g είναι συνεχής

γ. Να δειχτεί ότι η g παραγωγίσιμη στο R αν $f'(0) \in R$

δ. Να δειχτεί ότι για κάθε $x > 0$ υπάρχει $\xi > 0$ τέτοιο ώστε $f(\xi) = \int_0^x \frac{f(t)}{x} dt$

ε. Να μελετηθεί η g ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

στ. Να δειχτεί ότι υπάρχει $\xi \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $\int_1^\xi f(t)dt = -2\xi f(\xi)$

ΑΣΚΗΣΗ 159 (από Περικλή Παντούλα)

Έστω η συνάρτηση $f(x) = \int_0^x (\eta\mu t - \sigma\upsilon\nu t)^7 \, dt$ με $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

α. Να δείξετε ότι $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

β. Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία, τα ακρότατα, τα κοίλα και τα σημεία καμπής

γ. Αν ο $n > 1$ είναι ακέραιος, να δείξετε ότι $f\left(\frac{1}{n}\right) < \frac{f(1)}{n}$

ΑΣΚΗΣΗ 160 (από Περικλή Παντούλα)

Έστω η συνεχής συνάρτηση $f : R \to R$ για την οποία ισχύει $f(x) = 5x + 1 + \int_0^x f(u)(x-u)du$, για κάθε $x \in R$.

α. Να αποδείξετε ότι η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και ισχύει $f''(x) = f(x)$, για κάθε $x \in R$

β. Να αποδείξετε ότι $\int_0^x \left(f''(t) - f(t)\right)e^t dt = 0$ για κάθε $x \in R$

γ. Να αποδείξετε ότι $\left(f'(x) - f(x)\right)e^x = 4$

δ. Να βρείτε τον τύπο της f

ε. Να αποδείξετε ότι η f είναι $1-1$ και να βρείτε την αντίστροφή της

Επιμέλεια: parmenides51

ΑΣΚΗΣΗ 161 (από Χρήστο Τσιφάκη)

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to R$ με $f(\beta)=2f(\alpha)$ ώστε να ισχύει :

$$f'(x)=2f^2(x)-4f(x)+4 \text{ για κάθε } x\in[\alpha,\beta].$$

Να δείξετε ότι:

α. η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.

β. $f(\alpha)>0$.

γ. ισχύει $\int_\alpha^\beta f(x)dx<ln2$.

δ. αν $f(\alpha)>1$, τότε:

 i. η f είναι κυρτή

 ii. δεν υπάρχουν στη γραφική παράσταση της f , τρία διαφορετικά σημεία τα οποία να είναι συνευθειακά.

Πηγή: Θέμα 67 από την Συλλογή Επαναληπτικών Ασκήσεων του xgastone

ΑΣΚΗΣΗ 162 (από Απόστολο Τιντινίδη)

Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $[0,1]$ και με σύνολο τιμών το $[0,1]$.

α. Να δείξετε ότι $\int_0^1 f(t)dt<1$

β. Να δείξετε ότι η εξίσωση $\int_0^x f(t)dt=2x-1$ έχει μοναδική λύση $x_0\in(0,1)$

γ. Να βρείτε τον αριθμό x_0 του (β) ερωτήματος αν γνωρίζετε ότι το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την C_f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=0$ και $x=x_0$ είναι 0,5 τ.μ.

δ. Να δείξετε ότι $\int_0^x f(t)dt<2x$ για κάθε $x\in(0,1)$

ΑΣΚΗΣΗ 163 (από Βασίλη Κακαβά)

α. Να βρεθεί η μεγαλύτερη τιμή του $x>0$ για την οποία ισχύει $x-x\ln x\geq 0$

β. Αν $f(x)=x-\lambda\ln x,\ x>0$ με $\lambda>0$ να βρείτε την εφαπτομένη (ε) της γραφικής παράστασης της f , ώστε τα σημεία της f , να είναι όλα πάνω από τα σημεία της (ε) εκτός του σημείου επαφής

γ. Να μελετηθεί ως προς την μονοτονία η συνάρτηση $F(x)=\int_1^{\ln x}(e^t-et)dt$

δ. Αν $a>0$ να δείξετε ότι $\int_1^a(e^t-et)dt>1-\frac{e}{2}$

ΑΣΚΗΣΗ 164 (από Περικλή Παντούλα) (σαν 153)

Έστω η συνεχής συνάρτηση $f: R \to R$ για την οποία ισχύει $f(x)=\int_0^x \frac{4}{f^2(t)+1}dt$, για κάθε $x \in R$.

α. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο R

β. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f έχει ένα σημείο καμπής, το οποίο και να βρείτε

γ. Να αποδείξετε ότι $f^3(x)+3f(x)=12x$

δ. Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=x$

ε. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_0^3 f(x)dx$

ΑΣΚΗΣΗ 165 (από Περικλή Παντούλα)

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:[a,b] \to R$ με $0<a<b$ τέτοια, ώστε για τους μιγαδικούς $z_1=a+if(a)$ και $z_2=b+if(b)$ να ισχύει $w=\frac{z_1}{z_2} \in R$.

α. Να αποδείξετε ότι $|z_1+iz_2|=|z_1-iz_2|$

β. Να αποδείξετε ότι ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle για την συνάρτηση $g(x)=\frac{f(x)}{x}$ στο διάστημα $[a,b]$

γ. Να αποδείξετε ότι υπάρχει εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων

δ. Αν ισχύει ότι $\lim_{x\to a}\int_a^x \frac{f(x+a-t)}{(x-a)(x+a-t)}dt=1$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f'(x)=1$ έχει λύση στο (a,b)

ΑΣΚΗΣΗ 166 (από dennys)

Δίνεται η συνάρτηση $f:(0,+\infty) \to R$ παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο και $f'(x)\neq 0$ για κάθε $x>0$.

Αν η γραφική παράσταση της περνά από τα σημεία $\mathrm{A}(1,1), \mathrm{B}\left(\frac{1}{2},2\right)$ και $g(x)=\int_2^{f(x)}\frac{1}{1-f(t)}dt$ τότε:

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της $g(x)$

β. Να βρείτε την μονοτονία και τα ακρότατα της $g(x)$

γ. Αν για κάθε $x>0$ ισχύει $f(f(x))=x$, τότε να δείξετε ότι :

i. $f'(1)=-1$

ii. Υπάρχει $x_o \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $g'(x_o)=\frac{2}{x_o-1}$

iii. Υπάρχει $\xi \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)=\frac{-3}{2}$

ΑΣΚΗΣΗ 167 (από Δημήτρη Κατσίποδα)

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση f για την οποία ισχύουν:

$$f(0)=1 \text{ και } f'(x)>f(x) \text{ για κάθε } x\in[0,+\infty)$$

α. Να δείξετε ότι για κάθε $x\in[0,+\infty)$ ισχύει $f(x)>e^x$

β. Αν για κάθε $x\in[0,+\infty)$ ισχύει $\int_0^x f(t)dt+2\alpha^x+e^x\geq 3$ να προσδιορίσετε την τιμή του $\alpha\in(0,1)\cup(1,+\infty)$

γ. Να δείξετε ότι η εξίσωση $\int_0^x f(t)dt+e^x=x+2$ έχει τουλάχιστον μια λύση στο διάστημα $(0,1)$

ΑΣΚΗΣΗ 168 (από Δημήτρη Κατσίποδα)

Δίνεται κυρτή συνάρτηση $f:[0,+\infty)\to R$ με συνεχή δεύτερη παράγωγο, για την οποία ισχύει $f(0)=1$ και $\int_0^1 \frac{f''(x)-f(x)}{e^x}dx=\frac{f'(1)+f(1)-e}{e}$.

α. Να αποδείξετε ότι $f'(0)=0$

β. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x\in(0,+\infty)$ ισχύει $f(x)>1$

γ. Αν επιπλέον ισχύει ότι $f(1)=2$, να δείξετε ότι $1<\int_0^1 f(x)dx<\frac{3}{2}$

δ. Θεωρούμε την συνάρτηση $g(x)=\int_1^x\left[f(t)-\ln\left(f(t)\right)\right]dt, x\in[0,+\infty)$

i. Να δείξετε ότι η g είναι κυρτή

ii Να αποδείξετε ότι για κάθε $x\in(0,+\infty)$ ισχύει $e^{f(x)}>ef(x)$

iii. Να αποδείξετε ότι $\int_1^2 e^{f(x)-1}dx>\int_1^2 \ln\left(f(x)\right)dx$

Πηγή: Β.Παπαδάκης (Η Επανάληψη, εκδόσεις Σαββάλας)

ΑΣΚΗΣΗ 169 (από Γιώργο Απόκη)

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to R$ για την οποία ισχύουν :

$$f(1)=1 \text{ και } x^2(f'(x)-1)=\ln x-1 \text{ για κάθε } x>0$$

α. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=f(x)+\frac{\ln x}{x}, x>0$ ισούται με την ταυτοτική στο $(0,+\infty)$.

β. Να βρείτε τον τύπο της f.

γ. Να αποδείξετε ότι ισχύει $x^{\frac{1}{x+1}} \geq e^{1-x}$ όταν $x \geq 1$

δ. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=1, x=e$.

Πηγή: Μ.Τουμάσης - Γ.Τσαπακίδης (εκδόσεις Σαββάλας)

ΑΣΚΗΣΗ 170 (από Δημήτρη Κατσίποδα)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln(e^x-1)-\ln x, x>0$

α. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x>0$ ισχύει $f(x)>0$

β. Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

γ. Να δείξετε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\int_{x+1}^{x+2} f(t)dt\right)=+\infty$

δ. Να δείξετε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\int_{\frac{1}{x}}^{\frac{2}{x}} xf(t)dt\right)=0$

ΑΣΚΗΣΗ 171 (από Δημήτρη Κατσίποδα)

Έστω η f μια συνεχής συνάρτηση στο $[1,+\infty)$, για την οποία ισχύει ότι $f(x)>0$ για κάθε $x\geq 1$

Ορίζουμε τις συναρτήσεις $G(x)=\int_1^x t^2 f(t)dt, x\geq 1$ και $H(x)=\int_1^x tf(t)dt, x\geq 1$

α. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $F(x)=\dfrac{G(x)}{H(x)}$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(1,+\infty)$

β. Θεωρούμε τη συνάρτηση $P(x)=xH(x)-G(x), x\geq 1$. Να δείξετε οτι:

i. Για κάθε $x\geq 1$ ισχύει $P(x)\geq 0$

ii. Η συνάρτηση P είναι κυρτή στο $[1,+\infty)$

γ. Να βρεθεί το όριο $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{H(x)\int_1^{x^2}\ln t dt}{G(x)\cdot(x-1)^2}$

Πηγή: Γ.Μιχαηλίδης (εκδόσεις Διόφαντος)

ΑΣΚΗΣΗ 172 (από Μάκη Χατζόπουλο)

Δίνεται η συνάρτηση $f : R \to R$ με $f'(x+1) = 2 + f'(1-x) = 2x$, για κάθε $x \in R$ και $f(1) = 0$

α. Να δείξετε ότι $f(1+x) + f(1-x) = 2x,\ x \in R$

β. Να βρείτε την συνάρτηση $g(x) = \int_{1-x}^{1+x} f(t)\,dt - x^2$

γ. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I = \int_{-1}^{3} f(x)\,dx$

ΑΣΚΗΣΗ 173 (από Μάκη Χατζόπουλο)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \int_{2}^{x} \sqrt{u^2 - u}\,du$.

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f

β. Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία, ακρότατα και να βρείτε τις ρίζες και το πρόσημό της

γ. Να μελετήσετε την συνάρτηση $g(x) = \int_{3}^{x} \left(\int_{2}^{t} \left(e^t \sqrt{u^2 - u} \right) du \right) dt$ ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα

δ. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν διαφορετικά $\xi_1, \xi_2 \in (1,3)$ τέτοια ώστε $e^{\xi_1} f(\xi_1) + e^{\xi_2} (\xi_2) = \int_{1}^{3} e^t f(t)\,dt$

ε. Να αποδείξετε ότι: $\int_{3}^{x} \left(e^{t-3} \dfrac{f(t)}{f(3)} \right) dt \geq x - 3$ για κάθε $x \in (2, +\infty)$

ΑΣΚΗΣΗ 174 (από Μπάμπη Στεργίου)

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = 3^x$ και $g(x) = -x^2 + 9x - 5$.

α. Να βρείτε τις εφαπτόμενες της C_g που διέρχονται από το σημείο $A(1,4)$.

β. Να λύσετε την εξίσωση $f(x^2 - 5x + 6) = g(x) - 4x$.

γ. Να υπολογίσετε τα όρια : $A = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x+1) + 5f(x) - 2^x}{f(x+1) + f(x) + 2^x}$ και $B = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x+1) - f(x) - 2^x}{f(x+1) + f(x) + 2^x}$

δ. Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g .

ε. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I(\alpha) = \int_{-\alpha}^{\alpha} \dfrac{x^2 + 1}{f(x) + 1} dx$ με $\alpha \in R$

Επιμέλεια: parmenides51

ΑΣΚΗΣΗ 175 (από Χάρη Γ. Λάλα)

Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη και γνησίως φθίνουσα στο R με $f(0)=0$ και $F(x)=\int_0^x f(t)dt$

α. Να εξετάσετε αν η $F(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο R.

β. Να εξεταστεί η $F(x)$ ως προς την μονοτονία της.

γ. Να δείξετε ότι $F(x)\leqslant 0$.

δ. Να δείξετε ότι η εξίσωση $1+\int_0^{3x+1} f(t)dt = x+\int_0^{x+1} f(t)dt$ έχει μία ακριβώς ρίζα στο $(0,1)$.

ΑΣΚΗΣΗ 176 (από Βασίλη Μαυροφρύδη)

α. Ας είναι $f:\Delta\to R$ μία συνεχής συνάρτηση στο διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ.
Να δείξετε ότι η f είναι αύξουσα στο Δ (αντίστοιχα φθίνουσα) όταν και μόνο όταν $f'(x)\ge 0$,
($f'(x)\le 0$ αντίστοιχα) για κάθε x εσωτερικό σημείο του Δ

β. Έστω οι συνεχείς συναρτήσεις $f,g:[0,a]\to R$ που είναι τέτοιες ώστε να ισχύουν

$\int_0^a f(t)dt=\int_0^a g(t)dt$, f αύξουσα στο $[0,a]$ και g φθίνουσα στο $[0,a]$.

Να δείξετε ότι:

i. η συνάρτηση $F(x)=\dfrac{\int_0^x f(t)dt}{x}, x\in(0,a]$ είναι αύξουσα και η συνάρτηση $G(x)=\dfrac{\int_0^x g(t)dt}{x}$ είναι φθίνουσα.

ii. ισχύει $\int_0^x f(t)dt\le\int_0^x g(t)dt$ για κάθε $x\in[0,a]$

iii. για κάθε $x,y\in[0,a]$ ισχύει $x\int_0^y g(t)dt\ge y\int_0^x f(t)dt$

ΑΣΚΗΣΗ 177 (από Χρήστο Κανάβη)

Θεωρούμε την συνάρτηση f που έχει δεύτερη παράγωγο συνεχή στο διάστημα $[0,e]$ με $f(0)=0$.

α. Να δειχθεί ότι $\int_0^e xf''(x)dx=ef'(e)-f(e)$

β. Να δειχθεί ότι υπάρχει $\xi\in(0,e)$ τέτοιο ώστε $\int_0^e xf''(x)dx=e\left[f'(e)-f'(\xi)\right]$

γ. Να δειχθεί ότι υπάρχει $\xi_1\in(\xi,e)$ τέτοιο ώστε $\int_0^e xf''(x)dx=ef''(\xi_1)(e-\xi)$

δ. Να δειχθεί ότι υπάρχει $\xi_2\in[0,e]$ τέτοιο ώστε $\int_0^x xf''(x)dx=e\xi_2 f''(\xi_2)$

Επιμέλεια: parmenides51

ΑΣΚΗΣΗ 178 (από Απόστολο Τιντινίδη)

Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο R με $f(1)=2$ και $f'(x)>0$ για κάθε $x\in R$.
Να δείξετε ότι:

α. Η συνάρτηση $g(x)=\int_1^x f(t)\,dt$ είναι κυρτή στο R και να βρείτε την εφαπτομένη της στο $A(1,g(1))$.

β. Αν $a>1$ τότε $(a-1)\int_0^1 f(t)\,dt<\int_1^a f(t)\,dt$

γ. Για κάθε $x\geq 1$ ισχύουν:

i. $\int_1^x\left[\int_1^u f(t)\,dt\right]du\geq (x-1)^2$

ii. $\int_1^x (x-t)f(t)\,dt\geq (x-1)^2$

ΑΣΚΗΣΗ 179 (από Απόστολο Τιντινίδη)

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=\int_3^{x-2}\left(\sqrt{2}-\sqrt{t^2+t}\right)dt$.

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της D_f.

β. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

γ. Να εξετάσετε αν η f έχει σημεία καμπής.

δ. Να δείξετε ότι για κάθε $x\in D_f$ ισχύει $\int_1^3\sqrt{t^2+t}\,dt\geq f(x)+2\sqrt{2}$

ε. Να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(3,5)$ τέτοιο ώστε $\sqrt{\xi^2-3\xi+2}\geq\dfrac{2\sqrt{2}+f(x)}{2}$

ΑΣΚΗΣΗ 180 (από Χάρη Γ. Λάλα)

Έστω $z_1,z_2\in C$ και η συνάρτηση f ορισμένη στο R με τύπο $f(x)=\int_0^{2x}\left|z_1 t+z_2\right|dt$ για την οποία $f(x)\geq x$ για κάθε $x\in \mathrm{R}$. Να δείξετε ότι :

α. $|z_2|=\dfrac{1}{2}$

β. Η εξίσωση $f(x)=2020$ έχει μοναδική λύση στο $(0,+\infty)$.

γ. Για κάθε $x\in R$ ισχύει ότι $\int_0^x\left|z_1 t+\dfrac{z_2}{2}\right|dt\geqslant\dfrac{x}{4}$

ΕΠΙΛΟΓΗ + ΕΠΙΛΥΣΗ ΑΣΚΗΣΕΩΝ ΣΥΛΛΟΓΗΣ: 29/01/2012 – 10/02/2012

Πηγή – Απαντήσεις
http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=54&t=22769

Επιμέλεια: parmenides51

ΕΠΙΛΟΓΗ + ΕΠΙΛΥΣΗ ΑΣΚΗΣΕΩΝ ΣΥΛΛΟΓΗΣ: 29/01/2012 – 10/02/2012

Πρότειναν οι:

Απόστολος Τιντινίδης
Βασίλης Κακαβάς
Βασίλης Μαυροφρύδης
Γιάννης Κουτσούκος
Γιάννης Σταματογιάννης
Γιώργος Απόκης
Δημήτρης Κατσίποδας
Κώστας Τηλέγραφος
Μάκης Χατζόπουλος
Μπάμπης Στεργίου
Παναγιώτης Γκριμπαβιώτης
Περικλής Παντούλας
Στάθης Κούτρας
Χάρης Γ. Λάλας
Χρήστος Κανάβης
Χρήστος Κυριαζής
Χρήστος Τσιφάκης
dennys
pito

Έλυσαν (*) οι:

Απόστολος Τιντινίδης
Βασίλης Κακαβάς
Γιάννης Κουτσούκος
Δημήτρης Κατσίποδας
Θάνος Μάγκος
Κώστας Τηλέγραφος
Μάκης Χατζόπουλος
Νίκος Αλεξανδρόπουλος
Παναγιώτης Γκριμπαβιώτης
Περικλής Παντούλας
Στάθης Κούτρας
Χάρης Γ. Λάλας
dennys
erxmer
pastavr
parmenides51
pito

Πηγή – Απαντήσεις

(*)http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=54&t=22769

Επιμέλεια: parmenides51