******ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ Α1. «ΜΙΓΑΔΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ»******

Θέμα 1

Α. Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί z_1, z_2 . Να αποδείξετε ότι: $\overline{z_1 . z_2} = \overline{z_1} . \overline{z_2}$ μον_6

Β Αν η εικόνα του $z \in C$ είναι σημείο του 2ου τεταρτημορίου, να παραστήσετε στο μιγαδικό επίπεδο τις εικόνες των αριθμών $z, -z, iz, \frac{z}{i}$. μον_6

Γ Να ερμηνεύσετε γεωμετρικά το $|z_1 - z_2|$ καθώς και το $|z_1 + z_2|$ μον_4

Δ Να χαρακτηρίσετε Σ (σωστή) ή Λ (λάθος) κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις : μον_4

Α) $|z+i| = |\overline{z} - i|$ για κάθε $z \in C$

Β) $|z|^2 = z^2$ για κάθε $z \in C$

Γ) $\overline{z+2i} = z - 2i$ για κάθε $z \in C$

Δ) $\left|\frac{z^2 i}{\overline{z}}\right| = |-z|$ για κάθε $z \in C^*$

Δ Να χαρακτηρίσετε Σ (σωστή) ή Λ (λάθος) κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις : μον_5

α) Ισχύει ότι οι εικόνες δύο αντίθετων μιγαδικών είναι σημεία συμμετρικά ως προς τον άξονα $x'x$

β) Για κάθε $z \in C$ ισχύει ότι $z^2 \geq 0$

γ) Για κάθε $z \in C$ ισχύει ότι $Im(z_1 + z_2) = Im(z_1) - Im(z_2)$

δ) Για κάθε $z \in C$ ισχύει ότι $Im(z) = \frac{z - \overline{z}}{2}$

ε) Ισχύει η ισοδυναμία $z = w \Leftrightarrow |z| = |w|$ για κάθε $z, w \in C$

ΘΕμα 2

Δίνεται η εξίσωση $z^2 + \beta z + \gamma = 0$ με $\beta, \gamma \in R$ και $z \in C$, που έχει λύση το μιγαδικό $z_1 = 1 + i\sqrt{3}$.

Α Να βρείτε την άλλη λύση της εξίσωσης z_2 μον_8

Β Να αποδείξετε ότι: $\beta = -2, \gamma = 4$ μον_8

Γ Τον αριθμό $(2-2i)^{2004} + (2+2i)^{2004}$ μον_9

ΘΕμα 3

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(z) = |iz - 1|$, $z \in C$.

Α) Αν $f(z) = f(\overline{z})$, να αποδείξετε ότι ο z είναι πραγματικός. μον_5

Β) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών z με $f(z) = 3$ μον_6

Γ) Αν z_1, z_2 είναι δύο μιγαδικοί με $f(z_1) = f(z_2) = 3$, να αποδείξετε ότι $|z_1 - z_2| \leq 6$ μον_7

Δ) Αν $w = \sqrt{5} + i$, να βρείτε τον $z \in C$ με $f(z) = 3$ και $|z - w| = 6$. μον_7

ΘΕμα 4

Α) Έστω $\overline{z} = (\kappa + 2) + (2\kappa + 1)i$, $\kappa \in R$. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του μιγαδικού z, καθώς και ο z_o με το ελάχιστο μέτρο. μον_7

Β) Δίνεται ο μιγαδικός $w = (\alpha - 2) + (\beta + 1)i$, $\alpha, \beta \in R$. Αν τα σημεία $A(\alpha, \beta)$ ανήκουν σε κύκλο κέντρου $O(0,0)$ και ακτίνας $\rho = 2$ τότε:

α) Να προσδιορίσετε γεωμετρικά το σύνολο των σημείων που είναι εικόνες των μιγαδικών w μον_5

β) Να βρείτε τους μιγαδικούς w με το ελάχιστο και το μέγιστο μέτρο αντίστοιχα. μον_6

Γ) Να βρείτε την ελάχιστη και τη μέγιστη τιμή της παράστασης $|z - w|$ μον_7