

ΘΕΜΑ 1:

- A) Να διατυπώσετε και να δώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία της τριγωνικής ανισότητας μον_9
- B. Ποιες από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστές και ποιες λανθασμένες; μον_10
- α) Το μέτρο ενός μιγαδικού αριθμού $z = \alpha + \beta i$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ δίνεται από τον τύπο $|z| = \alpha^2 + \beta^2$.
- β) Για κάθε φανταστικό αριθμό z ισχύει $|z| = \alpha^2 + \beta^2$.
- γ) Για κάθε $z \in \mathbb{C}$ ισχύει ότι $|z| - |w| \leq |z - w| \leq |z| + |w|$.
- δ) Η ισότητα $z^2 = |z|^2$ ισχύει μόνο όταν $z \in \mathbb{R}$.
- ε) Η εξίσωση $|z - i| = |\bar{z} - 1|$ παριστάνει ευθεία.
- Γ. Σε καθεμία από τις παρακάτω ερωτήσεις να σημειώσετε τη σωστή απάντηση, μον_6
- α) Ο μιγαδικός $z = \alpha + \beta i$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ είναι ίσος με 1 όταν:
 Α: $\alpha = 1$ Β: $\alpha = 1$ ή $\beta = 0$ Γ: $\alpha = 1$ και $\beta = 0$ Δ: $\alpha = \beta = 1$
- β) Ένας μιγαδικός z είναι, πραγματικός αν:
 Α: $z + \bar{z} = 0$ Β: $z - \bar{z} = 0$ Γ: $\text{Im}(z) = -\text{Re}(z)$ Δ: $\text{Im}(z) = \text{Re}(z)$
- γ) Αν μια τετραγωνική ρίζα του w είναι ο z , τότε η άλλη τετραγωνική ρίζα του w είναι ο:
 Α: z^2 Β: \bar{z} Γ: $-z$ Δ: iz

ΘΕΜΑ 2:

- Δίνεται η εξίσωση $z\bar{z} + 4\text{Re}[(1 - 2i)z] + 4 = 0$ (1) με $z \in \mathbb{C}$.
- α. Να δείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει άπειρες λύσεις στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών. Μον_6
- β. Να εξετάσετε αν ο μιγαδικός $w = 1 + i^2 + i^3 + \dots + i^{2006}$ είναι λύση της (1). Μον_6
- γ. Αν z_1, z_2 είναι δύο τυχαίες λύσεις της (1), να βρείτε τη μέγιστη τιμή της παράστασης $\Gamma = |z_1 - z_2|$. Μον_6
- δ. Αν v_1, v_2 μιγαδικοί αριθμοί οι οποίοι είναι λύσεις της (1) και για τους οποίους η παράσταση $\Gamma = |v_1 - v_2|$ γίνεται μέγιστη, να βρείτε την τιμή του $\Delta = |v_1 + v_2|$. Μον_7

ΘΕΜΑ 3:

Έστω οι μη μηδενικοί μιγαδικοί αριθμοί z και w για τους οποίους ισχύει η σχέση $z^2 = 4 + 3izw$
 Δίνεται ότι ο μιγαδικός αριθμός z έχει μέτρο 1

- A) Να βρείτε την απόσταση των εικόνων A και B των μιγαδικών αριθμών z και $3iw$ αντίστοιχα στο μιγαδικό επίπεδο. Μον_8
- B) Να δείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος $M(x, y)$ των εικόνων του μιγαδικού αριθμού w στο μιγαδικό επίπεδο είναι έλλειψη με εξίσωση $9x^2 + 25y^2 = 25$ Μον_9
- Γ) Να βρείτε την ελάχιστη και τη μέγιστη τιμή του $|w|$ Μον_8

ΘΕΜΑ 4

Έστω η συνάρτηση f με $f(z) = \frac{(z-i) \cdot (\bar{z}+i)}{z+\bar{z}}$, $z \in \mathbb{C}$ και $\text{Re}(z) \neq 0$.

- A. Να δείξετε ότι: $f\left(\frac{1}{z}\right) = f(z)$. Μον_8
- B. Να δείξετε ότι: $f\left(\frac{1}{-iz}\right) \in \mathbb{R}$. Μον_8
- Γ. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων του μιγαδικού z για τον οποίο ισχύει:
 $\text{Re}\left(f\left(\frac{1}{z}\right)\right) = \text{Im}\left(f\left(\frac{i}{z}\right)\right) + 2\text{Re}(z)$ Μον_9