

**ΘΕΜΑ 1<sup>ο</sup>**

- A) Με τι είναι ίση η δύναμη  $i^{2v+1}$  αν  $i^v = -i$ ,  $v \in \mathbb{N}$  Mov\_4
- B) Αν  $i^v$ ,  $v \in \mathbb{N}$  είναι μια δύναμη του  $i$  ποιο είναι το μέτρο της; Mov\_3
- Γ) Να χαρακτηρίσετε κάθε μια από τις επόμενες προτάσεις με την ένδειξη Σωστή ή Λάθος
- α) Υπάρχουν μιγαδικοί αριθμοί που είναι αντίθετοι με τον συζυγή τους; Mov\_2
- β) Ισχύει ότι  $|z| - |w| \leq |z - w| \leq |z| + |w|$  για κάθε  $z, w \in \mathbb{C}$ ; Mov\_2
- γ) Υπάρχουν μιγαδικοί για τους οποίους ισχύει ότι  $z = \frac{-2}{\bar{z}}$ ; Mov\_2
- δ) Ποιοι από τους μιγαδικούς  $z\bar{z}$ ,  $z^2$ ,  $z^{2005} + (\bar{z})^{2005}$ ,  $z - \bar{z}$ ,  $|z|$  είναι πραγματικοί; Mov\_2

B) Να αντιστοιχίσετε τις εξισώσεις της πρώτης στήλης του διπλανού πίνακα, με την εξίσωση της γραμμής του δεύτερου πίνακα (αξιοποιώντας τη γεωμετρική ερμηνεία του μέτρου) και το είδος της γραμμής στην τρίτη στήλη

Mov\_10

Εξίσωση	Εξίσωση γραμμής	Είδος γραμμής
$ z - 1  =  z - i $		
$ z + 1  =  \bar{z} + i $		
$ z - 2002 - 2002i  = 2002$		
$ z - i  +  z + i  = 6$		
$  z - i  -  z + i   = 1$		

**ΘΕΜΑ 2**

Εστω  $f(z) = |iz - 1|$ ,  $z \in \mathbb{C}$

- A) Αν  $f(z) = f(\bar{z})$  να αποδείξετε ότι ο  $z$  είναι πραγματικός Mov\_8
- B) Αν  $f(z) = 5$  να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών  $z$  Mov\_9
- Γ) Αν  $z_1, z_2$  δύο μιγαδικοί με  $f(z_1) = f(z_2) = 5$  να αποδείξετε ότι  $|z_1 - z_2|^2 \leq 100$  Mov\_8

**ΘΕΜΑ 3**

Εστω ο μιγαδικός αριθμός  $z_A = -1 + i$ ,  $A(z_A)$  η εικόνα του στο επίπεδο και η συνάρτηση  $f(z) = \frac{2z - i}{z + 1 - i}$  με  $z \neq z_A$

- A) Αν  $z = x + yi$  με  $x, y \in \mathbb{R}$ , να υπολογίσετε το  $\text{Re}(f(z))$  και το  $\text{Im}(f(z))$  ως συνάρτηση των  $x, y$ . Mov\_5
- B) Να βρείτε το είδος της καμπύλης στην οποία ανήκουν τα σημεία  $M(z)$  για τα οποία ισχύει ότι  $f(z) \in \mathbb{R}$  Mov\_5
- Γ) Να βρείτε το είδος της καμπύλης στην οποία ανήκουν τα σημεία  $M(z)$  για τα οποία ισχύει ότι  $f(z) \in I$ , όπου  $I$  είναι το σύνολο των φανταστικών αριθμών. Mov\_5
- Δ) Αν τα σημεία Β,Γ είναι εικόνες των μιγαδικών,  $z_B = \frac{1}{2}i$ ,  $z_\Gamma = -\frac{1}{4} + \frac{5}{4}i$  αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι αυτά ανήκουν στις καμπύλες που ανήκουν τα  $M(z)$  των ερωτημάτων β) και γ) αντίστοιχα. Mov\_5
- Ε) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές. Mov\_5

**ΘΕΜΑ 4**

Εστω ο μιγαδικός  $z$  και η παράσταση  $f(z) = \frac{i}{|z - 2| - |z - 1|}$

- A) Να βρείτε τους μιγαδικούς  $z$  για τους οποίους ορίζεται η  $f$  Mov\_5
- B) Να αποδείξετε ότι  $|f(z)| \geq 1$  Mov\_5
- Γ) Αν  $f(z) = i$ , τότε
- α) να αποδείξετε ότι  $|z - 1| + \text{Re}(z) = 1$  Mov\_5
- β) να αποδείξετε ότι  $\text{Re}(z) \leq 1$  Mov\_5
- γ) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των μιγαδικών που ικανοποιούν τη σχέση του α) ερωτήματος. Mov\_5