***********************ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ Β 5. -ΜΙΓΑΔΙΚΟΙ - ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ *******************************

ΖΗΤΗΜΑ 1 Α

Α) Να γράψετε πότε μια συνάρτηση λέγεται γνήσια φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ και πότε $1-1$. Μον_6

Β) Να αποδείξετε ότι αν μια συνάρτηση είναι γνήσια αύξουσα και παίρνει τιμές αρνητικές τότε η συνάρτηση $\frac{1}{f}$ είναι γνήσια φθίνουσα. Μον_5

Γ) Σε καθεμία από τις παρακάτω ερωτήσεις να σημειώσετε τη σωστή απάντηση. Μον_14

α Έστω η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=1-2^x$. Η συνάρτηση g της οποίας η γραφική παράσταση είναι συμμετρική της C_f ως προς άξονα $y'y$ έχει τύπο:

Α: $g(x)=1+2^x$ Β: $g(x)=1-2^{-x}$ Γ: $g(x)=-1+2^x$ Δ: $g(x)=\ln(x-1)$

β. Η συνάρτηση της οποίας η γραφική παράσταση είναι συμμετρική της γραφικής παράστασης της $y=f(x)$ ως προς τον άξονα $x'x$ είναι η:

Α: $y=f(-x)$ Β: $y=-f(x)$ Γ: $y=|f(x)|$ Δ: $y=2f(x)$ Ε: $y=-f(-x)$

γ. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x)=x^3+\kappa x^2+\lambda x-5$. Αν $f(1)=8$ και $f(-1)=4$ η τιμή της παράστασης $\kappa+2\lambda$ είναι ίση με: Α: 0 Β: 8 Γ.. 13 Δ: -11 Ε: 11 ΣΤ κανένα από τα προηγούμενα

δ. Η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=\sqrt{\alpha x^2+\alpha x}$, $\alpha<0$, έχει πεδίο ορισμού τους πραγματικούς αριθμούς x, για τους οποίους: Α: $x>0$ Β: $x<-1$ Γ $-1\le x\le 0$ Δ: $x<\alpha$ Ε: $x>-1$

ε. Από τις παρακάτω συναρτήσεις δεν έχει αντίστροφη η συνάρτηση:

Α: $y=\eta\mu x$, $x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, Β: $y=x^3+1$ Γ: $y=(x+1)(x-1)+4$ Δ: $y=\frac{2}{3}e^x$ Ε: $y=\ln(x-3)$, $x>3$

στ. Αν η συνάρτηση g έχει αντίστροφη την f, τότε το $g(f(x))$ είναι ίσο με:

Α: 1 Β: $g(x)f(x)$ Γ $\frac{1}{x}$ Δ: x Ε: κανένα από τα προηγούμενα

ζ) Οι συναρτήσεις $f,g:R\to R$ είναι αντιστρέψιμες και $f\circ g=g\circ f$, να αποδείξετε ότι $f\circ g^{-1}=g^{-1}\circ f$

ΖΗΤΗΜΑ 2

Έστω η συνάρτηση $f(x)=x^3+3x+12$

Α) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται Μον_5

Β) Να βρείτε την $f^{-1}(8)$ Μον_5

Γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(3+\ln x)=48$

Δ) Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και f^{-1} Μον_5

Ε) Να λύσετε την ανίσωση $f^{-1}\left(e^{2x}+4e^x\right)<0$ Μον_5

Στ) Να λύσετε την εξίσωση $\sigma\upsilon\nu^3 x+3\sigma\upsilon\nu x=\frac{13}{8}$ Μον_5

Ζ) Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των του εικόνων του μιγαδικού z, αν ισχύει ότι $\left(|z-i|+1\right)^3+3|z-i|=33$ Μον_5

ΖΗΤΗΜΑ 3

Δίνεται $f:R\to R$ με $(f\circ f)(x)=f(x)-5x$, $\forall x\in R$.

Α) Να αποδείξετε ότι :

α) η f αντιστρέφεται Μον_5

β) η f δεν είναι γνήσια φθίνουσα Μον_5

γ) $f(0)=0$ Μον_5

Β) Να λύσετε την εξίσωση $f(f(2x))+e^{x-2}=f(2x)+3-11x$ Μον_5

Γ) Να λυθεί η εξίσωση: $f^{-1}(\mathrm{Im}(z)+\mathrm{Re}(z))=0$ όπου z ο μιγαδικός $z=(2x-1)+(x^2-8x+6)i$ με $x\in R$ Μον_5

ΖΗΤΗΜΑ 4

Έστω ότι η γραφική παράσταση μιας γνησίως μονότονης συνάρτησης $f:R\to R$ που διέρχεται από τα σημεία $A(5,9)$ και $B(2,3)$.

Α) να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα. Μον_5

Β) να λύσετε την εξίσωση $f\left(3+f^{-1}(x^2+2x\right)=9$ Μον_9

Γ) να λύσετε την ανίσωση $g(2f(10-4x)-f(x))>x$ όπου $g:R\to R$ είναι συνάρτηση για την οποία ισχύει ότι $(f\text{o}g)(x)=x$ για κάθε $x\in R$ Μον_11