**********************************ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ Β6. ΟΡΙΑ - ΜΙΓΑΔΙΚΟΙ*************************

ΘΕΜΑ 1

Α) Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\ldots+\alpha_1 x+\alpha_0\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\alpha_\nu x^\nu$ Μον_7

Β) Πότε θα λέμε ότι μια ακολουθία α_ν έχει όριο το $l\in R$. Μον_6

Γ) **Να χαρακτηρίσετε κάθε μια από τις επόμενες προτάσεις με την ένδειξη Σωστή ή Λάθος** Μον_12

α Αν μια συνάρτηση f έχει όριο στο σημείο x_o έναν πραγματικό αριθμό ℓ τότε αναγκαστικά το x_o ανήκει στο πεδίο ορισμού της.

β. Τα πλευρικά όρια μιας συνάρτησης f, όταν το x παίρνει τιμές κοντά στο x_o συμπίπτουν πάντοτε.

γ Το όριο μιας συνάρτησης f στο x_0 εξαρτάται από την τιμή της συνάρτησης στο σημείο αυτό.

δ Αν μια συνάρτηση f έχει όριο στο σημείο x_o, τότε αυτό είναι μοναδικό.

ε Αν $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\lambda\in R$, τότε $\lim\limits_{x\to x_0}f(-x)=-\lambda$.

στ Αν f περιττή και $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\lambda\in R$, τότε $\lim\limits_{x\to x_0}f(-x)=-\lambda$.

ζ Αν f περιττή και $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\lambda\in R$, τότε $\lim\limits_{x\to -x_0}f(x)=-\lambda$.

η Αν $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)+g(x))=\lambda$, τότε οι συναρτήσεις f και g έχουν πάντοτε όριο στο x_o.

θ Έστω η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{|x|}{x}-1$ ισχύει ότι $\lim\limits_{x\to0+}f(x)=0=\lim\limits_{x\to0-}f(x)$

ι Μια συνάρτηση f έχει στο $x_o=2009$ όριο το -2009. Τότε η f παίρνει αρνητικές τιμές κοντά στο 2009

ια Αν $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=\lambda\in R$ τότε $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(3x)}{x}=3\lambda$

ιβ Αν $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)-\lambda=0$, τότε $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\lambda$.

ΘΕΜΑ 2

Α Δίνεται η συνάρτηση f με $A_f=(0,1)\cup(1,+\infty)$ ώστε: $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)+\eta\mu\dfrac{\pi(x-1)}{2}-1}{\sqrt{x}-1}=\dfrac{\pi}{2}$. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)-1}{x-1}$ Μον_8

Β Αν $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{xf(x)-\sqrt{x}}{x-1}=3$. Να υπολογίσετε τα όρια: $\lim\limits_{x\to1}f(x)$ και $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f^2(x)+2f(x)-3}{f^2(x)-1}$ Μον_9

Γ Να βρείτε τις τιμές των $\alpha,\beta\in R$ ώστε $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\alpha x^2-(\beta+3)x+2\beta-\alpha}{x^2-4x+3}=2$ Μον_8

ΘΕΜΑ 3

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln\left(\dfrac{x}{1-x}\right)$

Α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f και να ορίσετε τη συνάρτηση f^{-1} Μον_7

Γ) Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}f^{-1}(x)=1$ Μον_5

Δ) Αν z, w είναι μιγαδικοί για τους οποίους ισχύει ότι $6f^{-1}(0)+6f^{-1}\left(\ln\left|z+\overline{w}\right|\right)=7$, να αποδείξετε ότι:

α) $\left|z+\overline{w}\right|=2$ Μον_6

β) $\left|\mathrm{Re}(z)+\mathrm{Re}(w)\right|\le2$ Μον_8

ΘΕΜΑ 4

Έστω η συνάρτηση f με $f(x)=\alpha x+\left|z+\dfrac{1}{\overline{z}}\right|-\sqrt{\alpha x^2+\left|z+\dfrac{1}{\overline{z}}\right|x+\gamma}$ όπου $\alpha,\gamma\in R^*$, z μιγαδικός με $z\neq-1,0$. Αν είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=1$ τότε να αποδείξετε ότι

Α) $\alpha=1$ Μον_9

Β) $\left|z+\dfrac{1}{\overline{z}}\right|=2$ Μον_8

Γ) $\dfrac{1+z^\nu}{1+\overline{z}^\nu}=\left(\dfrac{1+z}{1+\overline{z}}\right)^\nu$ Μον_9