*******ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ Β1. «ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ »*******

ΘΕΜΑ 1

Α) Να γράψετε τον ορισμό των ίσων συναρτήσεων. Μον_4,5

Β) Να σημειώσετε ποιες από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστές ή λάθος Μον_10

α) Αν η γραφική παράσταση της f τέμνει την ευθεία $y=x$ στο σημείο $(1,1)$ τότε και η γραφική παράσταση της f^{-1} τέμνει την $y=x$ στο ίδιο σημείο.

β) Για να ορίζονται το άθροισμα και το γινόμενο δύο συναρτήσεων f και g, θα πρέπει τα πεδία ορισμού τους να έχουν κοινά στοιχεία.

γ) Η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{\sqrt{(x-1)^2}}{1-x}$, $x\neq 1$, είναι σταθερή.

δ) Το πεδίο ορισμού της $f\circ g$ είναι τα $x\in R$ για τα οποία ισχύει ότι $g(x)\in D_f$

ε) Δίνεται η $1-1$ συνάρτηση $f:A\to B$. Τότε οι συναρτήσεις $f^{-1}\circ f$ και $f\circ f^{-1}$ είναι ίσες.

Γ) Η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f φαίνεται στο διπλανό σχήμα:

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της f

β) Να υπολογίσετε την παράσταση $f(5)+f(6)-f(10)$.

γ) Να βρείτε τις τιμές του λ ώστε η εξίσωση $f(x)=2\lambda-1$ να έχει λύση.

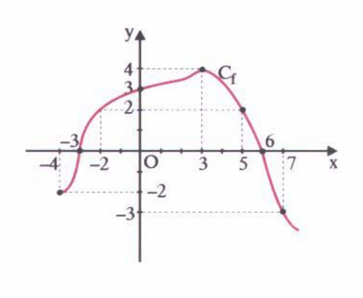
δ) Να λύσετε τις εξισώσεις $f(x)=0$ $f(x)=4$ $f(2x-1)=-3$

ε) Να βρείτετα διαστήματα που η C_f είναι πάνω από τον άξονα $x'x$

στ) Να βρείτετα διαστήματα που η C_f είναι πάνω από τη ευθεία $y=2$

ζ) Να λύσετετις ανισώσεις: $f(x)\leq 0$ και $f(3x-1)>2$

Μον_10,5



ΘΕΜΑ 2

Α) Έστω η συνάρτηση $h:R\to R$ για την οποία ισχύει ότι $h^3(x)-h^2(x)+2h(x)=x^2-x+2$ για κάθε $x\in R$. Να αποδείξετε ότι $h(x)>0$ για κάθε $x\in R$ Μον_8

Β) Έστω οι συναρτήσεις $f,g:R\to R$ για τις οποίες ισχύει ότι $g(x)=f(x)(2-f(x))+e^x-3$ για κάθε $x\in R$. Να αποδείξετε ότι η C_g τέμνει τον αρνητικό ημιάξονα Oy. Μον_8

Γ) Έστω οι συναρτήσεις $f,g:R\to R$ για τις οποίες ισχύει ότι $(f-g)^2(x)+4(f\cdot g)(x)\leq 0$ για κάθε $x\in R$. Να αποδείξετε ότι οι f,g είναι έχουν γραφικές παραστάσεις συμμετρικές ως προς τον άξονα $x'x$. Μον_9

ΘΕΜΑ 3

Έστω η συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to R$ τέτοια ώστε $f\left(\dfrac{1}{x}\right)=-f(x)$ για κάθε $x>0$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=f(h(x))$ όπου $h(x)=\dfrac{1-x}{1+x}$. Τότε:

Α) Να βρείτε το πεδίο ορισμούτης g Μον_6

Β) Να αποδείξετε ότι η g είναι περιττή. Μον_6

Γ) Να αποδείξετε ότι η h είναι γνήσια φθίνουσα στο $(-1,1)$ Μον_5

Δ) Να λύσετε την εξίσωση $h(e^x)+h(e^{2x})=h(e^{11x})+h(e^{111x})$ στο $(-1,1)$ Μον_8

ΘΕΜΑ 4

Έστω οι συναρτήσεις $f,g:R\to R$, για τις οποίες ισχύει ότι:

Η g είναι $1-1$, $f(f(x))=x$ για κάθε $x\in R$ και $g(x)=x+f(x)$ για κάθε $x\in R$.

Α. Να αποδείξετε ότι η f είναι $1-1$. Μον_8

Β. Να αποδείξετε ότι $f(x)=x$ για κάθε $x\in R$. Μον_8

Γ. Έστω z,w μιγαδικοί αριθμοί. Αν $f(\mathrm{Re}(zw))=\mathrm{Re}(z)\cdot\mathrm{Re}(w)$, να αποδείξετε ότι ο z ή ο w είναι πραγματικός αριθμός. Μον_9