************************ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ Β13. (ΟΡΙΑ ΣΥΝΕΧΕΙΑ) ΜΖ04**********************

ΘΕΜΑ 1

Α) Να διατυπώσετε και να δώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία του θεωρήματος ενδιάμεσων τιμών. Μον_6

Β) Αν $P(x)=\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\ldots+\alpha_1 x+\alpha_0$, $x\in R$. Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to x_0}P(x)=P(x_0)$. Μον_6

Γ) Έστω συνάρτηση f γνησίως αύξουσα στο R. Να χαρακτηρίσετε ως (Σ) ή (Λ), κάθε μια από τις προτάσεις.

i) Τα σημεία $A(-1,2)$ και $B(2,1)$ μπορεί να ανήκουν και τα δυο στη γραφική παράσταση της f. Μον_2

ii) Η εξίσωση $f\left(x^2+4\right)=f(4x)$, έχει μοναδική λύση στο R. Μον_2

Δ) Έστω συνάρτηση f, γνησίως φθίνουσα και συνεχής στο R. Έστω ότι η γραφική παράσταση της f διέρχεται από τα σημεία $A(1,\pi)$ και $B(4,-e)$. Να χαρακτηρίσετε ως (Σ) ή (Λ), κάθε μια από τις προτάσεις.

i) Η ανίσωση $x^2<f^{-1}(\pi)-1$ είναι αδύνατη στο R. Μον_2

ii) Υπάρχει μοναδικός $\xi\in(1,4)$ τέτοιος ώστε $f(\xi)=e$ Μον_2

Ε) **Να χαρακτηρίσετε κάθε μια από τις επόμενες προτάσεις με την ένδειξη Σωστή ή Λάθος** Μον_5

α) Αν υπάρχουν τα όρια των συναρτήσεων f και g στο x_o, τότε ισχύει $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to x_0}f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0}g(x)}$ εφόσον $\lim\limits_{x\to x_o}g(x)\neq 0$

β. Μία συνάρτηση f λέγεται γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν υπάρχουν $x_1,x_2\in\Delta$ με $x_1<x_2$ ώστε να ισχύει: $f(x_1)>f(x_2)$

γ) Αν $x\neq 0$, τότε ισχύει $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^3}=-\infty$.

δ. Αν υπάρχει το όριο της συνάρτησης f στο $x_o\in R$, τότε: $\lim\limits_{x\to x_o}(\kappa f(x))=\kappa\lim\limits_{x\to x_o}(f(x))$ για κάθε $\kappa\in R$.

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ο μιγαδικός αριθμός z τέτοιος ώστε $|z|=1$ και η συνάρτηση $f:R\to R$ με τύπο $f(x)=|z+xi|$ για κάθε $x\in R$. Να αποδείξετε ότι:

Α) $f(x)=\sqrt{x^2+2\,\mathrm{Im}(z)x+1}$ για κάθε $x\in R$. Μον_8

Β) η f είναι συνεχής. Μον_6

Γ) υπάρχει $x_o\in(1,4)$ ώστε $f(x_o)=\dfrac{5}{2}$ Μον_11

ΘΕΜΑ 3

Δίνεται η συνάρτηση f η οποία ορίζεται και είναι συνεχής στο $[0,2]$ και ισχύει: $f(0)+2f(1)+f(2)=0$.

Α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $g(x)=f(x)+f(x+1)$ και να δείξετε ότι είναι συνεχής σ' αυτό. Μον_7

Β. Να δείξετε ότι η συνάρτηση g παίρνει την τιμή 0. Μον_8

Γ. Να δείξετε ότι υπάρχει $x_o\in[0,2]$ ώστε: $f(x_0)=-\dfrac{f(1)}{3}$. Μον_10

ΘΕΜΑ 4

Φάρμακο χορηγείται σε ασθενή για πρώτη φορά. Έστω $f(t)=\begin{cases}e^{2t}-1 & , \quad 0\le t\le 2\\ e^{\alpha t-t^2}-1 & , \quad t>2\end{cases}$ η συνεχής συνάρτηση που περιγράφει τη συγκέντρωση του φαρμάκου στον οργανισμό του ασθενούς μετά από χρόνο t από τη χορήγησή του, όπου $t\ge 0$ και α θετικός πραγματικός αριθμός

Α. Να βρείτε την τιμή του α. Μον_8

Β. Να βρείτε τις τιμές συγκέντρωσης του φαρμάκου στον οργανισμό του ασθενή στο χρονικό διάστημα $[0,2]$. Μον_8

Γ. Να βρείτε το $\lim\limits_{t\to+\infty}f(t)$ και να δείξετε ότι υπάρχει χρονική στιγμή $t_0>0$ στην οποία η επίδρασή του φαρμάκου στον οργανισμό του ασθενή έχει μηδενιστεί. Μον_9