

ΘΕΜΑ 1<sup>ο</sup>

- A) Να διατυπώσετε και να δώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία του θεωρήματος Ενδιάμεσων Τιμών Mov\_5
- B) Τι ονομάζουμε πραγματική συνάρτηση Mov\_4
- Γ) Τι ονομάζουμε ακολουθία  $(α_n)$  και πότε θα λέμε ότι έχει όριο το  $ℓ ∈ ℝ$  Mov\_4
- Δ) Να διατυπώσετε το θεώρημα μέγιστης και ελάχιστης τιμής Mov\_4
- E) Να χαρακτηρίσετε κάθε μια από τις επόμενες προτάσεις με την ένδειξη Σωστή ή Λάθος. Mov\_12
- α) Μια συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα  $Δ$  αν και μόνο αν ισχύει ότι  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$  για κάθε  $x_0 \in Δ$
- β) Μια συνάρτηση  $f : A \rightarrow ℝ$  λέγεται **συνάρτηση 1-1**, όταν για οποιαδήποτε  $x_1, x_2 \in A$  ισχύει η συνεπαγωγή: αν  $x_1 \neq x_2$ , τότε  $f(x_1) \neq f(x_2)$ .
- γ) Το πεδίο ορισμού της  $g \circ f$  αποτελείται από όλα τα στοιχεία  $x$  του πεδίου ορισμού της  $f$  για τα οποία το  $f(x)$  ανήκει στο πεδίο ορισμού της  $g$ .
- δ) Για τις συναρτήσεις  $f, g, h$  ισχύει ότι:  $\forall x \quad h(x) < f(x) < g(x)$  κοντά στο  $x_0$  και  $\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \ell$  τότε  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$ .
- ε) Αν μια συνάρτηση  $f$  είναι **γνησίως αύξουσα** και **συνεχής** σε ένα ανοικτό διάστημα  $(α, β)$ , τότε το σύνολο τιμών της στο διάστημα αυτό είναι το διάστημα  $(A, B)$ , όπου  $A = \lim_{x \rightarrow α^+} f(x)$  και  $B = \lim_{x \rightarrow β^-} f(x)$ .
- στ) Μια συνάρτηση  $f$  που δεν είναι συνεχής δεν διατηρεί πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα στα οποία οι διαδοχικές ρίζες της  $f$  χωρίζουν το πεδίο ορισμού της

ΘΕΜΑ 2<sup>ο</sup>

Δίνεται η συνάρτηση  $f : ℝ \rightarrow ℝ$  για την οποία ισχύει ότι  $f(x+y) = f(x) \sin y + f(y) \sin x$  για κάθε  $x, y \in ℝ$ . Αν

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{h} = 1 \text{ τότε:}$$

- A) να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι συνεχής στο 0 Mov\_7
- B) να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι συνεχής στο  $ℝ$  Mov\_8
- Δ) Να υπολογίσετε το  $f(\pi)$  Mov\_3
- Γ) Να υπολογίσετε το  $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{f(x) - f(\pi)}{x - \pi}$  Mov\_7

ΘΕΜΑ 3<sup>ο</sup>

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση  $f : (0, +\infty) \rightarrow ℝ$  για την οποία ισχύει ότι:  $f^2(x) - 1 = 2 \ln x \cdot f(x)$  για κάθε  $x > 0$ .

- A) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $h(x) = f(x) - \ln x$  διατηρεί πρόσημο στο  $(0, +\infty)$  Mov\_6
- B)  $\forall x \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(1)x^3 + x - 1}{x^2 + x - 1} = +\infty$  τότε:
- α) Να βρείτε το  $f(1)$  Mov\_6
- β) Να βρείτε τον τύπο της  $f$  Mov\_6
- γ) Να υπολογίσετε τα όρια:  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  και  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  Mov\_7

ΘΕΜΑ 4<sup>ο</sup>

Δίνεται η συνάρτηση  $f$ , συνεχής στο  $(0, +\infty)$  με  $f(2) = 6$  και  $f(x)f(f(x)) = 12$  για κάθε  $x > 0$ .

- A) Να αποδείξετε ότι  $f(6) = 2$  Mov\_4
- B) Να αποδείξετε ότι υπάρχει  $x_0$  ώστε  $f(x_0) = 4$  Mov\_3
- Γ) Να υπολογίσετε το  $f(4)$  Mov\_5
- Δ) Να βρείτε το πρόσημο της  $f$  Mov\_4
- E) Αν η  $f$  είναι γνησίως μονότονη τότε:
- α) Να βρείτε το είδος της μονοτονίας της Mov\_4
- β) Να βρείτε τον τύπο της. Mov\_5