ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ Γ2. ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ (ΘΜΤ –ΣΤΑΘΕΡΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ)

ΘΕΜΑ 1

Α Να αποδειχτεί ότι Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα Δ και $f'(x)=0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, να αποδείξετε ότι η f είναι σταθερή σε όλο το Δ.

Β Να αποδειχτεί ότι Δύο συναρτήσεις f και g είναι συνεχείς στο διάστημα Δ και $f'(x)=g'(x)$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ τότε $f(x)=g(x)+c$ για κάθε $x\in\Delta$

Γ Για μια συνάρτηση $f:R\to R$ ισχύει ότι $f'(x)=3x^2-2x+3$ για κάθε $x\in R$. Αν η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(1,f(1))$ διέρχεται από το σημείο $B(-1,-3)$, να βρεθεί ο τύπος της f

Δ Για μια συνάρτηση $f:R\to R$ ισχύει ότι $f'(x)=2f(x)$ για κάθε $x\in R$

Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=f(x)e^{-2x}$ είναι σταθερή στο R,

Αν η κλίση της f στο σημείο με $x_0=0$ είναι ίση με 6, να αποδείξετε ότι $f(x)=3e^{2x}$.

ΘΕΜΑ 2

Α Να βρεθούν όλες οι καμπύλες C με την ιδιότητα : « C είναι η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης και σε κάθε σημείο της με τετμημένη $x_0\in R$, έχει εφαπτομένη με συντελεστή διεύθυνσης $e^{x_o}+2x_o$ ». Ποια από αυτές τις καμπύλες διέρχεται από το σημείο $(0,3)$

Β Να βρεθεί συνάρτηση f τέτοια ώστε $f'(1-2x)=7-12x$ για κάθε $x\in R$ και $f(1)=2$

Γ Να αποδειχτεί ότι η εξίσωση $\eta\mu x=2-2x$ έχει ακριβώς μια πραγματική ρίζα στο $\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4}\right)$

Δ Έστω μία συνεχής συνάρτηση f στο διάστημα $[3,7]$, για την οποία ισχύει $1\le f'(x)\le 4$ για κάθε $x\in(3,7)$ και $f(3)=1$. Να αποδείξετε ότι $5\le f(7)\le 17$.

ΘΕΜΑ 3

Α Αν η συνάρτηση f ικανοποιεί τις υποθέσεις του ΘΜΤ του διαφορικού λογισμού στο $[0,3]$ και ισχύει ότι $f(3)=f(0)$, να αποδειχτεί ότι υπάρχουν $\xi_1,\xi_2,\xi_3\in(0,3)$ τέτοια ώστε $f'(\xi_1)+f'(\xi_2)+f'(\xi_3)=0$

Β Έστω η συνάρτηση f που έχει Δεύτερη παράγωγο στο R και υπάρχει $\alpha\in R$ ώστε $f(-1)=5\alpha-1$, $f(0)=7\alpha-1$ και $f(1)=9\alpha-1$. Να αποδειχτεί ότι υπάρχει $\xi\in R$ ώστε $f''(\xi)=0$

Γ Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$ και ισχύει ότι $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1+f(\pi)$. Να αποδειχτεί ότι υπάρχει $x_0\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ ώστε $f'(x_0)=\sigma\upsilon\nu x_0$

Δ Η απόσταση δύο πόλεων που συνδέονται με ευθεία σιδηροδρομική γραμμή είναι 51 χιλιόμετρα. Μια αμαξοστοιχία διανύει τη μεταξύ τους απόσταση σε $0,6$ ώρες. Να αποδειχτεί ότι για κάποια χρονική στιγμή η αμαξοστοιχία έχει ταχύτητα 85 χιλιόμετρα την ώρα.

ΘΕΜΑ 4

Α Να αποδειχτεί ότι $1+2\alpha\le \varepsilon\varphi\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)\le 1+\dfrac{\alpha}{\sigma\upsilon\nu^2(\alpha+\frac{\pi}{4})}$ για κάθε $0\le\alpha\le\frac{\pi}{4}$,

Β) Να βρεθούν οι $\alpha,\beta,\gamma\in R$ ώστε η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}\alpha\eta\mu x & x<0\\ \dfrac{\beta x^2+\gamma x+\alpha-2\beta}{\alpha} & x\ge 0\end{cases}$ να ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο $\left[-\frac{\pi}{6},2\right]$ και να βρεθεί ο αριθμός $\xi\in\left(-\frac{\pi}{6},2\right)$ με $f'(\xi)=0$