*******ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ Γ 7. ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ *******

ΘΕΜΑ 1

Α) Να αποδείξετε ότι αν $f(x)=\ln|x|$, $x>0$ τότε $f'(x)=\frac{1}{x}$, $x>0$

Β) Να διατυπώσετε και να αποδείξετε το θεώρημα fermat

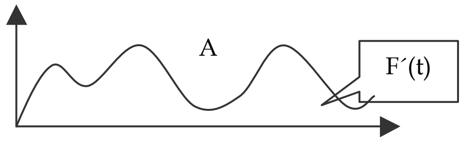
Γ) Να δώσετε τον ορισμό της εφαπτομένης στη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης, σε ένα σημείο της στο οποίο είναι παραγωγίσιμη.

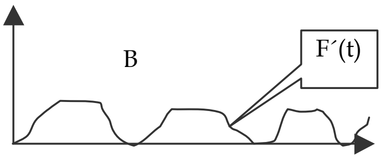
Δ) Σε ποιο από τα δοσμένα γραφήματα αντιστοιχεί καθένα από τα παρακάτω σενάρια ;

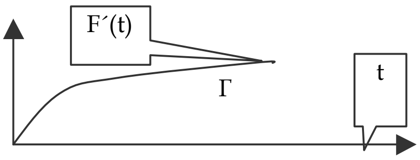
α Ένα αυτοκίνητο κινείται σε δρόμο με πολύ κίνηση

β Ένα αυτοκίνητο κινείται σε δρόμο χωρίς κυκλοφορία και με όλα τα φανάρια πράσινα

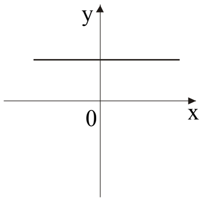
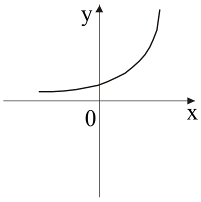
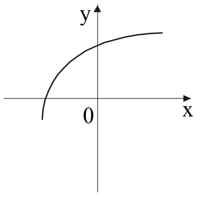
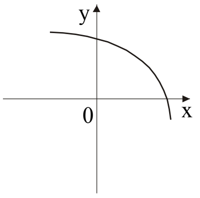
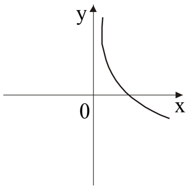
γ. Ένα αυτοκίνητο κινείται σε δρόμο χωρίς κίνηση αλλά με κάποια φανάρια κόκκινα .







Ε) Να αντιστοιχίσετε κάθε γραφική παράσταση της συνάρτησης f, της Γραμμής Α με μια σχέση της γραμμής Β

<table>
<tr><td></td><td>A</td><td>B</td><td>Γ</td><td>Δ</td><td>E</td></tr>
<tr><td>A</td><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td></tr>
<tr><td>B</td><td colspan="5">α. $f'(x)>0$ και $f''(x)>0$ β. $f'(x)<0$ και $f''(x)<0$ γ. $f'(x)>0$ και $f''(x)<0$
δ. $f'(x)<0$ και $f''(x)>0$ ε. $f'(x)=0$ ζ. $f'(x)=0$ και $f''(x)>0$</td></tr>
</table>

ΘΕΜΑ2

Δίνεται συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to R$ για την οποία ισχύουν ότι $x^2f'(x)=-f(x)$ για κάθε $x>0$ και $f(1)=e$

Α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=f(x)e^{-\frac{1}{x}}$, $x>0$ είναι σταθερή.

Β) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f

ΘΕΜΑ 3

Έστω η συνάρτηση f, παραγωγίσιμη στο R ώστε να είναι $\lim\limits_{x\to 3}\frac{f(x)-x}{x-3}=-2$

Α) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M(3,f(3))$

Β) Αν η f' είναι γνησίως αύξουσα στο R και $f(5)=3$ να αποδείξετε ότι υπάρχει μόνο ένα $x_o\in(3,5)$ ώστε $f'(x_o)=0$

Γ) Να αποδείξετε ότι στο x_o του β) ερωτήματος η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο.

ΘΕΜΑ 4

Α) Έστω συνάρτηση f, παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ και στρέφει τα κοίλα προς τα άνω στο Δ, να αποδείξετε ότι για κάθε $\alpha,\beta\in\Delta$ με $\alpha\neq\beta$ ισχύει ότι: $f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)<\frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}$ Μον_9

Β) Έστω η συνάρτηση $f(x)=\ln\left(\frac{1}{\ln x}\right)$, $x>1$. Να αποδείξετε ότι:

α) Η f στρέφει τα κοίλα προς τα άνω στο $(1,+\infty)$ Μον_7

β) Για κάθε $\alpha,\beta\in(1,+\infty)$ με $\alpha<\beta$ ισχύει $\ln\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)>\sqrt{\ln\alpha\cdot\ln\beta}$ Μον_9