ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Παράρτημα Ν. Χίου
ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΑΠΡΙΛΙΟΣ 2010
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ : ΠΕΝΤΕ (5)

ΘΕΜΑ 1ο

Α.1. Έστω η συνάρτηση $f(x)=\eta\mu x$, $x\in\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f'(x)=\sigma\upsilon\nu x$.

Μονάδες 9

Α.2. Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Τι ονομάζεται αρχική συνάρτηση ή παράγουσα της f στο Δ ;

Μονάδες 6

Β. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιο σας την ένδειξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Για κάθε μιγαδικό z ισχύει $z \cdot \overline{z} \geq 0$.

Μονάδες 2

β. Κάθε συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα Δ έχει μέγιστη και ελάχιστη τιμή στο Δ.

Μονάδες 2

γ. Αν μια συνάρτηση f είναι ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και παρουσιάζει ακρότατο στο $x_0 \in \Delta$, τότε ισχύει $f'(x_0) = 0$.

Μονάδες 2

δ. Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, τότε η γραφική παράσταση της f δεν έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη.

Μονάδες 2

ε. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο [α,β] και $f(x) \geq 0$ στο [α,β], τότε ισχύει $\int_{\beta}^{\alpha} f(x)dx \geq 0$

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται η παραγωγίσιμη στο [α,β] συνάρτηση f και οι μιγαδικοί αριθμοί $z = f(\alpha) + \alpha i$ και $w = f(\beta) + \beta i$, όπου $0 < \alpha < \beta$. Έστω ότι $\frac{w}{z} = \lambda \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι :

Α. $|w+4iz| = |w-4iz|$.

Μονάδες 7

Β. $w\overline{z} = z\overline{w}$.

Μονάδες 5

Γ. $\dfrac{f(\alpha)}{\alpha} = \dfrac{f(\beta)}{\beta}$

Μονάδες 6

Δ. Υπάρχει εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f που διέρχεται από το (0,0).

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x\cdot e^{-\frac{1}{x}}$, $x\in(0,+\infty)$.

Α. Να μελετηθεί η f ως προς τα κοίλα.

Μονάδες 6

Β. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο με τετμημένη 1 έχει εξίσωση $y=\dfrac{2}{e}x-\dfrac{1}{e}$

Μονάδες 5

Γ.. Να αποδειχθεί ότι $\displaystyle\int_1^2 f(x)\,dx \ge \frac{2}{e}$

Μονάδες 7

Δ.. Αν $g(x)=\frac{f(x)}{x^3}$ και E(t) το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_g, τον άξονα x΄x και τις ευθείες x = 1, x = t, t > 1, να αποδειχθεί ότι $\lim_{t\to+\infty} E(t)=1-\frac{1}{e}$.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $e^{2x}-1-x\int_0^1 f(t+x)dt\geq 0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Να αποδείξετε ότι :

Α. $\int_0^1 f(t)dt=2$.

Μονάδες 10

Β. Η εξίσωση $\int_0^x f(t)dt=1$ έχει λύση ξ στο (0,1).

Μονάδες 8

Γ. Η εξίσωση $\int_0^x f(t)dt+x\cdot f(x)-1=0$ έχει λύση στο (0,ξ).

Μονάδες 7

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)

1. Να μην αντιγράψετε τα θέματα στο τετράδιο. Τα σχήματα που θα χρησιμοποιήσετε στο τετράδιο μπορούν να γίνουν και με μολύβι.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων, αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Καμιά άλλη σημείωση δεν επιτρέπεται να γράψετε.
3. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα.
4. Κάθε λύση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: μετά από 1 ώρα.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΛΥΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1ο

Α.1 Θεωρία σελ 224 σχ. βιβλίου

Α.2 Ορισμός σελ 303 " "

Β. α. Σ , β. Λ , γ. Λ , δ. Σ , ε. Λ

ΘΕΜΑ 2ο

Α. $\frac{w}{z} = \lambda \in R \Leftrightarrow w = \lambda z$ άρα

$|\lambda z + 4iz| = |\lambda z - 4iz| \Leftrightarrow |z|\,|\lambda + 4i| = |z|\,|\lambda - 4i| \overset{|z| \neq 0}{\Leftrightarrow}$

$|\lambda + 4i| = |\lambda - 4i|$ ισχύει

Β. $\frac{w}{z} = \lambda \in R$ άρα $\frac{w}{z} = \frac{\overline{w}}{\overline{z}} \Leftrightarrow w\overline{z} = z \cdot \overline{w}$

Γ. $w\overline{z} = z\overline{w} \Leftrightarrow (f(\beta) + \beta i)(f(\alpha) - \alpha i) = (f(\alpha) + \alpha i)(f(\beta) - \beta i) \Leftrightarrow$

$\cancel{f(\beta) f(\alpha)} - f(\beta)\alpha i + f(\alpha)\beta i + \cancel{\alpha\beta} = \cancel{f(\alpha) f(\beta)} - \beta f(\alpha) i + \alpha f(\beta) i + \cancel{\beta\alpha} \Leftrightarrow$

$$2\beta f(\alpha) i = 2\alpha f(\beta) i \Leftrightarrow$$

$$\frac{f(\alpha)}{\alpha} = \frac{f(\beta)}{\beta}$$

Δ. Έστω $h(x) = \frac{f(x)}{x}$ στο $[\alpha, \beta]$ με $0 < \alpha < \beta$

- Η h συνεχής στο $[\alpha, \beta]$
- Η h παραγωγίσιμη στο (α, β) με $h'(x) = \frac{f'(x) \cdot x - f(x)}{x^2}$
- $h(\alpha) = h(\beta)$

άρα Θ R υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $h'(x_0) = 0 \Leftrightarrow$

$f'(x_0)\, x_0 - f(x_0) = 0$ (1)

– Αν $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$ η εξίσωση της εφαπτομένης της f στο $(x_0, f(x_0))$ τότε για $x = 0 = y$ έχω:

$0 - f(x_0) = f'(x_0)(0 - x_0) \Leftrightarrow -f(x_0) = -f'(x_0)\, x_0$ που ισχύει από την (1)

ΘΕΜΑ 3ο

Α. $f'(x) = e^{-\frac{1}{x}} + x\, e^{-\frac{1}{x}} \frac{1}{x^2} = e^{-\frac{1}{x}} + \frac{1}{x} e^{-\frac{1}{x}}$

$f''(x) = \cancel{\frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}}} - \cancel{\frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}}} + \frac{1}{x} e^{-\frac{1}{x}} \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x^3} e^{-\frac{1}{x}} > 0$ γιατί $x \in (0, +\infty)$

άρα η f στρέφει κοίλα άνω.

Β. Εξίσωση εφαπτομένης στο σημείο $A(1, f(1))$

$y - f(1) = f'(1)(x-1)$, όμως $f(1) = \frac{1}{e}$ και $f'(1) = \frac{2}{e}$

άρα $y - \frac{1}{e} = \frac{2}{e}(x-1) \Leftrightarrow \boxed{y = \frac{2}{e}x - \frac{1}{e}}$

Γ. Επειδή η f είναι κυρτή σε κάθε σημείο της η γραφική της παράσταση είναι πάνω από την εφαπτομένη

άρα $f(x) \geq \frac{2}{e}x - \frac{1}{e}$ άρα

$\int_1^2 f(x)\,dx \geq \int_1^2 \left(\frac{2}{e}x - \frac{1}{e}\right) dx$

$\int_1^2 f(x)\,dx \geq \left[\frac{\cancel{2}}{e}\frac{x^2}{\cancel{2}} - \frac{1}{e}x\right]_1^2$ άρα $\int_1^2 f(x)\,dx \geq \frac{4}{e} - \frac{2}{e} - \cancel{\frac{1}{e}} + \cancel{\frac{1}{e}}$

άρα $\int_1^2 f(x)\,dx \geq \frac{2}{e}$

Δ. Αν $g(x) = \frac{f(x)}{x^3}$ τότε $g(x) = \frac{\cancel{x} e^{-\frac{1}{x}}}{x^{\cancel{3}2}} \Leftrightarrow g(x) = \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^2} = \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}}$

είναι $g(x) > 0$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$ άρα

$E(t) = \int_1^t g(x)\,dx = \int_1^t \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}} dx = \left[e^{-\frac{1}{x}}\right]_1^t = e^{-\frac{1}{t}} - e^{-1} = e^{-\frac{1}{t}} - \frac{1}{e}$

άρα $\lim\limits_{t \to +\infty} E(t) = \lim\limits_{t \to +\infty}\left(e^{-\frac{1}{t}} - \frac{1}{e}\right) = 1 - \frac{1}{e}$ γιατί $\lim\limits_{t \to +\infty} e^{-\frac{1}{t}} = 1$

ΘΕΜΑ 4ο

Α. Θέτω $t + x = u$ άρα $du = dt$, $u_1 = x$, $u_2 = 1 + x$

άρα $\underbrace{e^{2x} - 1 - x\int_x^{1+x} f(u)\,du}_{g(x)} \geq 0 \Leftrightarrow g(x) \geq g(0)$

Άρα η g παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0 = 0$, το $x_0 = 0$ είναι εσωτερικό σημείο και η g παραγωγίσιμη γιατί ....

Άρα ισχύουν οι προυποθέσεις Θ. Fermat άρα $g'(0)=0$

όμως αν $g(x) = e^{2x}-1 + x\int_2^x f(u)\,du - x\int_2^{x+1} f(u)\,du$

τότε: $g'(x) = 2e^{2x} + \int_2^x f(u)\,du + x f(x) - \int_2^{x+1} f(u)\,du - x f(x+1)(x+1)'$

άρα $g'(0) = 2 + \int_2^0 f(u)\,du - \int_2^1 f(u)\,du$

$g'(0) = 2 - \int_0^2 f(u)\,du - \int_2^1 f(u)\,du$ άρα

$0 = g'(0) = 2 - \int_0^1 f(u)\,du \Leftrightarrow \int_0^1 f(u)\,du = 2$

B. Έστω $h(x) = \int_0^x f(t)\,dt - 1$

- Η h παραγωγίσιμη στο $[0,1]$ άρα συνεχής
- $h(0) = -1$
  $h(1) = \int_0^1 f(t)\,dt - 1 = 2-1 = 1$ $\Big\}$ $h(0)\cdot h(1) = -1 < 0$

άρα Θ. Bolzano άρα $\xi \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $h(\xi)=0$

Γ. Έχω: $x f(x) + \int_0^x f(t)\,dt - 1 = 0$

$\left(x\int_0^x f(t)\,dt - x\right)' = 0$

Αν $G(x) = x\int_0^x f(t)\,dt - x$ και εφαρμόσω <u>Θ. Rolle</u> στο $[0,\xi]$

όπου ξ του B) ερωτήματος

- Η G συνεχής στο $[0,\xi]$ ως παραγωγίσιμη
- Η G παραγωγίσιμη με $G'(x) = x f(x) + \int_0^x f(t)\,dt - 1$
- $G(0) = 0 = G(\xi)$

άρα υπάρχει n στο $(0,\xi)$ τέτοιο ώστε $G'(n) = 0 \Leftrightarrow$

$n f(n) + \int_0^n f(t)\,dt - 1 = 0$