*****4ο ΓΕΛ ΧΑΝΙΩΝ **** 3/ΩΡΟ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΟΥΣ ΜΙΓΑΔΙΚΟΥΣ ***ΣΑΒΒΑΤΟ 15/10/2011**

ΘΕΜΑ Α

A1 Να αποδείξετε ότι $|z\cdot w|=|z|\cdot|w|$ για κάθε $z,w\in C$ Μον_7

A2 Να ερμηνεύσετε γεωμετρικά την αφαίρεση δύο μιγαδικών αριθμών Μον_4

A3 Να γράψετε πως ορίζεται το μέτρο ενός μιγαδικού αριθμού z Μον_4

A4 Να χαρακτηρίσετε κάθε μια από τις επόμενες προτάσεις με την ένδειξη Σωστή ή Λάθος Μον_10

α Αν $\alpha+\beta i=0$, τότε ισχύει πάντα ότι $\alpha=0$ και $\beta=0$

β Οι εικόνες των φανταστικών αριθμών στο μιγαδικό επίπεδο βρίσκονται πάνω στον $y'y$

γ Ισχύει ότι $\left|z^{\nu}\right|=|z|^{\nu}$ για κάθε $\nu\in N^*$ και για κάθε $z\in C$

δ Για όλους τους μιγαδικούς z, w ισχύει ότι, το μέτρο του αθροίσματός τους είναι ίσο με την απόσταση των εικόνων τους.

ε Ισχύει ότι $|z|-|w|\le|z+w|\le|z|+|w|$ για κάθε $z,w\in C$

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι μιγαδικοί: $z=\dfrac{\sigma\upsilon\nu\theta\ -\ i\eta\mu\theta}{\eta\mu\theta\ +\ i\sigma\upsilon\nu\theta}$, $\theta\in R$.

B1 Να αποδείξετε ότι: $z=-i$ Μον_4

B2 Να βρείτε τις τιμές του φυσικού αριθμού ν για τις οποίες ισχύει ότι $(1+z)^{\nu}=(1-z)^{\nu}$ Μον_7

B3 Να αποδείξετε ότι $1+z+z^2+z^3+\ldots+z^{98}+z^{99}=0$ Μον_7

B4 Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικός μιγαδικός αριθμός w που επαληθεύει ταυτόχρονα τις σχέσεις $|w-1+3z|\le\sqrt{2}$ και $|w-3+z|\le\sqrt{2}$ Μον_7

ΘΕΜΑ Γ

Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί α και β ώστε $\beta-3\alpha=25$ και οι μιγαδικοί z και w ώστε $|iz-3i-4|=5$ και $w=\alpha+\dfrac{\beta}{4}i$. Να βρείτε

Γ1) Να βρείτε τους γεωμετρικούς τόπους των εικόνων των z και w Μον_6

Γ2) Να βρείτε τον z που έχει μέγιστο μέτρο Μον_6

Γ3) Να βρείτε το ελάχιστο $|z-w|$ Μον_7

Γ4) Να αποδείξετε ότι $1\le|z-3|\le 9$ Μον_6

ΘΕΜΑ Δ

Δίδονται οι μιγαδικοί αριθμοί z και w με $z\notin R$ και $w=z+\dfrac{4}{z}$.

Δ1) Αν η εικόνα του w στο μιγαδικό επίπεδο είναι σημείο του άξονα $x'x$, τότε να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των z Μον_5

Αν z_1,z_2,z_3 είναι μιγαδικοί του προηγούμενου γεωμετρικού τόπου, να αποδείξετε ότι

Δ2) $\dfrac{\overline{z_1}}{4}=\dfrac{1}{z_1}$ και $\dfrac{\overline{z_2}}{4}=\dfrac{1}{z_2}$ Μον_2

Δ3) $(z_1+z_2)\left(\dfrac{1}{z_1}+\dfrac{1}{z_2}\right)\le 4$ Μον_5

Δ4) $\left|\dfrac{z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1}{z_1+z_2+z_3}\right|=2$ Μον_6

Δ5) Ο αριθμός $\dfrac{z_1-z_2}{z_3}+\dfrac{z_2-z_3}{z_1}+\dfrac{z_3-z_1}{z_2}$ είναι φανταστικός Μον_7