4ο ΓΕΛ ΧΑΝΙΩΝ

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ –

ΣΑΒΒΑΤΟ 17 12 2011

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΜΙΓΑΔΙΚΟΙ - ΟΡΙΑ - ΣΥΝΕΧΕΙΑ

ΘΕΜΑ Α

Α1 Πότε μια συνάρτηση λέμε ότι είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$;

Μον_5

Α2 Να διατυπώσετε και να αποδείξετε το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών . *Μον_10*

Α3 Να χαρακτηρίσετε κάθε μια από τις επόμενες προτάσεις, με την ένδειξη **Σωστή** ή **Λάθος**

α. Αν η συνάρτηση f είναι ορισμένη στο R και $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ τότε, σε κάθε περίπτωση ισχύει ότι: $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ = $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = +\infty$. *Μον_2*

β. Αν για δύο συναρτήσεις f, g ισχύουν: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ και $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$ τότε το όριο $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{g(x)}{f(x)}$ είναι καλά ορισμένο και είναι ίσο, πάντα, με το 0. *Μον_2*

γ. Αν η συνάρτηση f είναι ορισμένη στο διάστημα Δ και ισχύει: $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \Delta$ τότε οπωσδήποτε η f θα διατηρεί σταθερό πρόσημο στο Δ. *Μον_2*

δ. Ισχύει ότι $|z\bar{z}| = z\bar{z}$ για κάθε $z \in \mathbb{C}$ *Μον_2*

ε. Κάθε συνάρτηση, που είναι $1-1$ στο πεδίο ορισμού της, είναι γνησίως μονότονη.

Μον_2

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln\left(\alpha x^2 + x + 1\right) - \ln\left((1+\alpha)x + \alpha\right)$, $x > 0$ και $\alpha \geq 0$.

Β1 Για κάθε $\alpha \geq 0$, να βρείτε το $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ *Μον_6*

Δίνεται ακόμα ότι $\alpha = 0$. Τότε:

Β2 Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία. *Μον_4*

Β3 Να ορίσετε την αντίστροφη της f *Μον_5*

Β4 Να βρείτε το πρόσημο της συνάρτησης f *Μον_4*

Β5 Να λύσετε την ανίσωση $\ln 2 + f\left(x^2\right) < f(x) + f\left(x^7\right)$ στο $(0,+\infty)$ *Μον_6*

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η εξίσωση $z^2 - \alpha z + \beta = 0$ με $\alpha, \beta \in R$, $z \in C$ και z_1, z_2 είναι οι ρίζες της με $z_1 = 2 + i$

Γ1 Να αποδείξετε ότι $\alpha = 4$ και $\beta = 5$ Μον_4

Γ2 Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $z_1^{2012} + z_2^{2012}$ είναι πραγματικός Μον_4

Αν επιπλέον $A(z_1)$, $B(z_2)$, $\Gamma(z_3)$ είναι οι εικόνες των z_1, z_2 και z_3 αντίστοιχα στο μιγαδικό επίπεδο με $z_3 = \frac{z_1}{z_2} + \frac{1}{5}(17 + i)$,τότε:

Γ3 Να αποδείξετε ότι το $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές Μον_6

Γ4 Αν $|u - z_1| = |\overline{u} - z_1|$ να αποδείξετε ότι $u \in R$ Μον_5

Γ5 Να προσδιορίσετε γεωμετρικά τις εικόνες των μιγαδικών αριθμών w που επαληθεύουν τη σχέση $|w - z_2 + 2| + |\overline{w} - z_2 + 2| = 10$ Μον_6

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f : R \to R$,για την οποία ισχύει $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x) - 2}{x} = 0$

Δ1 Να αποδείξετε ότι $f(0) = 2$ *Μον_3*

Δ2 Να βρείτε το όριο: $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x^2 + f(x)}{\eta\mu^2 x}$ *Μον_5*

Αν επιπλέον για την f ισχύει: $f^2(x) - e^{-x} f(x) = e^{2x} + 1, \quad x \in R$

Δ3 Να δείξετε ότι: $f(x) = e^{-x} + e^{x}, \quad x \in R$ *Μον_5*

Δ4 Να υπολογίσετε τα όρια $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ και $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f\left(\frac{1}{x}\right) - 2}{2 - \sigma\upsilon\nu x}$. *Μον_8*

Δ5 Να αποδείξετε ότι η f παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_o = 0$ *Μον_4*

Μ. Παπαγρηγοράκης

4ο ΓΕΛ Χανίων