ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΤΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΙ Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β΄)
ΚΥΡΙΑΚΗ 3 ΑΠΡΙΛΙΟΥ 2011
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ 1^{o}

Α. Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α,β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_o, στο οποίο όμως η f είναι συνεχής.
Αν $f'(x)>0$ στο $(α, x_o)$ και $f'(x)<0$ στο $(x_o, β)$, τότε να αποδείξτε ότι το $f(x_o)$ είναι τοπικό μέγιστο της f.

Μονάδες 10

Β.

Τι σημαίνει γεωμετρικά το θεώρημα του Rolle.

Μονάδες 5

Γ. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας ή στην κόλλα σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α. Αν $i^{μ} = i^{ν}$, τότε μ=ν, όπου μ,ν θετικοί ακέραιοι και $i^2=-1$.

Μονάδες 2

β. Οι γραφικές παραστάσεις C και C΄ των συναρτήσεων f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία y = -x που διχοτομεί τις γωνίες x΄Oy και xOy΄.

Μονάδες 2

γ. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο x_o, τότε οπωσδήποτε θα ισχύει $\lim_{x\to x_o} f'(x) = f'(x_o)$.

Μονάδες 2

δ. Μια συνεχής συνάρτηση f διατηρεί πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα στα οποία οι διαδοχικές ρίζες της f χωρίζουν το πεδίο ορισμού της.

Μονάδες 2

ε. Οι πολυωνυμικές συναρτήσεις βαθμού μεγαλυτέρου ή ίσου του 2 δεν έχουν ασύμπτωτες.

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ 2°

Θεωρούμε δύο μιγαδικούς αριθμούς z και w για τους οποίους ισχύει:

$$w = \frac{\overline{z} + i}{2z + i}$$

Α . Αν w= i, τότε:

α_1. Να αποδείξετε ότι z =1-i

Μονάδες 8

α_2. Να βρείτε για ποια θετική ακεραία τιμή του ν ισχύει:

$$\left(\frac{z}{w}\right)^{\nu} = 16$$

Μονάδες 9

Β. Αν $|w| = \frac{1}{2}$, τότε να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών z.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ 3°

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \ln|x| + \alpha x & , \quad x \neq 0 \\ 0 & , \quad x = 0 \end{cases}$$

για την οποία για κάθε x≠0 ισχύει $x^2 \ln|x| + \alpha x \geq f\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)$.

Α.

α_1. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \neq 0$ ισχύει $f'(x) = 2x\ln|x| + x + \alpha$.

Μονάδες 3

$α_2$. Να υπολογίσετε τον αριθμό α.

Μονάδες 4

Β. Για **α=0**:

$β_1$. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Μονάδες 7

$β_2$. Να μελετήσετε την f ως προς τα κοίλα στο διάστημα $(0,+\infty)$ και να βρείτε το σημείο καμπής.

Μονάδες 7

$β_3$. Να αποδείξετε ότι $2f(1+h)<f(1+2h)$, όπου $h > 0$.

Μονάδες 4

ΘΕΜΑ 4ο

Θεωρούμε μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $[0,+\infty)$ με f' γνησίως φθίνουσα στο $[0,+\infty)$ και $f'(0) = 0$.

Δίνεται επιπλέον ότι $f(x)>0$ για κάθε $x\in[0, +\infty)$.

Ορίζουμε τη συνάρτηση F με $F(x)=\begin{cases} \dfrac{x}{\int_0^x f(t)\,dt}, & x>0 \\ \dfrac{1}{f(0)}, & x=0 \end{cases}$

α. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση F είναι συνεχής στο $x_o=0$.

Μονάδες 5

β. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x\in(0, +\infty)$ ισχύει $F(x)<\dfrac{1}{f(x)}$.

Μονάδες 8

γ. Να αποδείξετε ότι η F είναι γνησίως αύξουσα.

Μονάδες 7

δ. Να αποδείξετε ότι $\int_0^1 F(t)\,dt < F(e)-\int_0^1 t\cdot F'(t)\,dt$

Μονάδες 5

ΟΔΗΓΙΕΣ ΓΙΑ ΤΟΥΣ ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟΥΣ

1. Στο τετράδιο ή στην κόλλα σας να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, κατεύθυνση, εξεταζόμενο μάθημα). **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων, αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Καμιά άλλη σημείωση δεν επιτρέπεται να γράψετε.**
   Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας σε όλα** τα θέματα.
4. Να γράψετε τις απαντήσεις σας **μόνο με μπλε ή μαύρο στυλό διαρκείας και μόνον ανεξίτηλης μελάνης**. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε μολύβι μόνο για σχέδια, διαγράμματα και πίνακες.
5. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
6. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
7. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 1 ώρα μετά τη διανομή των θεμάτων.

ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ