

## ΑΡΧΗ 1ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΤΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ' ΤΑΞΗΣ  
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΙ  
Γ' ΤΑΞΗΣ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β')  
ΚΥΡΙΑΚΗ 4 ΜΑΡΤΙΟΥ 2012  
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ  
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ  
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

### ΘΕΜΑ Α

**A1.** Πότε μια συνάρτηση  $f:A \rightarrow \mathbb{R}$  λέγεται συνάρτηση 1-1;

**Μονάδες 10**

**A2.** Έστω μια συνάρτηση  $f$ , η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα  $[\alpha, \beta]$ . Αν :

- Η  $f$  είναι συνεχής στο  $[\alpha, \beta]$  και
- $f(\alpha) \neq f(\beta)$ ,

να αποδείξετε ότι για κάθε αριθμό  $\eta$  μεταξύ των  $f(\alpha)$  και  $f(\beta)$  υπάρχει ένας τουλάχιστον  $x_0 \in (\alpha, \beta)$  τέτοιος, ώστε  $f(x_0) = \eta$ .

**Μονάδες 5**

**A3.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

**α)** Η διανυσματική ακτίνα του αθροίσματος των μιγαδικών  $\alpha + \beta i$  και  $\gamma + \delta i$  είναι το άθροισμα των διανυσματικών ακτίνων τους.

**β)** Αν  $f, g, h$  είναι τρεις συναρτήσεις και ορίζεται η  $h \circ (g \circ f)$ , τότε ορίζεται και η  $(h \circ g) \circ f$  και ισχύει  $h \circ (g \circ f) \neq (h \circ g) \circ f$ .

## ΑΡΧΗ 2ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

γ) Η ευθεία  $y = \lambda x + \beta$  λέγεται ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της  $f$  στο  $+\infty$ , αν:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (\lambda x + \beta)] = +\infty$$

δ) Αν οι συναρτήσεις  $f$  και  $g$  είναι παραγωγίσιμες στο  $x_0$ , τότε και η και συνάρτηση  $f \circ g$  είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0$ .

ε) Η εικόνα  $f(\Delta)$  ενός διαστήματος  $\Delta$  μέσω μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης  $f$  είναι διάστημα.

**Μονάδες 10**

### **ΘΕΜΑ Β**

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς  $z$  και  $w$  με  $z \neq w$  και  $\text{Im}(z) > 0$  για τους οποίους ισχύει  $z+w = x+xi$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

**B<sub>1</sub>**. Να αποδείξετε ότι ο αριθμός  $(z+w)^8$  είναι πραγματικός.

**Μονάδες 8**

**B<sub>2</sub>**. Αν  $|w| = \sqrt{2}$  και για το μιγαδικό  $z$  ισχύει  $z^2 + 2 \cdot z + 2 = 0$ , τότε:

α) να αποδείξετε ότι  $z = -1+i$  και  $w = 1-i$

**Μονάδες 9**

β) να αποδείξετε ότι για κάθε μιγαδικό  $u$  με  $|u| = \sqrt{2}$  ισχύει:

$$|u-z|^2 + |u-w|^2 = |z-w|^2$$

**Μονάδες 8**

### **ΘΕΜΑ Γ**

Δίνονται οι συναρτήσεις  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  και  $g(x) = f(x) - 2x - 1$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

Δίνεται επιπλέον ότι:

- Η  $f$  είναι δυο φορές παραγωγίσιμη,
- $f(1) = 1$  και  $f(3) = 9$ .

**G<sub>1</sub>**. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση  $g(x) = 0$  έχει μια τουλάχιστον ρίζα  $x_0$  στο διάστημα  $(1, 3)$ .

**Μονάδες 8**

## ΑΡΧΗ 3ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

**Γ2.** Αφού αποδείξετε ότι η  $g$  ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής στο διάστημα  $[1, x_0]$ , όπου  $x_0$  ρίζα της εξίσωσης  $g(x)=0$  στο διάστημα  $(1, 3)$ , στη συνέχεια να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα  $\xi_1 \in (1, 3)$  τέτοιο, ώστε  $f'(\xi_1) > 2$ .

**Μονάδες 6**

**Γ3.** Αν  $f(0)=0$  και  $f(x) \geq 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ , να αποδείξετε ότι:

**α)**  $f'(0)=0$

**Μονάδες 7**

**β)** υπάρχει  $\xi_2 \in (0, 3)$  για το οποίο ισχύει  $f'(\xi_2)=2$

**Μονάδες 4**

### **ΘΕΜΑ Δ**

Δίνονται οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις  $f, g: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  των οποίων οι γραφικές παραστάσεις έχουν κοινή εφαπτομένη την ευθεία  $\varepsilon: y = x + 1$  στο κοινό σημείο τους με τετμημένη  $x_0 = 0$ .

Δίνεται επιπλέον ότι:

- Για κάθε  $x \in [0, +\infty)$  είναι  $g(x) \neq 0$ ,  $g'(x) \neq 0$  και  $f'(x) - g(x) = e^x - x - 1$ ,
- Η  $g'$  είναι συνεχής στο  $[0, +\infty)$ .

**Δ1.** Να αποδείξετε ότι:  $f(0) = g(0) = f'(0) = g'(0) = 1$

**Μονάδες 3**

**Δ2.** Να αποδείξετε ότι:

$$g'(x) > 0 \text{ και } g(x) \geq 1 \text{ για κάθε } x \in [0, +\infty)$$

**Μονάδες 4**

**Δ3.** Να αποδείξετε ότι για κάθε  $x \in [0, +\infty)$  ισχύει  $e^x \geq x + 1$  και  $f'(x) \geq 1$

**Μονάδες 6**

**Δ4.** Να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι κυρτή στο  $[0, +\infty)$  και ισχύει  $f(x) \geq x + 1$  για κάθε  $x \in [0, +\infty)$

**Μονάδες 6**

**Δ5.** Να υπολογίσετε το όριο  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - e^x}{x^2}$

**Μονάδες 6**

## **ΑΡΧΗ 4ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ**

### **ΟΛΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)**

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Δεν επιτρέπεται να γράψετε** καμιά άλλη σημείωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα.
4. Να γράψετε τις απαντήσεις σας **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε μολύβι μόνο για σχέδια, διαγράμματα και πίνακες.
5. Να μη χρησιμοποιήσετε χαρτί μιλιμετρέ.
6. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
7. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
8. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 11.30 π.μ.

## **ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΕΠΙΤΥΧΙΕΣ**

## **ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ**