

ΘΕΜΑ Α (5+4+4+4+4+4)

Δίνεται η συνάρτηση f με

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x}-1}{x^2-1} + |\bar{z}-4-3i| & , x < 1 \\ \frac{1}{4} + \frac{\eta\mu(x-1)}{x-1} & , x \geq 1 \end{cases}$$

Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο \mathbb{R} και $z \in \mathbb{C}$ τότε:

A1. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων του $z \in \mathbb{C}$.

A2. Να αποδείξετε ότι: $\sqrt{13}-1 \leq |z-1+i| \leq \sqrt{13}+1$

A3. Δίνεται ο μιγαδικός αριθμός w με $w+3=z+3i$

α) Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων του w .

β) Να αποδείξετε ότι: $|(w-1)^2 + w - 2| \leq \sqrt{5}$

γ) Να αποδείξετε ότι η απόσταση των εικόνων των z και w είναι σταθερή

δ) Να βρείτε την μέγιστη και την ελάχιστη τιμή του $|z+w|$

ΘΕΜΑ Β (6+6+6+7)

Δίνεται η συνεχής και γνήσια μονότονη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με:

- $f(0)+f(1)=0$ και
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)-2x-3]=0$

B1. Να βρείτε τα όρια:

$$\alpha) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} \quad \beta) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x^2)}{\eta\mu x + x} \quad \gamma) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\sqrt{f^2(x) + f(x) + 1} - 2x \right]$$

B2. Να βρείτε το είδος της μονοτονίας της f .

B3. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = f(x^2) + \ln x$ με $x > 0$.

B4. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = f^2(x), x \in \mathbb{R}$

α) Να δείξετε ότι η g έχει ελάχιστη τιμή.

β) Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $g(x) = \ln \alpha + \alpha - 1$, για τις διάφορες τιμές του $\alpha \in (0, 1]$.

ΘΕΜΑ Γ. (3+4+3+5+6+4)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^5 + 2x + 1$

Γ1. Να βρείτε ένα ακέραιο α τέτοιον, ώστε στο διάστημα $(\alpha, \alpha + 1)$ η εξίσωση $f(x) = 0$ να έχει μια τουλάχιστον ρίζα.

Γ2. Να αποδείξετε ότι:

α) Η f έχει σύνολο τιμών το \mathbb{R}

β) Η f είναι αντιστρέψιμη.

γ) Ισχύει $-1 < f^{-1}(0) < 0$.

δ) Για κάθε $x, x_0 \in \mathbb{R}$ ισχύει: $|f^{-1}(x) - f^{-1}(x_0)| \leq \frac{1}{2}|x - x_0|$

ε) Η f^{-1} είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της.

ΘΕΜΑ Δ (6+6+6+7)

Έστω f μια συνεχής συνάρτηση στο πεδίο ορισμού της με $f^{-1}(x) = x^3 + 2x - 3, x \in \mathbb{R}$

Δ1. Αν $z = f(0) + if(\beta)$ και $f^{-1}(|z|) = 0$ να βρείτε τον πραγματικό αριθμό β .

Δ2. Να δείξετε ότι για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$ η ευθεία $y = f(\alpha)$ και η γραφική παράσταση της f^{-1} έχουν ακριβώς ένα κοινό σημείο.

Δ3. Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{(f(x) - 1)^2}$

Δ4. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(2f^3(x) - 4x) - f(x^2 + 1 + f(2)) = 0$ έχει μια τουλάχιστον λύση στο διάστημα $(-3, 0)$

Καλή Επιτυχία