
Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ ΘΕΤΙΚΗ & ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ

3/Ω ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

A01.

ΘΕΜΑ Α

- A1 Να γράψετε πότε δύο συναρτήσεις λέγονται ίσες Μον_5
- A2. Να γράψετε τον ορισμό της 1-1 συνάρτησης Μον_5
- A3 Πότε θα λέμε ότι μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της; Μον_5
- A4 Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, με την ένδειξη σωστή, ή Λάθος Μον_10
- α) Η συνάρτηση f είναι 1-1, αν και μόνο αν κάθε οριζόντια ευθεία τέμνει τη γραφική παράσταση της f το πολύ σε ένα σημείο.
- β) Μια συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι "1-1", αν και μόνο αν για κάθε y του συνόλου τιμών της η εξίσωση $f(x) = y$ έχει ακριβώς μία λύση ως προς x
- γ) Αν η γραφική παράσταση μιας αντιστρέψιμης συνάρτησης f τέμνει την ευθεία $y = x$ στο σημείο (α, α) τότε και η γραφική παράσταση της f^{-1} τέμνει την $y = x$ στο (α, α) .
- δ) Το πεδίο ορισμού της $f \circ g$ είναι τα $x \in \mathbb{R}$ για τα οποία ισχύει ότι $g(x) \in D_f$
- ε) Δίνεται η 1-1 συνάρτηση $f: A \rightarrow B$. Ισχύει πάντα ότι $f^{-1} \circ f = f \circ f^{-1}$

ΘΕΜΑ Β

Έστω οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $g(x) = -7x^2 + 5x + 2$, ισχύει: $2(f(x))^3 + 3f(x) = x + 5$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και η f έχει σύνολο τιμών το \mathbb{R}

- B1. Να αποδείξετε ότι η g δεν είναι αντιστρέψιμη, η f είναι αντιστρέψιμη και να βρείτε τον τύπο της f^{-1} Μον_6
- B2 Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τους άξονες $x'x, y'y$ Μον_3
- B3. Να λύσετε τις ανισώσεις $f(3x) < x$ (Μον_3) και $f^{-1}(x) > g(x)$ (Μον_3)
- B4 Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ η συνάρτηση $h(x) = xf^{-1}(x) + g(x)$ παρουσιάζει

ελάχιστο (Μον3) και ότι για κάθε $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} - \{0\}$ ισχύει ότι $\frac{\alpha^2}{\beta^4} + \frac{\beta^2}{\gamma^4} + \frac{\gamma^2}{\alpha^4} \geq \frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2} + \frac{1}{\gamma^2}$

(Μον_7)

ΘΕΜΑ Γ

Γ1 Να λυθεί η εξίσωση: $\left(\frac{1}{2}\right)^x - x = 1$. Mov_5

Έστω η συνάρτηση f ορισμένη στο \mathbb{R} για την οποία ισχύει $\left(\frac{1}{2}\right)^{f(x)} - f(x) = x + 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Γ2 Να αποδείξετε ότι $f(0) = 0$ Mov_4

Γ3 Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο \mathbb{R} Mov_4

Γ4 Να λυθούν οι ανισώσεις: $2^{f(x)}(f(x)+6) > 1$ και $f\left(2^{f(x)}(16f(x)-3)\right) > f(16)$ Mov_6

Γ5 Να λύσετε την εξίσωση $x^2 + f(\sqrt{x}) = \sqrt{x} + f(x^2)$ Mov_6

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η γνησίως φθίνουσα συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ και η συνάρτηση $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ να ισχύει η σχέση $f(f(x)) = 2g(x) - x$

Δ1 Να δείξετε ότι η g είναι γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R} . Mov_5

Δ2 Να βρείτε το είδος της μονοτονίας της $h(x) = f(x) - g(x)$ Mov_6

Έστω ακόμη ότι υπάρχει $x_0 \in \mathbb{R}$ ώστε $f(x_0) = x_0$

Δ3 Να δείξετε ότι η C_f και η C_g τέμνονται σε ένα μόνο σημείο. Mov_4

Δ4 Να λύσετε την εξίσωση $f(f(x+x_0-2)) + x+x_0 = 2f(x+x_0-2) + 2$ Mov_5

Δ5 Να λύσετε την ανίσωση $f(f(\ln x + x_0 + 1)) + \ln x + 1 < x_0$ Mov_5
