Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ - ΘΕΤΙΚΗ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ

ΜΙΓΑΔΙΚΟΙ

Μ_6

ΘΕΜΑ Α

Α1 Να αποδείξετε ότι $|z|^2 = z\bar{z}$ για κάθε $z \in C$ Μον_5

Α2 Να δώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία του αθροίσματος δύο μιγαδικών Μον_4

Α3) Τι παριστάνουν γεωμετρικά οι εξισώσεις : $|z - z_o| = \rho > 0$ και $|z - z_o| = |z - z_1|$; Μον_4

Α3) Να χαρακτηρίσετε κάθε μια από τις παρακάτω προτάσεις ως «Αληθής» ή «Ψευδής» Μον_12

α Δύο σημεία του μιγαδικού επιπέδου, που είναι συμμετρικά ως προς την αρχή των αξόνων είναι εικόνες δύο αντίθετων μιγαδικών αριθμών

β Ο αντίστροφος του i είναι ο $-i$

γ Η εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$, $\alpha, \beta, \gamma \in R$ έχει πάντοτε λύση στο C.

δ Οι εικόνες των μιγαδικών z, $\bar{z}$, $i \cdot \bar{z}$, $-z$ είναι σημεία του μοναδιαίου κύκλου.

ε Για τις ρίζες της εξίσωσης $\alpha z^2 + \beta z + \gamma = 0$ $\alpha, \beta, \gamma \in R$, $\alpha \neq 0$ στο C ισχύουν οι ισότητες: $z_1 + z_2 = -\frac{\beta}{\alpha}$ και $z_1 z_2 = \frac{\gamma}{\alpha}$

ΘΕΜΑ Β

Έστω $z \in C$ με $|z| = 1$ και $|z - 1| = \alpha$. Να αποδείξετε ότι:

Α) $\alpha \in [0, 2]$

Β) $z + \bar{z} = 2 - \alpha^2$

Γ) $|1 + z^2| = |z + \bar{z}|$

Δ) $\sqrt{2} \le |1 - z| + |1 + z^2| \le 4$

ΘΕΜΑ Γ

Έστω $\alpha,\beta \in R^*$ και οι μιγαδικοί z_1 , z_2 με: $z_1 = (\alpha+2\beta)+(2\alpha-\beta)i$,
$z_2 = (\alpha-\beta)+(\alpha+\beta)i$

Γ1 Να αποδείξετε ότι: $|z_1| > |z_2|$

Γ2 Να αποδείξετε ότι $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| > \left|\frac{z_2}{z_1}\right|$

Γ3 Να αποδείξετε ότι αν $|z_2| > 2$ τότε $z_1 + z_2 \neq z_1 \cdot z_2$

Γ4 Αν η εικόνα του $z_1 + z_2$ ανήκει στην ευθεία: $\varepsilon: \ y = x + 2$, να αποδείξετε ότι οι εικόνες των z_1 , z_2 διαγράφουν , αντίστοιχα, από μία ευθεία.

ΘΕΜΑ Δ

Για το μιγαδικό z ισχύει ότι: $2^{2004}\,\mathrm{Im}(z) + \left|2^{2003} + 2^{2003} i\sqrt{3}\right| |z-1|^2 = 0$ (1)

Δ1) Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών z στο μιγαδικό επίπεδο είναι κύκλος με κέντρο $K\left(1, -\frac{1}{2}\right)$ και ακτίνα $\rho = \frac{1}{2}$

Μον_7

Δ2) Να βρείτε το μιγαδικό z_o του οποίου η εικόνα απέχει τη μικρότερη απόσταση από την εικόνα του μιγαδικού $w = 2 - \frac{1}{2}i$ Μον_6

Δ3) Για τους μιγαδικούς z που ικανοποιούν την (1) να αποδειχτεί ότι ισχύει : $2 \le |z + 1 + 2i| \le 3$ Μον_6

Δ4) Αν z_1, z_2 είναι δύο μιγαδικοί του γεωμετρικού τόπου του Δ1) ερωτήματος να αποδειχτεί ότι $|z_1 - z_2|^4 \le 1$ Μον_6