ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΟ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΑ ΜΑΘ ΚΑΤΕΥΘ Γ ΛΥΚΕΙΟΥ για το 2012 (2/5)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα [α,β].Αν:

- η f είναι συνεχής στο [α,β] και
- $f(α) \neq f(β)$

να αποδείξτε ότι: για κάθε αριθμό η μεταξύ των f(α) και f(β) υπάρχει ένας, τουλάχιστον $x_0 \in (\alpha,\beta)$ τέτοιος, ώστε $f(x_0)=η$.

Μονάδες 11

Α2. Πότε μια συνάρτηση f λέγεται παραγωγίσιμη σ'ένα κλειστό διάστημα [α,β]; **Μονάδες 6**

Α3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν με **Σωστό**,ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Αν $\int_\alpha^\beta f(x)dx = 0$ με α<β τότε κατ' ανάγκη ισχύει $f(x)=0$ για κάθε $x \in [\alpha,\beta]$.

β. Μια συνεχής συνάρτηση f διατηρεί πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα στα οποία οι διαδοχικές ρίζες της f χωρίζουν το πεδίο ορισμού της.

γ. Αν $\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$ τότε $f(x)<0$ κοντά στο x_0.

δ. $\left(\ln|x|\right)' = \frac{1}{x}$ για κάθε $x \in R^*$ **Μονάδες 8**

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται συνάρτηση f με

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x}-1}{x^2-1} + \left|\overline{z} - 4 - 3i\right|, & αν\ x \in [0,1) \\ \dfrac{1}{4}\dfrac{ημ(x-1)}{x-1} + x, & αν\ x \in (1,+\infty) \end{cases}$$

Αν η f έχει όριο στο $x_0=1$, και $z \in C$ τότε:

Β1. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων του z. **Μονάδες 7**

Β2. Να αποδείξετε ότι $\sqrt{13}-1 \le |z-1+i| \le \sqrt{13}+1$ **Μονάδες 7**

Β3. Δίνονται οι μιγαδικοί w και $z_1 = w-1$ και $z_2 = z-4+3i$

i) Αν $|z_1| = |z_2|$ να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων του w. **Μονάδες 6**

ii) Αν $z_1 = z_2$ να δείξετε ότι η απόσταση των εικόνων των μιγαδικών z και w είναι σταθερή. **Μονάδες 5**

ΘΕΜΑ Γ

Έστω μια συνάρτηση f με τύπο $f(x)=\dfrac{\ln x}{\alpha x}, \alpha \in R^*$ για την οποία ισχύει,

$f(x) \geq x-1$ για κάθε $x>0$

Γ1. Να αποδείξετε ότι α=1. **Μονάδες 5**

Για α=1,

Γ2. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα, να βρείτε το σύνολο τιμών της και να αποδείξετε ότι $f(x) \leq \dfrac{1}{e}$ για κάθε $x>0$. **Μονάδες 6**

Γ3. Έστω η συνάρτηση $g(x)=\ln x+2012x$

Α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $g(x)=0$ έχει ακριβώς μια ρίζα στο $(0,+\infty)$ **Μονάδες 7**

Β) Να υπολογίσετε το $I=\int_1^e g(x)dx$. **Μονάδες 7**

ΘΕΜΑ Δ

Έστω η συνάρτηση $f: R \to R$ συνεχής, για την οποία ισχύουν

- η f είναι γνησίως αύξουσα για κάθε $x \in R$
- η f είναι κυρτή για κάθε $x \in R$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)=+\infty$

Ορίζουμε τη συνάρτηση $F(x)=\int_x^{x+1} f(t)dt \quad x \in R$.

Δ1. Να μελετήσετε τη συνάρτηση F ως προς τη μονοτονία. **Μονάδες 4**

Δ2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση F είναι κυρτή στο R . **Μονάδες 3**

Δ3. Αν επιπλέον ισχύει ότι $F(1)=F'(1)=1$,

i) να αποδείξετε $\int_x^{x+1} f(t)dt \geq x$ για κάθε $x \in R$. **Μονάδες 7**

ii) Να δείξετε ότι η συνάρτηση **F(x)** δεν έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$.
Μονάδες 6

iii) Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x \to +\infty}\left(x^{2012}\int_x^{x+1} f(t)dt\right)$ **Μονάδες 5**

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ – Α

$A_1 \to$ Θεωρία (11 Μ)
$A_2 \to$ –//– (6 Μ)
$A_3 \to$ α→Λ , β→Σ , γ→Σ , δ→Σ (8 Μ)

ΘΕΜΑ – Β

B1 Αφού υπάρχει το $\lim_{x\to 1} f(x)$, είναι $\lim_{1^-} f(x) = \lim_{1^+} f(x)$ ①

Όμως • $\lim_{1^-} f(x) = \lim_{1^-} \left[\frac{\sqrt{x}-1}{x^2-1} + |\bar{z}-4-3i|\right]$ (υπάρχουν τα όρια μέσα στην αγκύλη)

$= \dots = \frac{1}{4} + |\bar{z}-4-3i|$

• $\lim_{1^+} f(x) = \lim \left[\frac{1}{4}\cdot\frac{\eta\mu(x-1)}{x-1} + x\right] =$ (–//–)

$= \dots = \frac{1}{4}\cdot 1 + 1 = \frac{1}{4} + 1$ οπότε από ① έχω

$\frac{1}{4} + |\bar{z}-4-3i| = \frac{1}{4} + 1$ άρα $|\bar{z}-4-3i| = 1$ οπότε

$|\overline{\bar{z}-4-3i}| = 1 \Rightarrow |z-4+3i| = 1 \Rightarrow |z-(4-3i)| = 1$ ②

Κατά συνέπεια ο Γ.Τ. $M(z)$ είναι κύκλος κέντρου $K(4,-3)$ & ακτίνας $\rho = 1$ $\boxed{7\ M}$

B2 Έστω $\Pi = z-1+i = (z-4+3i)+(3-2i)$ ③ οπότε

χρησιμοποιώντας την ιδιότητα $||z_1|-|z_2|| \le |z_1 \pm z_2| \le |z_1|+|z_2|$

έχω: $||z-4+3i|-|3-2i|| \le |\Pi| \le |z-4+3i|+|3-2i|$ οπότε

(από ②) $|1-\sqrt{3^2+2^2}| \le |\Pi| \le 1+\sqrt{3^2+2^2} \Rightarrow |1-\sqrt{13}| \le |\Pi| \le 1+\sqrt{13}$

$\Rightarrow \sqrt{13}-1 \le |z-1+i| \le \sqrt{13}+1$ εδώ χάθα $\boxed{7\ M}$

$\boxed{B_3}$ Έχουμε $z_1 = w-1$ κ' $z_2 = z-4+3i$ $\boxed{3}$

$\boxed{i}$ Είναι $|z_1| = |z_2|$ οπότε (από 3) προκύπτει

$|w-1| = |z-4+3i| \overset{(2)}{=} 1$ άρα $|w-(1+0i)| = 1$

Άρα ο ΓΤ $A(w)$ είναι κύκλος κέντρου $K(1,0)$

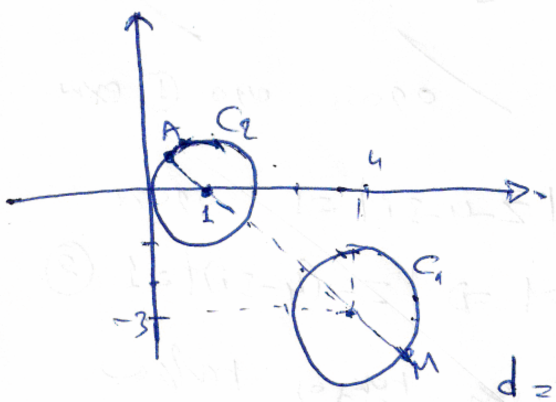
κ' ακτίνας $\rho = 1$ $\boxed{6M}$

$\boxed{ii}$ Είναι $z_1 = z_2$ άρα (από 3) έχω:

$w-1 = z-4+3i \Rightarrow w-z = -3+3i$ οπότε

$d(M,A) = |w-z| = \sqrt{(-3)^2+3^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$ σταθ. $\boxed{5M}$

Σχόλιο σχετικά με $\boxed{B_3 / ii}$



Αν $C_2 \to$ ΓΤ $A(w)$

$C_1 \to$ ΓΤ $M(z)$

Για τη σταθερή απόσταση των εικόνων $M(z)$, $A(w)$ αναφερόμαστε στην περίπτωση που $z_1 = z_2$ οπότε το $d = (AM)$ "λειτουργεί" σαν σταθερό "δίπολο"

ΘΕΜΑ Γ $f(x) = \frac{\ln x}{\alpha x}$ $\boxed{1}$, $f(x) \geq x-1$ (2) $(x>0)$

$\boxed{\Gamma_1}$ $\boxed{5M}$ Από (2) έχω $f(x) - x + 1 \geq 0$ άρα

$\frac{\ln x}{\alpha x} - x + 1 \geq 0$ $\boxed{3}$

• Έστω $h(x) = \frac{\ln x}{\alpha x} - x + 1$ οπότε $\boxed{\text{με } x>0}$

• Η (3) γράφεται $h(x)\geq 0 \Rightarrow h(x)\geq h(1)$

Δηλαδή $h(1)=h_{min}(x)$ } $\overset{\text{Θ. Fermat}}{\Longrightarrow}$ $h'(1)=0$ $\boxed{4}$

• Όμως $h\ /^{\Pi}(0,+\infty) \Rightarrow h\ /^{\Pi}\ x=1$

κ' $x=1 \in (0,+\infty)$ (εσωτερικό)

• Όμως $h'(x) = \left(\frac{\ln x}{\alpha x}\right)' - x' + 1' = \frac{\frac{1}{x}\alpha x - \alpha\ln x}{\alpha^2 x^2} - 1$

$$h'(x) = \frac{\alpha(1-\ln x)}{\alpha^2 x^2} - 1 \overset{\boxed{\alpha\neq 0}}{=} \frac{1-\ln x}{\alpha x^2} - 1$$

$$h'(1) = \frac{1-\ln 1}{\alpha\cdot 1^2} - 1 = \frac{1}{\alpha} - 1 \overset{(4)}{=} 0 \Rightarrow \frac{1}{\alpha}=1 \text{ άρα } \boxed{\alpha=1}$$

Έχω $\boxed{\alpha=1}$

$\boxed{\Gamma 2}\ \boxed{6\mu}$ Είναι $f(x) \overset{(\alpha=1)}{=} \frac{\ln x}{x}$ / $(0,+\infty)$

• $f'(x) = \frac{\frac{1}{x}\cdot x - \ln x}{x^2} = \frac{1-\ln x}{x^2}$ $\boxed{5}$

• $f'(x)>0 \overset{(8)}{\Rightarrow} 1-\ln x>0 \Rightarrow \ln x<1 \Rightarrow \ln x<\ln e$

$\overset{(\ln x \uparrow)}{\Longrightarrow} x\leq e$ Όμοια $f'(x)<0 \Rightarrow \dots\ x\geq e$

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$	

$f \uparrow$ στο $(0,e]$

$f \downarrow$ στο $[e,+\infty)$

$f(e) = \frac{\ln e}{e} = \frac{1}{e} = $ Τ. max

Όμως η $f\ /^{\Pi}(0,+\infty)$ άρα

$\boxed{f(e)=\frac{1}{e} \text{ ολικό max}}$ (6)

• για $x \in (0, e]$ (είναι $f \nearrow$ 1-1 συνεχής) οπότε $f(A_1) = (\lim_{0^+} f(x), f(e)]$

οπότε $f(A_1) = (-\infty, \frac{1}{e}]$ Αφού

$\lim_{0^+} f(x) = \lim_{0^+} \frac{\ln x}{x} = \lim_{0^+} \frac{1}{x} \cdot \ln x$ Δε χρησιμοποιούμε De L Hospital !!!

$= (+\infty)(-\infty) = -\infty$

• για $x \in [e, +\infty)$ (είναι $f \swarrow$ 1-1 συνεχής) οπότε

$f(A_2) = (\lim_{+\infty} f(x), f(e)] = (0, \frac{1}{e}]$ γιατί

$\lim_{+\infty} f(x) = \lim_{+\infty} \frac{\ln x}{x}$ ($y = \ln x$, $y = x$ συνεχείς, παραγωγίσιμες απρ/ιτία ∞/∞) $\overset{DLH}{=} \lim_{+\infty} \frac{(\ln x)'}{x'}$

$= \lim_{+\infty} \frac{1}{x} = 0$

Άρα $f(A) = (-\infty, \frac{1}{e}] \cup (0, \frac{1}{e}] = (-\infty, \frac{1}{e}]$ $\boxed{7}$

• Από (6) (ή (7)) φανερά ισχύει $f(x) \leq \frac{1}{e}$

$\boxed{\Gamma_3}$ $g(x) = \ln x + 2012x$ (1) $x \in (0, +\infty)$

$\boxed{A}$ ΤΜ) <u>Α' τρόπος</u> $g'(x) = \frac{1}{x} + 2012 > 0$ $(\forall x \in (0, +\infty))$

άρα $g \nearrow$ 1-1 συνεχής. Άρα

$\Sigma T_g = g(A) = \left(\lim_{0^+} g(x), \lim_{+\infty} g(x)\right) \overset{\text{απόδειξ}}{=} (-\infty, +\infty)$

Άρα $\exists\, \alpha$ (κοντά στο $-\infty$) : $g(\alpha) < 0$
$\exists\, b$ (κοντά στο $+\infty$) : $g(b) > 0$ $\Big\} \Rightarrow g(\alpha)g(b) < 0$

Άρα από Θ Bolzano $\exists\, \xi \in (\alpha, b) \subseteq (0, +\infty) : g(\xi) = 0$

Όμως $g \nearrow \Rightarrow \exists$ μοναδική ρίζα

$\boxed{B'/\text{Θέμα}}$ Εξίσωση $\left(\begin{smallmatrix}\text{διαιρώ } \kappa \\ x > 0\end{smallmatrix}\right)$ ισοδύναμη

$\frac{\ln x}{x} + 2012 = 0$ άρα $\boxed{f(x) = -2012}$

Όμως $\Sigma T_f = f(A) = \left(-\infty, \frac{1}{e}\right]$
$-2012 \in f(A)$
f συνεχής
$\Bigg| \Rightarrow$ από ΘΕΤ $\exists\, x_0 \in (0, +\infty)$: $f(x_0) = -2012$

Δηλαδή η εξίσωση έχει 1 τουλάχιστον ρίζα

Όμως $f \nearrow \Rightarrow x_0$ μοναδική ρίζα

$\boxed{B'/\text{ΓΜ}}$ $I = \int_1^e g(x)\,dx = \underbrace{\int_1^e \ln x\,dx}_{I_1} + 2012 \underbrace{\int_1^e x\,dx}_{I_2}$ (1)

- $I_1 = \int_1^e x' \ln x\,dx \overset{\text{π.ο.}}{=} [x \ln x]_1^e - \int_1^e x (\ln x)'\,dx$
$= [x \ln x]_1^e - \int_1^e 1\,dx = [x \ln x]_1^e - [x]_1^e$
$= (e \ln e - 1 \underbrace{\ln 1}_{=0}) - (e - 1) = e - e + 1 = 1$ οπότε

- $I_2 = \int_1^e x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_1^e = \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2}$

$I = 1 + 2012\left(\frac{e^2}{2} - \frac{1}{2}\right)$

ΘΕΜΑ Δ

- f / $\overset{5}{}\mathbb{R}$, κυρτή !!
- $f \nearrow$ στο $\mathbb{R}$
- $\lim_{+\infty} f(x) = +\infty$

(1) κ $F(x) = \int_x^{x+1} f(t)\,dt$ (2) $x \in \mathbb{R}$

Δ1 4Μ

$F(x) \overset{(2)}{=} \left(\begin{matrix}\text{αφού } f \,/\, \overset{5}{}\mathbb{R} \\ \text{κ } 0 \in \mathbb{R}\end{matrix}\right) = \int_x^0 f(t)\,dt + \int_0^{x+1} f(t)\,dt$

άρα $\boxed{F(x) = \int_0^{x+1} f(t)\,dt - \int_0^{x} f(t)\,dt}$ (2')

- Είναι f / $\overset{5}{}\mathbb{R}$ άρα $y = \int_0^{x+1} f$ κ $y = \int_0^{x} f$ ως
  Η παράγουσες είναι παραγωγίσιμες
- Η F λοιπόν είναι παραγωγίσιμη (διαφορά παραγωγίσιμων)

όποτε $F'(x) \overset{(2)}{=} \left(\int_0^{x+1} f(t)\,dt\right)' - \left(\int_0^{x} f(t)\,dt\right)'$

άρα $\boxed{F'(x) = f(x+1) - f(x)}$ (3)

Είναι $x+1 > x \overset{f \nearrow}{\Rightarrow} f(x+1) > f(x)$ άρα

από (3) $\rightarrow F'(x) > 0$ / άρα
$x \in \mathbb{R}$ / $F \nearrow$ στο $\mathbb{R}$

$\boxed{\Delta_2}$ $\boxed{3M}$ Έχω (από υπόθ) ότι f κυρτή $\cup$ άρα

$\boxed{f' \nearrow}$ (4) (Δηλαδή f και παραγωγίσιμη)

Οπότε από (3) έχουμε

$F''(x) = f'(x+1)(x+1)' - f'(x)$ άρα

$$\boxed{F''(x) = f'(x+1) - f'(x)} \quad (5)$$

Όμως $x+1 > x \overset{(4)}{\Rightarrow} f'(x+1) > f'(x)$ άρα

από (5) έχουμε $F''(x) > 0$ / άρα $F(x) \cup$ στο $\mathbb{R}$
$x \in \mathbb{R}$ κυρτή

$\boxed{\Delta_3}$ Έχουμε $F(1) = F'(1) = 1$ (1)

$\boxed{i}$ $\boxed{7M}$ ΘΔΟ $\int_x^{x+1} f(t)\,dt \geq x$ δηλαδή

$F(x) \geq x$ δηλαδή $\boxed{H(x) = F(x) - x \geq 0}$

• $H(x)$ παραγωγίσιμη | $H'(x) = F'(x) - 1$ οπότε

▸ $H'(x) > 0 \Rightarrow F'(x) - 1 > 0 \Rightarrow F'(x) > 1 \Rightarrow F'(x) > F'(1)$

Όμως $f \cup$ άρα $F' \nearrow$ οπότε $x > 1$

Ομοίως $H'(x) \leq 0$ ... $\Rightarrow x \leq 1$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$H'(x)$		$-$	0	$+$	
$H(x)$		$\searrow$	Τ.Ε	$\nearrow$	

$H(1)=F(1)-1=1-1=0$

Τ. ΜΜ

Οπότε $H(x)$ συνάρτηση άρα $\boxed{H(1)=0 \text{ ολικό ΜΜ}}$

Καλα συνέπεια

$H(x) \geq H(1)\ \forall x \in \mathbb{R}$ άρα $H(x) \geq 0$

$\Rightarrow F(x) \geq x \Rightarrow \boxed{\int_x^{x+1} f(t)\,dt \geq x}$ (2) $(x \in \mathbb{R})$

$\boxed{\text{ii}}$ $\boxed{\text{ότι}}$

Από (2) $\Rightarrow \lim_{+\infty} \int_x^{x+1} f(t)\,dt \geq \lim_{+\infty} x$ άρα

$\lim_{+\infty} F(x) \geq \lim_{+\infty} x$ | άρα $\lim_{+\infty} F(x) = +\infty$

Όμως $\lim_{+\infty} x = +\infty$ | άρα $\nexists$ ΟΑ $(x \to +\infty)$

$\boxed{\text{iii}}$ Α' τρόπος

Είναι $x \leq t \leq x+1$ | $\int_x^{x+1} f(x)\,dt \leq \int_x^{x+1} f(t)\,dt \leq \int_x^{x+1} f(x+1)\,dt$

όμως $f \nearrow \to f(x) \leq f(t) \leq f(x+1)$

χρήσιμη η ιδιότητα ολοκλ. για ορισμένου ολοκληρώματος με μεταβλητά άκρα

άρα $f(x)\int_x^{x+1} 1\,dt \leq \int_x^{x+1} f(t)\,dt \leq f(x+1)\int_x^{x+1} 1\,dt$

άρα $f(x)\,[t]_x^{x+1} \leq \int_x^{x+1} f(t)\,dt \leq f(x+1)\,[t]_x^{x+1}$

$f(x) \leq \int_x^{x+1} f(t)\,dt \leq f(x+1)$ (3)

Όμως $\lim\limits_{+\infty} f(x) = +\infty$ (υπόθ.)

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(\underbrace{x+1}_{y}) = \lim\limits_{y\to+\infty} f(y) = +\infty$ $\overset{\text{ΚΠ}}{\Rightarrow} \lim\limits_{+\infty} \int_x^{x+1} f(t)dt = +\infty$

Οπότε $\lim\limits_{+\infty} \left(\int_x^{x+1} f(t)dt\right) x^{2012} = (+\infty)(+\infty) = +\infty$

$\boxed{\text{Β' τρόπος}}$ Αφού $x \to +\infty$ ("από συμβάσεις φίλω") έχουμε $\boxed{x>0}$ (4)

Από το Δ_3/i έχουμε $\int_x^{x+1} f(t)dt \geq x \overset{\cdot x^{2012}>0}{\Rightarrow}$

$$x^{2012}\int_x^{x+1} f(t)dt \geq x^{2013}$$ άρα ισχ.

$$\lim\limits_{+\infty}\left(x^{2012}\int_x^{x+1} f(t)dt\right) \geq \lim\limits_{+\infty} x^{2013}$$

όμως $\lim\limits_{+\infty} x^{2013} = +\infty$ άρα ισχ.

$$\lim\limits_{+\infty}\left(x^{2012}\int_x^{x+1} f(t)dt\right) = +\infty$$

$\boxed{\text{Γ' ΤΡΟΠΟΣ}}$ Είναι $\lim\limits_{+\infty} x^{2012} = +\infty$

$\lim\limits_{+\infty} \int_x^{x+1} f(t)dt \geq \lim\limits_{+\infty} x = +\infty$ άρα $\lim \int_x^{x+1} f(t)dt = +\infty$

Άρα $\lim\limits_{+\infty}\left(x^{2012}\int_x^{x+1} f(t)dt\right) = (+\infty)(+\infty) = +\infty$ $\Rightarrow$

ΣΧΟΛΙΑ

$\boxed{1^o}$ Για το Δ_3/i μια ακόμα λύση

- Η εφαπτομένη της C_F στο $x_0=1$

$y - F(1) = F'(1)(x-1) \Rightarrow y-1 = x-1 \Rightarrow \boxed{y=x}$ (ε)

- Όμως η F είναι $\cup$ κυρτή άρα

$F(x) \geq y(x) \Rightarrow F(x) \geq x \Rightarrow \int_x^{x+1} f(t)dt \geq x \quad (x \in \mathbb{R})$

$\boxed{2^o}$ Από τη θέση αυτή θα ήθελα να ευχαριστήσω

- Τα παιδιά του Γετ - Γτεχν για την εμπιστοσύνη που μας έδειξαν & τη μεγάλη συμμετοχή στο διαγώνισμα
- Εκλεκτούς συναδέλφους από το mathematica για τις ιδέες τους
- Το συνάδελφο & φίλο κ. Γεωργίου Σεραφείμ για τη συνεργασία που είχαμε