ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΠΡΟΣΟΜΕΙΩΣΗΣ ΣΤΑ ΜΑΘ ΚΑΤΕΥΘ Γ ΛΥΚΕΙΟΥ για το 2012

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ. Να αποδείξετε ότι:

- Αν $f'(x) > 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ τότε η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ. **Μονάδες 9**

Α2. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \alpha^x$ με α>1 και $x \in R$.

Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη και ότι ισχύει $f'(x) = \alpha^x \ln\alpha$ για κάθε $x \in R$. **Μονάδες 5**

Α3. Να δώσετε τον ορισμό της παράγουσας μιας συνάρτησης f σε ένα διάστημα Δ. **Μονάδες 3**

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Αν μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής σ' ένα διάστημα Δ, τότε δεν παίρνει υποχρεωτικά όλες τις ενδιάμεσες τιμές.

β. Αν $f(x) = g(x)$ τότε οι συναρτήσεις f,g είναι ίσες.

γ. Αν $z \in C$ τότε ισχύει $z + \overline{z} = 2\mathrm{Re}(z)$

δ. Αν μια συνάρτηση f είναι κοίλη σ' ένα διάστημα Δ, τότε η f' είναι γνησίως αύξουσα στο Δ. **Μονάδες 8**

ΘΕΜΑ Β

Έστω μια συνάρτηση f: $R^* \to R^*$,η οποία ικανοποιεί τη σχέση,

$$2012f\left(f(x)\right) = x^3 f(x) + 2011f\left(f(1)\right) \text{ για κάθε } x \in R^*$$

Β1. Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1 και f(1)=1 . **Μονάδες 5**

Β2. Αν ισχύει ότι $f^{-1}(z\text{-}ημθi\text{+}2i\text{-}συνθ) = 1$ $θ \in R$, $z \in C$, να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των μιγαδικών z. **Μονάδες 7**

Β3. να βρείτε την μέγιστη και την ελάχιστη τιμή του $|z + 2 - i|$. **Μονάδες 6**

Β4. Αν $z_1, z_2 \in C$ δύο από τους μιγαδικούς που ανήκουν στο γεωμετρικό τόπο των μιγαδικών z, με $|z_1 - z_2| = 2$ να υπολογίσετε το $|z_1 + z_2|$. **Μονάδες 7**

ΘΕΜΑ Γ

Έστω μια συνάρτηση $f: R \to R$, παραγωγίσιμη, για την οποία ισχύει η παρακάτω σχέση, $e^{f(x)} + f(x) = x$, για κάθε $x \in R$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται, και στη συνέχεια να βρείτε τον τύπο της $f^{-1}(x)$, εάν $f(R) = R$. **Μονάδες 6**

Γ2. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $e^x + x - 1 = 0$ έχει μοναδική ρίζα στο $\mathbb{R}$, και στη συνέχεια να δείξετε ότι f(1)=0. **Μονάδες 6**

Γ3. Να αποδείξετε ότι η f είναι κοίλη στο $\mathbb{R}$, να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο Α(1, f(1)),

και να δείξετε ότι $\int_0^2 f(x)dx \le 0$. **Μονάδες 5**

Γ4. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I = \int_1^{e+1} f(x)dx$ **Μονάδες 8**

<u>ΘΕΜΑ Δ</u>

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: [0,3] \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν

- $f(0) = f'(0) = 0$
- $f'(x) > f(x)$ για κάθε $x \in (0,3]$.
- $\int_1^x \left(\int_0^u f(u-t)dt \right) du \ge x^2 - 1$ για κάθε $x \in [0,3]$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι $f(x) > \int_0^x f(x)dx$ για κάθε $x \in (0,3]$.

Μονάδες 7

Δ2. Δίνεται η συνάρτηση $h(x) = e^{-x} \int_0^x f(x)dx$

Να αποδείξετε ότι,

i) η h είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα [0,3]. **Μονάδες 4**

ii) $\int_0^x f(x)dx > 0$ **Μονάδες 4**

iii) Να λυθεί η ανίσωση $e^x \int_0^{x^2-2} f(t)dt > e^{x^2-2} \int_0^x f(t)dt$ **Μονάδες 5**

Δ3. Να αποδείξετε ότι το εμβαδό του χωρίου Ω, που περικλείεται από την γραφική παράσταση της f, τον άξονα xx' και τις ευθείες x=0 και x=1 είναι 2 τ.μ. **Μονάδες 5**

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ