ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ

ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ Γ΄ ΤΑΞΗΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΙ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β΄)
ΤΡΙΤΗ 7 ΜΑΙΟΥ 2013
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ
ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Αν z_1 , z_2 είναι μιγαδικοί αριθμοί, να αποδειχθεί ότι:

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|.$$

Μονάδες 8

Α2. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \ln|x|$ με $x \in R\text{-}\{0\}$.
Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη και ότι ισχύει $f\,'(x) = \dfrac{1}{x}$ για κάθε $x \in R\text{-}\{0\}$

Μονάδες 7

Α3. Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα κλειστό διάστημα [α,β];

Μονάδες 5

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σ’ ένα διάστημα Δ, τότε υποχρεωτικά είναι και παραγωγίσιμη στο Δ

β. Αν $f'(x) = g'(x)$ τότε οι συναρτήσεις f,g είναι ίσες.

γ. Αν z_1, z_2 είναι μιγαδικοί αριθμοί, τότε ισχύει πάντα

$$\big|\, |z_1| - |iz_2| \,\big| \le |iz_1 - z_2| \le |z_1| + |iz_2| .$$

δ. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και δεν είναι 1-1, τότε υπάρχει κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$, στο οποίο η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle.

ε. Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$ και ισχύει $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [\alpha,\beta]$, τότε ισχύει ότι $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx > 0$.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Β

Για τον μη πραγματικό μιγαδικό z ισχύει ότι :

$$z = (1+i)|z-1| - 3 - 2i$$

Β1. Να δείξετε ότι $\mathrm{Re}(z) = \mathrm{Im}(z) - 1$ **Μονάδες 4**

Β2. Να δείξετε ότι $|z-1|^2 - 12|z-1| + 20 = 0$ και να βρείτε τον μιγαδικό z. **Μονάδες 7**

Β3. Για τον μιγαδικό αριθμό w ισχύει ότι

$$2|w-i|^2 + 1 \leq (-w+i)(-\overline{w}-i) + 2\sqrt{(w-i)(\overline{w}+i)}$$

i) Να δείξετε ότι ότι οι εικόνες $M(w)$ ανήκουν σε κύκλο με κέντρο $\mathbf{K}(0,1)$ και ακτίνα $\rho = 1$. **Μονάδες 4**

ii) Να βρείτε $|z-w|_{min}$ **και** $|z-w|_{max}$ **Μονάδες 4**

Β4. Να δείξετε ότι $(z-w)(\overline{z}-\overline{w}) + (z-\overline{w})(\overline{z}-w) < 282$

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=e^{\ln\left(x+\frac{1}{x}\right)}+\frac{\ln x}{x}$

Γ$_1$.α.Να βρείτε το πεδίο ορισμού της. **Μονάδες 2**

β. Να δείξετε ότι $f(x)=x+\frac{1+\ln x}{x}$ **Μονάδες 2**

γ. Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα. **Μονάδες 6**

Γ$_2$.Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης $h(x)=x^2f'(x)$

Μονάδες 6

Γ$_3$.Να δείξετε ότι για κάθε πραγματικό αριθμό κ , η εξίσωση :

$$h(x)=\sqrt{\kappa^2+\kappa+1}+\ln\sqrt{2}$$

έχει μια τουλάχιστο λύση στο $(0,+\infty)$. **Μονάδες 4**

Γ$_4$. Να βρείτε το όριο :

$$\lim_{x\to\infty} x^3f'(x)\left(x\eta\mu\frac{1}{x}-\sigma\upsilon\nu\frac{1}{x}\right)$$ **Μονάδες 5**

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται ότι οι συναρτήσεις f,g είναι συνεχείς στο R και τέτοιες ώστε , για κάθε $x\in R$,να ισχύουν οι σχέσεις :

- $f(x)=\int_0^x \frac{t}{g(t)}dt+\ln 2$ και
- $g(x)=\int_0^x \frac{t}{f(t)}dt+\ln 2$

Δ_1. Να αποδείξετε ότι ισχύουν :

i. $|f(x)|+|g(x)| \neq 0$, για κάθε $x \in R$. **Μονάδες 3**

ii. $f^{2013}(x)\cdot g^{2013}(x) > 0$, για κάθε $x \in R$. **Μονάδες 2**

Δ_2. Να αποδείξετε ότι $f(x)=g(x)$, για κάθε $x \in R$.

Μονάδες 7

Δ_3. Να αποδείξετε ότι $f(x)=\sqrt{x^2+\ln^2 2}$, $x \in R$. **Μονάδες 4**

Δ_4. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I=\int_0^1 \frac{x+1}{g^2(x+1)}dx$

Μονάδες 4

Δ_5. Να υπολογίσετε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$h(x)=\int_1^x \frac{1}{f(t)}dt \quad (x \in R),$$

τους άξονες $x'x$, $y'y$ και την ευθεία $x=1$ **Μονάδες 5**

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζόμενους)

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, κατεύθυνση, εξεταζόμενο μάθημα). **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων, αμέσως μόλις σας παραδοθούν.
   Καμιά άλλη σημείωση δεν επιτρέπεται να γράψετε.
   Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα, τα οποία και θα καταστραφούν μετά το πέρας της εξέτασης.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας σε όλα** τα θέματα.
4. Κάθε λύση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες …………

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία σχολικό σελίδα 98

Α2. Θεωρία σχολικό σελίδα 235

Α3. Θεωρία σχολικό σελίδα 222

Α4. $\alpha \to \Lambda$, $\beta \to \Lambda$, $\gamma \to \Sigma$, $\delta \to \Sigma$, $\varepsilon \to \Lambda$

ΘΕΜΑ Β

Β1. Από την δοσμένη σχέση $z=(1+i)|z-1|-3-2i$ έχουμε :

$$z=|z-1|+|z-1|i-3-2i \Rightarrow z=\underbrace{(|z-1|-3)}_{\mathrm{Re}(z)}+\underbrace{(|z-1|-2)}_{\mathrm{Im}(z)}i \qquad (1)$$

,οπότε :

$$\mathrm{Re}(z)-\mathrm{Im}(z)=(|z-1|-3)-(|z-1|-2)=-1.$$

Δηλαδή $\mathrm{Re}(z)=\mathrm{Im}(z)-1$.

Β2. Από την σχέση (1),προσθέτοντας το -1 και στα 2 μέλη ,προκύπτει

$$z-1=|z-1|+|z-1|i-3-2i-1 \Rightarrow z-1=(|z-1|-4)+(|z-1|-2)i$$ και

παίρνοντας μέτρα είναι :

$$|z-1|=\sqrt{(|z-1|-4)^2+(|z-1|-2)^2} \overset{\square^2}{\Rightarrow} |z-1|^2=(|z-1|-4)^2+(|z-1|-2)^2$$

Οπότε $$|z-1|^2=|z-1|^2-8|z-1|+16+|z-1|^2-4|z-1|+4 \Rightarrow$$

$$|z-1|^2-12|z-1|+20=0 \qquad (2)$$

Για τον υπολογισμό του μιγαδικού z εργαζόμαστε στην σχέση (2) ,η οποία είναι εξίσωση $2^{ου}$ βαθμού ,με άγνωστο τον $|z-1|>0$
Είναι

$$\Delta=(-12)^2-4\cdot1\cdot20=64$$,οπότε :

$$|z-1|=\frac{12\pm8}{2}=\left|\begin{array}{l}(+)10\\(-)2\end{array}\right.$$,οπότε από την δοσμένη σχέση

$\boxed{z=(1+i)|z-1|-3-2i}$ έχουμε :

- Αν $|z-1|=10$, τότε $z=(1+i)\cdot10-3-2i\Rightarrow z=7+8i$
- Αν $|z-1|=2$, τότε $z=(1+i)\cdot2-3-2i\Rightarrow z=-1+0i=-1\in R$,αδύνατο αφού ο z είναι μη πραγματικός.

Κατά συνέπεια $\boxed{z=7+8i}$ (3)

B3. i) Είναι $2|w-i|^2+1\le(-w+i)(-\overline{w}-i)+2\sqrt{(w-i)(\overline{w}+i)}$

Παρατηρούμε ότι με πράξεις στις παρενθέσεις ,γίνεται χρήση του τύπου $z\overline{z}=|z|^2$,οπότε :

$$2|w-i|^2+1\le(-(w-i))\left(-\left(\overline{w-i}\right)\right)+2\sqrt{(w-i)\left(\overline{w-i}\right)}\Rightarrow$$

$$2|w-i|^2+1\le(w-i)\left(\overline{w-i}\right)+2\sqrt{(w-i)\left(\overline{w-i}\right)}\Rightarrow$$

$$2|w-i|^2+1\le|w-i|^2+2\sqrt{|w-i|^2}\Rightarrow$$

$$|w-i|^2-2|w-i|+1\le0\Rightarrow(|w-i|-1)^2\le0.$$

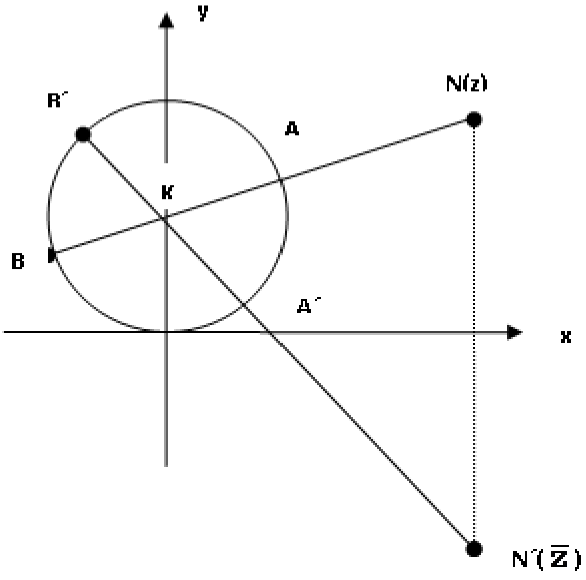
Όμως δεν μπορεί να ισχύει το $<$, δηλαδή $(|w-i|-1)^2<0$ και σαν συνέπεια από την παραπάνω σχέση προκύπτει ότι :

$$(|w-i|-1)^2=0\Rightarrow|w-i|-1=0\ \Rightarrow|w-i|=1$$,οπότε και :

$$\boxed{|w-(0+i)|=1}\quad(4).$$

Δηλαδή οι εικόνες $M(w)$ ανήκουν στον κύκλο με κέντρο $\mathbf{K}(0,1)$ και ακτίνα $\rho=1$.

ii) Έχουμε ότι $M(w)$ οι εικόνες του μιγαδικού w $N(z)=(7,8)$ η εικόνα του μιγαδικού z και $N'(\bar{z})=(7,-8)$ η εικόνα του συζυγούς του μιγαδικού z



Είναι

$$(NK)=\sqrt{(7-0)^2+(8-1)^2}=7\sqrt{2}$$

οπότε

• $|z-w|_{min}=(NM)_{min}=(NA)=(NK)-\rho=7\sqrt{2}-1$

• $|z-w|_{max}=(NM)_{max}=(NB)=(NK)+\rho=7\sqrt{2}+1 \qquad (5)$

B4. Είναι

$$(z-w)(\bar{z}-\bar{w})+(z-\bar{w})(\bar{z}-w)=(z-w)\left(\overline{z-w}\right)+(\bar{z}-w)\left(\overline{\bar{z}-w}\right)=$$
$$=|z-w|^2+|\bar{z}-w|^2 \qquad (6).$$

Όμως :

• $|z-w|\le|z-w|_{max}\Rightarrow|z-w|\le 7\sqrt{2}+1$ και από το σχήμα ,όμοια προκύπτει

• $(N'K)=\sqrt{(7-0)^2+(-8-1)^2}=\sqrt{130}$

• $|\bar{z}-w|_{max}=(N'M)_{max}=(N'B')=(N'K)+\rho=\sqrt{130}+1$,οπότε $|\bar{z}-w|\le|\bar{z}-w|_{max}\Rightarrow|\bar{z}-w|\le\sqrt{130}+1.$

Με βάση λοιπόν τα παραπάνω ,από την σχέση (6) προκύπτει :

$$|z-w|^2+|\bar{z}-w|^2\le\left(7\sqrt{2}+1\right)^2+\left(\sqrt{130}+1\right)^2=230+14\sqrt{2}+2\sqrt{130}<$$
$$<230+14\cdot 2+2\cdot 12=282$$,δηλαδή

$$(z-w)(\bar{z}-\bar{w})+(z-\bar{w})(\bar{z}-w)=|z-w|^2+|\bar{z}-w|^2<282$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1.

α. Για το πεδίο ορισμού της f πρέπει :

$$\begin{cases} x+\dfrac{1}{x}>0 \\ x>0 \\ x\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x>0$$ και κατά συνέπεια το πεδίο ορισμού της f είναι

$$A_f=(0,+\infty)$$

β. Για τον τύπο της συνάρτησης f ,έχουμε :

$$f(x)=e^{\ln\left(x+\frac{1}{x}\right)}+\frac{\ln x}{x}=x+\frac{1}{x}+\frac{\ln x}{x}=x+\frac{1+\ln x}{x} \quad (1)$$

γ. Για την μονοτονία και τα ακρότατα της f ,από την σχέση (1) παρατηρούμε ότι η f είναι φανερά παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$,με

$$f'(x)=\left(x+\frac{1+\ln x}{x}\right)'=x'+\frac{(1+\ln x)'x-(1+\ln x)x'}{x^2}=1-\frac{\frac{1}{x}x-(1+\ln x)}{x^2}\Rightarrow$$

$$\boxed{f'(x)=\frac{x^2-\ln x}{x^2}} \quad (2)$$

Από την σχέση (2) παρατηρούμε ότι για τα $x\in(0,+\infty)$,το πρόσημο της $f'(x)$εξαρτάται από το πρόσημο της συνάρτησης $g(x)=x^2-\ln x$ (3),για την οποία έχουμε ότι :

- $g'(x)=\left(x^2-\ln x\right)'=2x-\dfrac{1}{x}=\dfrac{2x^2-1}{x}$ με $x\in(0,+\infty)$.
- $g'(x)>0\Leftrightarrow\dfrac{2x^2-1}{x}>0\overset{(x>0)}{\Leftrightarrow}2x^2-1>0\Leftrightarrow|x|^2>\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow|x|>\dfrac{1}{\sqrt{2}}\overset{(x>0)}{\Leftrightarrow}x>\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

  από όπου και προκύπτει ο πίνακας προσήμων της $g'(x)$.

x	0		$1/\sqrt{2}$		$+\infty$
g'		$-$	0	$+$	
g		$\searrow$		$\nearrow$	
			τ.ε.		

- όμως η g είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$ και επειδή έχει ένα τοπικό ακρότατο ,θα είναι και ολικό.
  Κατά συνέπεια η συνάρτηση g ,έχει **ολικό ελάχιστο** το :

$$g\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2-\ln\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1}{2}-\ln\left(\sqrt{2}\right)^{-1}=\frac{1}{2}+\ln\sqrt{2}>0$$

Γιατί $\sqrt{2}>1 \overset{(y=\ln x\nearrow)}{\Rightarrow} \ln\sqrt{2}>\ln 1 \Rightarrow \ln\sqrt{2}>0$,οπότε και $g\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{1}{2}+\ln\sqrt{2}>0$

- Οπότε για κάθε $x\in(0,+\infty)$,είναι $g(x)\geq g\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)>0 \Rightarrow g(x)>0$,οπότε λόγω των $(2),(3)$ προκύπτει ότι $f'(x)>0$, $x\in(0,+\infty)$ και κατά συνέπεια η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$ και δεν έχει ακρότατα.

Γ2. Για την συνάρτηση h έχουμε :

$$h(x)=x^2f'(x)=x^2\cdot\frac{x^2-\ln x}{x^2}=x^2-\ln x=g(x)\ ,\ x\in(0,+\infty)\quad(3)$$

- Είδαμε στο προηγούμενο ερώτημα ότι η g έχει ολικό ελάχιστο ,οπότε λόγω (3) είναι :

$$h_{min}(x)=g_{min}(x)=g\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=h\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{1}{2}+\ln\sqrt{2}$$

- $\lim\limits_{x\to 0^+}h(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(x^2-\ln x\right)=0-(-\infty)=+\infty$
- $\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2-\ln x\right)\overset{\infty-\infty}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}x^2\left(1-\frac{\ln x}{x^2}\right)\quad(4)$

Όμως

$\lim\limits_{x\to+\infty}x^2=+\infty$ και

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^2}\ \underset{DLH}{\overset{\infty/\infty}{=}}\ \left(\begin{array}{l}\text{Οι συναρτήσεις}\\ y=\ln x\ ,\ y=x^2\ \text{είναι}\\ \text{συνεχείς και παραγωγίσιμες}\end{array}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)'}{(x^2)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{2x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2x^2}=0$$

οπότε από την (4) προκύπτει ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)=(+\infty)(1-0)=+\infty$

x	0	$1/\sqrt{2}$	$+\infty$
h΄(x)	-		+
h(x)	$+\infty$	ο.ε $\frac{1}{2}+\ln\sqrt{2}$	$+\infty$

Από την συνέχεια της h στο $(0,+\infty)$ και τα παραπάνω ,προκύπτει ότι το σύνολο τιμών της h είναι :

$$\Sigma T_h=h(A)=\left[\frac{1}{2}+\ln\sqrt{2}\ ,\ +\infty\right)\qquad(5)$$

Γ3. Η συνάρτηση h είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$,οπότε για να έχει η εξίσωση

$$h(x)=\sqrt{\kappa^2+\kappa+1}+\ln\sqrt{2}$$

μια τουλάχιστο λύση στο $(0,+\infty)$,για κάθε πραγματικό αριθμό κ ,
αρκεί ο αριθμός $\sqrt{\kappa^2+\kappa+1}+\ln\sqrt{2}$ (λόγω ΘΕΤ),να είναι τιμή της $h(x)$,δηλαδή να ανήκει στο σύνολο τιμών της.

Είναι $\sqrt{\kappa^2+\kappa+1}+\ln\sqrt{2}\in R$,αφού $\kappa^2+\kappa+1>0$
$(\Delta=1^2-4\cdot1\cdot1=-3<0)$

Οπότε λόγω της (5) αρκεί :

$$\sqrt{\kappa^2+\kappa+1}+\ln\sqrt{2}\geq\frac{1}{2}+\ln\sqrt{2}\Leftrightarrow\sqrt{\kappa^2+\kappa+1}\geq\frac{1}{2}\Leftrightarrow\kappa^2+\kappa+1\geq\frac{1}{4}\Leftrightarrow$$

$4\kappa^2+4\kappa+3\geq0$ που ισχύει για κάθε $\kappa\in R$,αφού
$\Delta=4^2-4\cdot4\cdot3=-32<0$.

Κατά συνέπεια εδείχθει το ζητούμενο.

Γ4. Για το ζητούμενο όριο έχουμε :

- $x^3 f'(x)\left(x\eta\mu\frac{1}{x}-\sigma\upsilon\nu\frac{1}{x}\right)=xf'(x)\left(x^3\eta\mu\frac{1}{x}-x^2\sigma\upsilon\nu\frac{1}{x}\right)$ (6),οπότε :

$$\lim_{x\to\infty} xf'(x)=\lim_{x\to\infty} x\frac{x^2-\ln x}{x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-\ln x}{x}\left(\begin{array}{l}\text{οι συναρτήσεις}\\ y=x^2-\ln x\ \ , y=x \text{ είναι}\\ \text{συνεχείς και παραγωγίσιμες}\end{array}\right)$$

και έχουμε απροσδιοριστία $\frac{\infty}{\infty}$,αφού από **Γ3** ερώτημα και σχέση (4), είναι $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x^2-\ln x\right)=+\infty$,οπότε από τον κανόνα De L Hospital παίρνουμε

- $\lim\limits_{x\to\infty} xf'(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2-\ln x}{x}\overset{\text{DLH}}{=}\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\left(x^2-\ln x\right)'}{x'}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x-\frac{1}{x}}{1}=+\infty$

- για το όριο $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x^3\eta\mu\frac{1}{x}-x^2\sigma\upsilon\nu\frac{1}{x}\right)$, θέτοντας

  $u=\frac{1}{x}$,είναι για $x\to+\infty\ \Rightarrow\ u\to 0^+$, τότε γράφεται

$$\lim_{u\to 0^+}\left(\frac{1}{u^3}\eta\mu u-\frac{1}{u^2}\sigma\upsilon\nu u\right)=\lim_{u\to 0^+}\frac{\eta\mu u-u\sigma\upsilon\nu u}{u^3}\overset{\text{DLH}}{=}\lim_{u\to 0^+}\frac{\left(\eta\mu u-u\sigma\upsilon\nu u\right)'}{\left(u^3\right)'}=$$

$$=\lim_{u\to 0^+}\frac{\sigma\upsilon\nu u-\sigma\upsilon\nu u+u\eta\mu u}{3u^2}=\lim_{u\to 0^+}\frac{u\eta\mu u}{3u^2}=\lim_{u\to 0^+}\frac{\eta\mu u}{3u}=\frac{1}{3}\lim_{u\to 0^+}\frac{\eta\mu u}{u}=\frac{1}{3}\cdot 1=\frac{1}{3}$$

Οπότε από την (6) και τα παραπάνω όρια προκύπτει ότι

$$x^3 f'(x)\left(x\eta\mu\frac{1}{x}-\sigma\upsilon\nu\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{3}(+\infty)=+\infty$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ_1. Θα αποδείξουμε ότι :

i. $\left|f(x)\right|+\left|g(x)\right|\neq 0$,για κάθε $x\in R$.

Έστω υπάρχει $x_0\in R$,τέτοιο ώστε

$$\left|f(x_0)\right|+\left|g(x_0)\right|=0\Rightarrow f(x_0)=g(x_0)=0$$

Τότε όμως τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων
$y=\dfrac{t}{f(t)}$ και $y=\dfrac{t}{g(t)}$ δεν θα περιέχουν τον αριθμό x_0,δηλαδή θα είναι της μορφής $R-\{x_0\}$.
Κατά συνέπεια οι συναρτήσεις

$f(x)=\displaystyle\int_0^x \frac{t}{g(t)}dt+\ln 2$ και $g(x)=\displaystyle\int_0^x \frac{t}{f(t)}dt+\ln 2$ θα ορίζονται σε σύνολο της μορφής $R-\{x_0\}$.

ΑΤΟΠΟ , αφού λόγω υπόθεσης είναι $A_f=A_g=R$

Άρα $f(x),g(x)\neq 0$ (1) και κατά συνέπεια $\left|f(x)\right|+\left|g(x)\right|\neq 0$, για κάθε $x\in R$.

ii. Οι συναρτήσεις f,g είναι συνεχείς στο R και λόγω (1) μη μηδενιζόμενες.Κατά συνέπεια διατηρούν σταθερό πρόσημο.
Όμως

$$f(0)=\int_0^0 \frac{t}{g(t)}dt+\ln 2=\ln 2>0 \quad (2) \text{ (το δείξαμε στο θέμα Γ)}$$

και όμοια $g(0)=\ln 2>0$.Κατά συνέπεια είναι $f(x),g(x)>0$ για κάθε $x\in R$,οπότε και $f^{2013}(x)\cdot g^{2013}(x)>0$, για κάθε $x\in R$.

Δ_2. Από το Δ_1/i ερώτημα έχουμε ότι οι συναρτήσεις f,g είναι συνεχείς και μη μηδενιζόμενες ,οπότε οι συναρτήσεις $y=\dfrac{t}{f(t)}$ και $y=\dfrac{t}{g(t)}$ είναι φανερά συνεχείς στο R και κατά συνέπεια οι συναρτήσεις

$f(x)=\displaystyle\int_0^x \frac{t}{g(t)}dt+\ln 2$ και $g(x)=\displaystyle\int_0^x \frac{t}{f(t)}dt+\ln 2$ σαν παράγουσες είναι συνεχείς και παραγωγίσιμες στο R.Έχουμε :

- $f'(x)=\left(\int_0^x \frac{t}{g(t)}dt+\ln 2\right)'=\frac{x}{g(x)}$ και
- $g'(x)=\left(\int_0^x \frac{t}{f(t)}dt+\ln 2\right)'=\frac{x}{f(x)}$

Διαιρώντας τις δύο σχέσεις με $f(x), g(x)\neq 0$ αντίστοιχα , παίρνουμε

$\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{x}{g(x)f(x)}$ και $\frac{g'(x)}{g(x)}=\frac{x}{g(x)f(x)}$ $(x\in R)$, όπου

΄΄εξισώνοντας΄΄ τα δεύτερα μέλη προκύπτει :

$\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{g'(x)}{g(x)}$ $(x\in R)$ $\Rightarrow(\ln f(x))'=(\ln g(x))'\Rightarrow$

$\ln f(x)=\ln g(x)+c$ (3) , $(x\in R)$ και $c\in R$.Όμως

> Για $x=0$,από την σχέση (3) προκύπτει $\ln f(0)=\ln g(0)+c$

> Όμως από σχέση (2) είναι $f(0)=g(0)=\ln 2$,οπότε από την παραπάνω σχέση παίρνουμε $c=0$ και από την (3) προκύπτει

$\ln f(x)=\ln g(x)\Rightarrow f(x)=g(x)$

Η ισότητα αυτή ,ικανοποιεί τις δοσμένες συνθήκες και κατά συνέπεια έχουμε

$$f(x)=g(x) \quad (4)\text{ , για κάθε } x\in R .$$

Δ_3. Από το Δ_2 ερώτημα έχουμε :

$f'(x)=\frac{x}{g(x)}\overset{(4)}{=}\frac{x}{f(x)}$, $x\in R$ οπότε : $f'(x)f(x)=x\Rightarrow$

$$2f'(x)f(x)=2x\Rightarrow\left(f^2(x)\right)'=\left(x^2\right)'\Rightarrow f^2(x)=x^2+c \quad (5)$$

- Για $x=0$ παίρνουμε $f^2(0)=0^2+c$.
- Από (2)όμως έχουμε $f(0)=\ln 2$,οπότε προκύπτει $c=\ln^2 2$ και

$f^2(x)=x^2+\ln^2 2 \overset{f(x)>0}{\Rightarrow} f(x)=\sqrt{x^2+\ln^2 2}$, για κάθε $x\in R$.

Δ_4. Είναι

$$I=\int_0^1 \frac{x+1}{g^2(x+1)}dx=\int_0^1 \frac{x+1}{f^2(x+1)}dx=\int_0^1 \frac{x+1}{(x+1)^2+\ln^2 2}dx=\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2x+2}{x^2+2x+1+\ln^2 2}dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\left(x^2+2x+1+\ln^2 2\right)'}{x^2+2x+1+\ln^2 2}dx=\frac{1}{2}\Big[\ln\left|x^2+2x+1+\ln^2 2\right|\Big]_0^1=$$

$$=\frac{1}{2}\Big[\ln\left(4+\ln^2 2\right)-\ln\left(2+\ln^2 2\right)\Big]=\frac{1}{2}\ln\frac{4+\ln^2 2}{2+\ln^2 2}=\ln\sqrt{\frac{4+\ln^2 2}{2+\ln^2 2}}$$

σχόλιο

Το παραπάνω ολοκλήρωνα υπολογίζεται και με αντικατάσταση

$$u=x^2+2x+1+\ln^2 2$$

Δ_5.Η συνάρτηση $y=\dfrac{1}{f(t)}$,είναι συνεχής στο R (αφού $f(t)>0 \Rightarrow f(t)\neq 0$).

Κατά συνέπεια η συνάρτηση $h(x)=\displaystyle\int_1^x \frac{1}{f(t)}dt$ είναι παράγουσα της $y=\dfrac{1}{f(x)}$ στο R.

Δηλαδή η h είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο R και ισχύει :

$$h'(x)=\left(\int_1^x \frac{1}{f(t)}dt\right)'=\frac{1}{f(x)}=\frac{1}{\sqrt{x^2+\ln^2 2}}>0$$, για κάθε $x\in R$ (6). Κατά

συνέπεια η συνάρτηση h είναι γνησίως αύξουσα στο R ,με $h(1)=\displaystyle\int_1^1 \frac{1}{f(t)}dt=0$.

Όμως για $x<1 \overset{h}{\Rightarrow} h(x)<h(1) \Rightarrow h(x)<0$ (7).

Για το ζητούμενο εμβαδό έχουμε :

$$E=\int_0^1 |h(x)|dx \overset{(7)}{=} \int_0^1 (-h(x))dx=\int_0^1 (-x)'h(x)dx \overset{(\Pi O)}{=} \Big[-xh(x)\Big]_0^1-\int_0^1 (-x)h'(x)dx \Rightarrow$$

$$E = \left[-xh(x)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{-x}{\sqrt{x^2+\ln^2 2}}dx = \left[-xh(x)\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{2x}{2\sqrt{x^2+\ln^2 2}}dx =$$

$$= \left[-xh(x)\right]_0^1 + \int_0^1 \left(\sqrt{x^2+\ln^2 2}\right)' dx = \left[-xh(x)\right]_0^1 + \left[\sqrt{x^2+\ln^2 2}\right]_0^1 =$$

$$= \left(-1\underbrace{h(1)}_{0} + 0\underbrace{h(0)}_{0}\right) + \left(\sqrt{1^2+\ln^2 2} - \sqrt{0^2+\ln^2 2}\right) = \sqrt{1+\ln^2 2} - \ln 2 \quad \text{τ.μ.}$$

<u>σχόλια</u>

- Έχουμε δείξει στο Γ Θέμα ότι $\ln 2 > 0$,οπότε
$\sqrt{0^2+\ln^2 2} = \sqrt{\ln^2 2} = |\ln 2| = \ln 2$
- Η τιμή του εμβαδού που προέκυψε είναι θετική ,αφού :
$E = \sqrt{1+\ln^2 2} - \ln 2 > 0 \Leftrightarrow \sqrt{1+\ln^2 2} > \ln 2 \Leftrightarrow 1+\ln^2 2 > \ln^2 2 \Leftrightarrow 1 > 0$
που ισχύει φανερά .