



2^ο ΘΕΜΑ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΘΕΤΙΚΗΣ – ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

A1. Πότε μια συνάρτηση f λέγεται παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα $[α,β]$ του πεδίου ορισμού της;

(Μονάδες 5)

A2. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα $Δ$. Αν η f είναι συνεχής στο $Δ$ και $f'(x) = 0$ να αποδείξετε ότι για κάθε εσωτερικό σημείο του $Δ$, τότε η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα $Δ$.

(Μονάδες 10)

A3. Να χαρακτηρίσετε χωρίς αιτιολόγηση τις ακόλουθες προτάσεις σαν Σωστές (Σ) ή Λανθασμένες (Λ).

1. Κάθε συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα $Δ$ έχει παράγουσα στο διάστημα αυτό.

2. Αν f συνάρτηση συνεχής στο διάστημα $[α,β]$ και για κάθε $x \in [α,β]$ ισχύει $f(x) \geq 0$ τότε

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \geq 0.$$

3. Η εικόνα $f(Δ)$ ενός διαστήματος $Δ$ μέσω μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης f είναι διάστημα.

4. Αν η f έχει αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} και η C_f έχει κοινό σημείο A με την ευθεία $y = x$ τότε το σημείο A ανήκει και στην $C_{f^{-1}}$.

5. Αν η συνάρτηση f είναι ορισμένη στο \mathbb{R} και ισχύει $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ τότε η f διατηρεί σταθερό πρόσημο.

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται στο σύνολο \mathbb{C} η εξίσωση $z + \frac{\alpha}{z} = \beta$ (1) με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ και ρίζες z_1, z_2 .

B1. Αν ισχύει $\beta^2 < 3\alpha$ να δείξετε ότι $(z_1 + z_2)^y + (z_1 - z_2)^{2y} \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 5)

B2. Αν $z_1 = 2 + i$, να βρεθούν οι $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 5)

B3. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του μιγαδικού w αν ισχύει

$$|w - z_1 + i| = |w - z_2 + 2 + i|.$$

(Μονάδες 6)

B4. Αν w_1 μιγαδικός του οποίου η εικόνα ανήκει στον γεωμετρικό τόπο του ερωτήματος (γ) με

$|w_1| = 1$, να βρεθεί ο θετικός πραγματικός ρ ώστε μεταξύ των ριζών της εξίσωσης

$$u - w_1 = \left(\frac{\overline{\rho^2}}{u - w_1} \right), \quad u \in \mathbb{C} \text{ να υπάρχει μόνο μια πραγματική και μόνο μια φανταστική ρίζα.}$$

(Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = 2^{x^2} - x - 1$, $x \in \mathbb{R}$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι η f έχει ακριβώς δύο ρίζες στο \mathbb{R} .

(Μονάδες 7)

Γ2. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικός $\xi \in (0, 1)$ ώστε η f να είναι γνησίως φθίνουσα στο

$(-\infty, \xi]$ και γνησίως αύξουσα στο $[\xi, +\infty)$.

(Μονάδες 6)

Γ3. Να λύσετε την ανίσωση $f(x) \geq 0$.

(Μονάδες 6)

Γ4. Να αποδείξετε ότι $\int_0^1 f(x) dx < 0$.

(Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση F με τύπο $F(x) = \int_0^x \frac{e^{t^2} + t}{t^2 + 1} dt$ ορισμένη στο διάστημα $[0, 1]$.

Δ1. Να δείξετε ότι η F είναι παραγωγίσιμη και να βρεθεί η παράγωγός της.

(Μονάδες 5)

Δ2. Να δείξετε ότι ισχύει $F(x) \geq x$ για κάθε $x \in [0,1]$.

(Μονάδες 7)

Δ3. Να δείξετε ότι ισχύει $x^2 \leq F(x^2) \leq \frac{x^2 e^{x^2} + x^3}{x^2 + 1}$ για κάθε $x \in [0,1]$.

(Μονάδες 8)

Δ4. Να βρεθεί το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{F^2(x) \left(\int_1^{x+1} \eta \mu(t-1)^2 dt \right)^3}{x^{11}}$.

(Μονάδες 5)

ΟΡΟΣΗΤΗΜΟ