3^{o} ΘΕΜΑ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΘΕΤΙΚΗΣ / ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να διατυπώσετε το θεώρημα ενδιαμέσων τιμών.

Μονάδες 5

Α2. Έστω μία συνάρτηση f παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (a,β) με εξαίρεση ίσως ένα σημείο x_0 στο οποίο όμως είναι συνεχής. Να δείξετε ότι αν η f' διατηρεί πρόσημο στο $(a,x_0)\cup(x_0,\beta)$ τότε το $f(x_0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο και η f είναι γνησίως μονότονη στο (a,β) .

Μονάδες 10

Α3. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως σωστές (Σ) ή λάθος (Λ)

i. Αν z_1,z_2 είναι μιγαδικοί αριθμοί τότε ισχύει $\left||z_1|-|z_2|\right|\le|z_1+z_2|$

ii. Μία συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα $[a,\beta]$.Αν $f(x)\ge 0$ για κάθε $x\in[a,\beta]$ και η συνάρτηση δεν είναι παντού μηδέν στο διάστημα αυτό τότε $\int_a^\beta f(x)dx>0$.

iii. Η εικόνα $f(\Delta)$ ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς συνάρτησης είναι διάστημα.

iv. Αν $\int_a^\beta f(x)dx\ge 0$ τότε κατ' ανάγκη θα είναι $f(x)\ge 0$ για $x\in[a,\beta]$

v. Έστω f μία συνάρτηση ορισμένη σε ένα σύνολο $(\alpha,x_0)\cup(x_0,\beta)$ και ℓ ένας πραγματικός αριθμός τότε ισχύει : $\lim_{x\to x_0} f(x)=l \Leftrightarrow \lim_{h\to 0} f(x_0+h)=l$

Μονάδες 2x5

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι μιγαδικοί z_1, z_2, w με $z_1 \cdot z_2 \neq 0$ για τους οποίους ισχύει $w=\frac{z_1+z_2}{z_1-z_2}$ και $e^{|w|x} \geq x+1$. Να δείξετε ότι:

Β1. $|w|=1$

Μονάδες 4

Β2. $Re(z_1\overline{z_2})=0$.

Μονάδες 5

Β3. Ο αριθμός $u=\frac{z_1}{z_2}$ είναι φανταστικός.

Μονάδες 5

Β4. Το τρίγωνο με κορυφές τις εικόνες των μιγαδικών z_1, z_2 και την αρχή των αξόνων Ο(0,0) είναι ορθογώνιο στο Ο.

Μονάδες 5

Β5. Αν επιπλέον f μια παραγωγίσιμη στο [1, 2] συνάρτηση και οι μιγαδικοί z_1, z_2 είναι οι $z_1=1+if(1)$, $z_2=f(2)-2i$.

Να δείξετε ότι η εξίσωση $f'(x)=\frac{f(x)}{x}$ έχει μια τουλάχιστον λύση στο (1,2).

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Γ

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\lambda x^3+\mu x$ και $g(x)=x^2-x-1$, όπου $x\in R$ και $\lambda, \mu \in R$ και η ευθεία (ε) με εξίσωση $y=10x-16$ η οποία εφάπτεται της C_f στο σημείο $A(2, f(2))$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι $\lambda=1$ και $\mu=-2$.

Μονάδες 6

Γ2. Να αποδείξετε ότι οι C_f και C_g έχουν μοναδική κοινή εφαπτομένη σε κοινό τους σημείο, της οποίας να βρείτε την εξίσωση.

Μονάδες 6

Γ3. Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης φ με τύπο:

$$\varphi(x)=\begin{cases} f(x), & x\leq 1 \\ g(x), & x>1 \end{cases}$$

Μονάδες 6

Γ4. Ένα κινητό κινείται πάνω στη γραφική παράσταση της συνάρτησης h με τύπο $h(x)=\frac{1}{2}f(x)+x,\quad x>0$. Αν η εφαπτομένη της C_h στο τυχαίο σημείο της $\mathrm{B}(a,h(a))$, $a>0$ τέμνει τον άξονα x΄x στο σημείο Μ και η τετμημένη του σημείου Β κινείται με ρυθμό $a'(t)=2a(t)$ για κάθε χρονική στιγμή t, να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της τετμημένης του σημείου Μ τη χρονική στιγμή που το κινητό βρίσκεται στο σημείο με τεταγμένη 4.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f:[1,+\infty)\to \mathbb{R}$ συνεχής με $\frac{f(x)}{x}>2\int_{\frac{1}{x}}^{1}f(xt)dt$ για κάθε $x>1$ και η $F(x)=\int_{2}^{x}f(t)dt,\ x\geq 1$ για την οποία ισχύει: $\lim\limits_{x\to 1^{+}}\frac{\ln^2 x-(x-1)^2F(x)}{\sqrt{x^2-2x+10}-3}=18$ και οι μιγαδικοί $z,\,w$ για τους οποίους ισχύουν: $|z|\leq 1$ και $|\overline{w}+3i|=2$.

Δ1. Να δείξετε ότι $f(x)\geq 0$, για κάθε $x\geq 1$.

Μονάδες 7

Δ2. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου μεταξύ των $C_f,\ x'x,\ x=1$ και $x=2$.

Μονάδες 5

Δ3. Να δείξετε ότι η C_f τέμνει την ευθεία $y=2x-1$ σ' ένα τουλάχιστον σημείο με τετμημένη $x_0\in(1,2)$.

Μονάδες 4

Δ4. Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικός μιγαδικός u_0 ώστε $z=w$ και στη συνέχεια να δείξετε ότι η εξίσωση $g(x)=0$ έχει μοναδική λύση στο $(1,2)$ όπου g η συνάρτηση: $g(x)=\int_{1+\mathrm{Re}(u_0)}^{x}f(t)dt+\int_{2\mathrm{Im}(u_0)}^{x}f(t)dt$.

Μονάδες 4

Δ5. Αν $\int_1^2\left(\int_1^2 txf(x)dx\right)dt=9$ να υπολογίσετε το $\int_1^2 g(x)dx$.

Μονάδες 5

Επιμέλεια: Βιδάλης Ιωάννης, Ορφανού Ειρήνη

Τμήμα Μαθηματικών

Ορόσημο Αγίας Παρασκευής – Χολαργού – Παπάγου