Γ΄ ΤΑΞΗ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΙ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β΄)
ΚΥΡΙΑΚΗ 27/04/2014- ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΡΕΙΣ (3)

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ

ΘΕΜΑ Α:

Α1. Έστω μία συνάρτηση f παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (α, β) με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0, στο οποίο όμως η f είναι συνεχής. Άν $f'(x)>0$ στο (α, x_0) και $f'(x)<0$ στο (x_0, β) τότε να αποδείξετε ότι το $f(x_0)$ είναι τοπικό μέγιστο της f. **Μονάδες 7**

Α2. Πότε μια συνάρτηση f, με πεδίο ορισμού Α, λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ τοπικό μέγιστο; **Μονάδες 4**

Α3. Να διατυπώσετε το κριτήριο παρεμβολής **Μονάδες 4**

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή ή **Λάθος** αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Έστω f μια συνεχής συνάρτηση στο $[\alpha, \beta]$. Αν G είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha, \beta]$, τότε: $\int_\alpha^\beta f(t)dt = G(\beta) - G(\alpha)$.

β. Ισχύει για τους μιγαδικούς $z_1, z_2 \in C$ η σχέση: $\left||z_1|+|z_2|\right| \le |z_1+z_2| \le |z_1|-|z_2|$

γ. Μια συνάρτηση f είναι 1-1 αν και μόνο αν για κάθε y του συνόλου τιμών της η εξίσωση $f(x)=y$ έχει μία το πολύ λύση ως προς x.

δ. Αν το $A(x_0, f(x_0))$ είναι σημείο καμπής του διαγράμματος της f και η f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη τότε $f''(x_0)=0$.

ε. Η ευθεία $y=\lambda x+\beta$ είναι ασύμπτωτη του διαγράμματος της f στο $-\infty$, αν ισχύει $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-\lambda x-\beta)=+\infty$. **Μονάδες 10**

ΘΕΜΑ Β:

Δίνονται μιγαδικοί αριθμοί z_0 , z , w και είναι γνωστό ότι ισχύουν οι σχέσεις:

- $\left(\dfrac{2+3i}{3-2i}\right)^2 - \dfrac{6}{\overline{z_0}} = 2-3i$
- $\left|z + \dfrac{z_0^{14}}{128}\cdot z - 2\right| = \sqrt{10}$ και
- $\dfrac{w+1}{w-2i} \in \mathbb{R}, \quad w \ne 2i$

Β1. Να αποδείξετε ότι $z_0 = -1+i$ και ότι $\dfrac{z_0^{14}}{128} = i$ **Μονάδες 6**

Β2. Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος της εικόνας του z είναι κύκλος με κέντρο Κ(1,-1) και ακτίνα $\rho = \sqrt{5}$ **Μονάδες 6**

Β3. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο της εικόνας του w. **Μονάδες 6**

Β4. Άν ο μιγαδικός w_0 κινείται στον γεωμετρικό τόπο του ερωτήματος Β3 με $\mathrm{Re}(w_0) = -3$ και ο μιγαδικός z κινείται στον γεωμετρικό τόπο του ερωτήματος Β2 αντίστοιχα , να αποδείξετε ότι: $5-\sqrt{5} \leq |z-w_0| \leq 5+\sqrt{5}$ **Μονάδες 7**

ΘΕΜΑ Γ

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:[0,\pi] \to \mathbb{R}$, για τη οποία ισχύουν:

$f'(x) = f(x) + e^x \cdot \sigma\upsilon\nu x$ και $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = e^{\frac{\pi}{2}}$.

Θεωρούμε επίσης τη συνάρτηση $g(x) = x \cdot \sigma\upsilon\nu x$, $x \in [0,\pi]$

Γ1. Να αποδείξετε ότι $f(x) = e^x \cdot \eta\mu x$ για $x \in [0,\pi]$. **Μονάδες 4**

Γ2. i) Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και να βρείτε, αν υπάρχουν, τα σημεία καμπής της γραφικής παράστασης. **Μονάδες 3**

ii) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα. **Μονάδες 5**

Γ3. i) Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, g έχουν στο κοινό τους σημείο με τετμημένη $x_0 = 0$, κοινή εφαπτομένη την οποία και να βρείτε

Μονάδες 2

ii) Να αποδείξετε ότι: $f(x) \geq g(x)$, $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ **Μονάδες 4**

Γ4. i) Να αποδείξετε ότι ορίζεται η f^{-1} για $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ και να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

Μονάδες 2

ii) Αν γνωρίζετε ότι η f^{-1} είναι παραγωγίσιμη στο $\left[0, e^{\frac{\pi}{2}}\right]$, να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in \left(0, e^{\frac{\pi}{2}}\right)$ τέτοιο ώστε $(f^{-1})'(\xi) < \frac{\pi}{3} \cdot e^{-\frac{\pi}{3}}$. **Μονάδες 5**

ΘΕΜΑ Δ:

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$\int_1^x \left[f(t)\ln\left(\frac{x}{t}\right)\right]dt-\int_0^x \frac{f(x-t)}{e^t}dt=-e^{-x}\int_0^x f(t)e^t dt+\frac{x^4}{8}-\frac{x^3}{3},\quad x>0$$

και η $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη για την οποία ισχύει:

$$2\int_\alpha^x \left(e^{g(\alpha)-g(\beta)}\cdot g'(\beta)\right)t dt=\int_\alpha^x 2g'(\alpha)\cdot t\, dt,\quad 0<\alpha<\beta\quad ,x\neq 0$$

Δ1. Να αποδείξετε ότι $f(x)=2x^3-3x^2,\quad$ στο $\quad(0,+\infty)$ **Μονάδες 7**

Δ2. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0\in(\alpha,\beta)$ έτσι ώστε $\left[g'(x_0)\right]^2=g''(x_0)$ **Μονάδες 4**

Δ3. Δεδομένου ότι η g είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$

α) Να βρείτε για τις διάφορες τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$ το πλήθος των ριζών της εξίσωσης

$\int_\lambda^{f(x)} g'(t)e^{g(t)}dt=0$ για $x\in(0,+\infty)$. **Μονάδες 8**

β) Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(\ln\alpha,\ln\beta)$, έτσι ώστε :

$(\beta-\alpha)g(\xi)=\alpha\beta\int_{\ln\alpha}^{\ln\beta} g(t)e^{-t}dt$ **Μονάδες 6**

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)

1. Στο εξώφυλλο του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. Στο εσώφυλλο πάνω-πάνω να συμπληρώσετε τα ατομικά στοιχεία μαθητή. Στην αρχή των απαντήσεών σας να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. Να μην αντιγράψετε τα θέματα στο τετράδιο και **να μην γράψετε** πουθενά στις απαντήσεις σας το όνομά σας.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει. Μολύβι επιτρέπεται, **μόνο** αν το ζητάει η εκφώνηση, και ΜΟΝΟ για πίνακες, διαγράμματα κλπ..
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 10:30

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ
ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ