Μιγαδικοί αριθμοί

1 Η έννοια του μιγαδικού αριθμού

(α΄) $i^2 = -1$

1.1 Να γράψετε στη μορφή $\alpha + \beta i$, με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ τους μιγαδικούς αριθμούς:
α) $i(1-2i)+2(i-1)$ β) $(i^2-2i+3)(i^2+i-1)$
γ) $(i^2+i)(1+2i)$ δ) $(i^2-i)(1-i)(2+i^2)(2-i^2)$
ε) $i(2-i)+2i(1-i)-3i(i^2-2)$ ζ) $(i-1)(3i^2+2i+5)$
η) $(3i^2-7i+5)(4i^2-2i+7)+(1-i^2)(2+3i-5i^2)$
θ) $ix(i-x-2)-i(2x-3)+i(x^2-3)$, με $x \in \mathbb{R}$

1.2 Να γράψετε στη μορφή $\alpha + \beta i$, με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ τους μιγαδικούς αριθμούς:
α) $\dfrac{5}{1-2i}$ β) $i-\dfrac{1}{i}$ γ) $\dfrac{1+2i}{2-i}$ δ) $\dfrac{3-7i}{1+i}+\dfrac{7-3i}{1-i}$
ε) $\dfrac{3+i}{2i}$ ζ) $\dfrac{1+i\sqrt{2}}{\sqrt{2}-i}$ η) $\dfrac{3i^2+i}{2i-1}$ θ) $\dfrac{\sigma\upsilon\nu\theta - i\eta\mu\theta}{\sigma\upsilon\nu\theta + i\eta\mu\theta}$
ι) $\dfrac{1-i\sqrt{3}}{\sqrt{3}+i}$ κ) $\dfrac{(2+3i)(1-i)}{1-2i}$ λ) $\dfrac{1-2i}{3+i}\cdot\dfrac{1+2i}{1+3i}$
μ) $\dfrac{(2-5i)(1+i)-(-2+3i)}{3+4i}$ ν) $\dfrac{1+2i}{2-i}+\dfrac{2}{i}$

1.3 Να γράψετε στη μορφή $\alpha + \beta i$, με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ τους μιγαδικούς αριθμούς:
α) $(i-3)^2+(2+i)^2$ β) $(3+4i)^2+(4-3i)^2+i^2$
γ) $(1-\sqrt{2}i)^2$ δ) $(3+4i)^2(1-i)+(3-4i)^2(1+i)$
ε) $(1-i)(1-2i)(1+i)(1+2i)+i^2$ ζ) $(1-2i)^3$
η) $(1+i)^3-(1-i)^3$ θ) $(2+3i)^3+(2-3i)^3$
ι) $(2-i)^5(2+i)^6$

1.4 Να βρείτε το πραγματικό και το φανταστικό μέρος των μιγαδικών:
α) $(i-1)i^{-1}-2(1-i)^{-2}$ β) $(1-2i)^{-2}+(1+2i)^{-2}$
γ) $(6-4i)(1-i)^{-1}+(17+19i)(1-5i)^{-1}$

1.5 Να γράψετε στη μορφή $\alpha + \beta i$, με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ τους μιγαδικούς αριθμούς:
α) $\dfrac{(2+i)^2}{3+i}$ β) $\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^2$ γ) $\left(\dfrac{1-5i}{3-2i}\right)^2+\left(\dfrac{4-2i}{1-3i}\right)^2$
δ) $\dfrac{(1-i)^3+(1+i)^3}{(1-i)^3-(1+i)^3}$ ε) $\left(\dfrac{i-3}{2}\right)^3-\left(\dfrac{i+3}{2}\right)^3$
ζ) $\left(\dfrac{3+3i}{i-1}\right)^2$ η) $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}i\right)^4-\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}i\right)^{-4}$

1.6 Αν $x \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι:

$$(x-1-i)(x-1+i)(x+1+i)(x+1-i) = x^4+4$$

1.7 Αν $z = 3+4i$ και $w = 2-3i$, να γράψετε στη μορφή $\alpha + \beta i$, με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, τους μιγαδικούς αριθμούς:

$$z+w, zw, \frac{26}{w} \text{ και } \frac{25w}{z}$$

1.8 Αν $z = 2-3i$, να γράψετε στη μορφή $\alpha + \beta i$, με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, τον μιγαδικό αριθμό $w = \dfrac{z+2i}{z-2i}$

1.9 Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί:

$$z = \frac{(1-i)^2}{1+i} \text{ και } w = \frac{z^2+1}{z}$$

Να βρείτε το πραγματικό και το φανταστικό μέρος του μιγαδικού w

1.10 Θεωρούμε τον μιγαδικό $z = \dfrac{1}{1-i}+\dfrac{1}{1+i}+\dfrac{i}{2}$. Να αποδείξετε ότι $4z^2-8z+5=0$

1.11 Δίνεται ο μιγαδικός $z = 9+xi$, με $x > 0$. Να βρείτε την τιμή του x ώστε τα φανταστικά μέρη των z^2 και z^3 να είναι ίσα

1.12 Έστω $a, b, c \in \mathbb{C}^*$ ώστε να είναι:

$$\frac{a}{7+4i} = \frac{b}{1+2i} = \frac{c}{1+3i}$$

Να αποδείξετε ότι $\dfrac{a}{a-6b+2c} = 1+2i$

1.13 Να αποδείξετε ότι:
α) $\dfrac{1+i^{-1}}{1-i}+\dfrac{1-i^{-1}}{1+i}+\dfrac{1+i}{1-i^{-1}}+\dfrac{1-i}{1+i^{-1}} = 4$
β) $\dfrac{1}{i}\left(\dfrac{1}{i}-1\right)-\left(\dfrac{1}{i}-i\right)\left(\dfrac{1}{i}+1\right) = 1+3i$
γ) $\dfrac{(1+i)^n}{(1-i)^{n-2}} = 2i^{n-1}$, με $n \in \mathbb{N}$
δ) $(1+i)^{4n} = (1-i)^{4n}$, με $n \in \mathbb{N}$

1.14 Αν $z \in \mathbb{C}^*$, τότε είναι: $Re(z) > 0 \Leftrightarrow Re\left(\dfrac{1}{z}\right) > 0$

1.15 Έστω $\alpha, \beta > 0$ και $n \in \mathbb{N}^*$ ώστε $(\alpha+\beta i)^n = (\alpha-\beta i)^n$
α) Να αποδείξετε ότι $n \geq 3$
β) Για $n = 3$, να αποδείξετε ότι $\dfrac{\alpha}{\beta} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

1.16 Δίνεται ο μιγαδικός αριθμός:

$$z = \frac{1}{1+\sigma\upsilon\nu\theta+i\eta\mu\theta}, \text{ όπου } \theta \neq 2\kappa\pi+\pi,\ \kappa \in \mathbb{Z}$$

Να αποδείξετε ότι $(Re(z))^2+(Im(z))^2 = \dfrac{1}{2(1+\sigma\upsilon\nu\theta)}$

1.17 Έστω $z = \dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ και $w = -\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$. Να υπολογίσετε την παράσταση:

$$A = \frac{1}{z^3} + \frac{1}{w^3} + \frac{3}{z^2 w} + \frac{3}{z w^2}$$

1.18 Θεωρούμε τους μιγαδικούς $z_1 = 1 + i$ και $z_2 = 1 - i$ και την παράσταση

$$E(z) = \frac{z^2 + z + 1}{z^3 + z^2 + 1}$$

Να υπολογίσετε τις τιμές $E(z_1)$ και $E(z_2)$

1.19 Αν $\alpha \in (-1, 1)$, βρείτε το πραγματικό και το φανταστικό μέρος των μιγαδικών:

α) $z = \dfrac{\sqrt{1+\alpha} + i\sqrt{1-\alpha}}{\sqrt{1+\alpha} - i\sqrt{1-\alpha}} - \dfrac{\sqrt{1-\alpha} + i\sqrt{1+\alpha}}{\sqrt{1-\alpha} - i\sqrt{1+\alpha}}$

β) $w = \dfrac{\sqrt{1-\alpha} - i\sqrt{1+\alpha}}{\sqrt{1-\alpha} + i\sqrt{1+\alpha}} - \dfrac{\sqrt{1+\alpha} - i\sqrt{1-\alpha}}{\sqrt{1+\alpha} + i\sqrt{1-\alpha}}$

1.20 Έστω οι μιγαδικοί $z = -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ και $w = \dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Να αποδείξετε ότι:
α) $1 + z + z^2 = 0$ και $z^3 = 1$
β) $1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 + z^6 = 1$
γ) $w^{2n} = z^n$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$
δ) $w^{300} = 1$ και $w^{333} = -1$
ε) $z^{2016} + \dfrac{1}{z^{2016}} = z^{2013} + \dfrac{1}{z^{2013}} = 2$

1.21 Έστω ο μιγαδικός $z = \dfrac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$ και θεωρούμε την παράσταση:

$$E = (\alpha + \beta z + \gamma z^2)(\alpha + \beta z^2 + \gamma z), \text{ με } \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$$

α) Να αποδείξετε ότι $z^3 = 1$
β) Να υπολογίσετε την παράσταση E

1.22 Να βρείτε τους θετικούς ακέραιους a, b, c για τους οποίους ισχύει η σχέση $c = (a + bi)^3 - 107i$

(β′) **ισότητα μιγαδικών**

1.23 Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί $z = (2x + y + 5) + 2i$ και $w = (4x - 2y + 4) + (3x - 4y)i$. Αν $z = w$, να υπολογίσετε τους πραγματικούς αριθμούς x, y

1.24 Δίνεται ο μιγαδικός:

$$z = 6i - (3 - 4i)x - 3yi - (3i - 2)x + (4 - 2yi)$$

Να βρείτε τις τιμές των $x, y \in \mathbb{R}$, για τις οποίες είναι $z = 0$

1.25 Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς x, y για τους οποίους ισχύουν οι σχέσεις:
α) $x - 2 + (y - 3)i = (1 + 3i)(y + i)$
β) $(x + y) + (x^2 - y^2)i = 5 + 5i$
γ) $x(1 + xi) + 2(1 + xi) = 2(3y - 1)i - y(1 + yi)$
δ) $x(x + 2y + i) + 1 + yi = 6x + 3i$
ε) $(x^2 + y^2 i)i + x^2 = 9(1 + i) + y$
ζ) $(x + yi)^2 = \dfrac{12 + 5i}{i}$
η) $\dfrac{x}{2 + i} + \dfrac{y}{1 - 2i} = \dfrac{6 - 2i}{4 - 3i}$
θ) $(x + i)^2 + \dfrac{4}{i} = (i - x)^2 + y + 1$
ι) $\dfrac{x - yi}{1 + i} + \dfrac{1}{i} = \dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{1 - i}$
κ) $(x + yi)^2 = \dfrac{55 + 10i}{1 - 2i}$
λ) $\dfrac{x}{1 + 2i} + \dfrac{y}{3 + 2i} = \dfrac{5 + 6i}{-1 + 8i}$

1.26 Έστω η συνάρτηση $f(z) = z^3 + 2z^2 + \kappa z + \lambda - 4 - i$. Να βρείτε τις τιμές των $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$, για τις οποίες είναι $f(1 + i) = 0$

(γ′) $\boldsymbol{z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow Im(z) = 0}$ **και** $\boldsymbol{z \in \mathbb{I} \Leftrightarrow Re(z) = 0}$

1.27 Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω αριθμοί είναι πραγματικοί:
α) $(1 - i)^{24}$ β) $(1 + i\sqrt{3})^3$ γ) $\left(\dfrac{1}{1 - i} - \dfrac{1}{1 + i}\right)^2$
δ) $(\sqrt{3} + i)^6$

1.28 Δίνεται ο μιγαδικός αριθμός $z = \dfrac{1 + \alpha i}{1 - \alpha i}$, όπου $\alpha \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:

α) Ο αριθμός $w = z + \dfrac{1}{z}$ είναι πραγματικός

β) Ο αριθμός $u = z - \dfrac{1}{z}$ είναι φανταστικός

1.29 Θεωρούμε τον μιγαδικό αριθμό:

$$z = \frac{(1 + 3i)(2 - 3i) - (-4 + i)}{2x + i}, \text{ με } x \in \mathbb{R}$$

α) Να βρείτε το πραγματικό και το φανταστικό μέρος του z
β) Να βρείτε τις τιμές του x, για τις οποίες είναι:

ι) $z \in \mathbb{R}$ ιι) $z \in \mathbb{I}$

1.30 Σε κάθε μία από τις παρακάτω περιπτώσεις, να βρείτε τις τιμές του $x \in \mathbb{R}$ για τις οποίες είναι:
ι) $z \in \mathbb{R}$ ιι) $z \in \mathbb{I}$

α) $z=6+2x^2i-3(x+6i)$ β) $z=(2-x+3xi)(i-x)$
γ) $z=(2x+i)(1+i)^2+(x^2+4)i+x$
δ) $z=\dfrac{x+2}{x+i}$ ε) $z=\dfrac{1-i\sqrt{3}}{x+(x+1)i}$ ζ) $z=\dfrac{x+i}{x-xi}$
η) $z=\dfrac{\eta\mu x+i\sigma\upsilon\nu x}{\sqrt{3}+i}$

1.31 Αν $z=x+yi$, με $x,y\in\mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι:

$$(z-1)(iz-1)\in\mathbb{R}\Leftrightarrow x=-y \text{ ή } x-y=1$$

1.32 Έστω $\alpha,\beta\in\mathbb{R}^*$ και θεωρούμε τους μιγαδικούς:

$$z=\frac{\alpha+\beta i}{\alpha-\beta i} \text{ και } w=\frac{\beta+\alpha i}{\beta-\alpha i}$$

Να αποδείξετε ότι:
α) $z+w\in\mathbb{I}$ β) $zw\in\mathbb{R}$ γ) $z=w\Leftrightarrow|\alpha|=|\beta|$

(δ΄) $z\geq 0\Leftrightarrow Re(z)\geq 0$ και $Im(z)=0$

1.33 Αν $z\in\mathbb{C}$, με $z^2\geq 0$, να αποδείξετε ότι $z\in\mathbb{R}$

1.34 Αν z είναι φανταστικός αριθμός, με $z\neq -i$, να αποδείξετε ότι $\dfrac{z^3-i}{z+i}<0$

1.35 Να βρείτε τους μιγαδικούς z, για τους οποίους ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις:
α) $z^2+z\leq 0$ β) $z^2-4z+3<0$ γ) $z+\dfrac{1}{z}<0$

(ε΄) $i^n=i^\nu$

1.36 Να γράψετε στη μορφή $\alpha+\beta i$, με $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ τους παρακάτω μιγαδικούς:
α) $\dfrac{1+i}{i^5}+\dfrac{i^2-i}{i^7}+\dfrac{i^4-i}{i^9}+\dfrac{i-1}{i^3}$
β) $\left(\dfrac{1}{i^3}+i\right)\left(\dfrac{1}{i^7}-1\right)+\left(\dfrac{1}{i^5}-i\right)\left(\dfrac{1}{i^9}-1\right)$

1.37 Να υπολογίσετε τις παρακάτω παραστάσεις:
α) $i^{31}+i^{46}+i^{265}$ β) $i^{2012}+i^{2013}+i^{2014}+i^{2015}$
γ) $5i^2+7i^{78}-4i^{31}+7i-3i^{44}+15$
δ) $\dfrac{1}{i}+\dfrac{2}{i^2}+\dfrac{3}{i^3}+\dfrac{4}{i^4}+\dfrac{5}{i^5}+\dfrac{6}{i^6}+\dfrac{7}{i^7}$
ε) $\dfrac{1}{4i^3}-\dfrac{1}{5i^{13}}+\dfrac{1}{2i^{23}}+\dfrac{1}{3i^{37}}+\dfrac{1}{6i^{49}}$
ζ) $i^{10}+\dfrac{1}{i^{15}}+i^{20}+\dfrac{1}{i^{25}}+i^{30}+\dfrac{1}{i^{35}}$

1.38 Να γράψετε στη μορφή $\alpha+\beta i$, με $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ τους παρακάτω μιγαδικούς:
α) $(1+i)^{20}$ β) $(1+i)^{21}$ γ) $(2+2i)^{20}+(2-2i)^{20}$

1.39 Αν οι φυσικοί αριθμοί κ,λ,μ,ν διαιρούμενοι με το 4 αφήνουν το ίδιο υπόλοιπο, να αποδείξετε ότι $i^{\kappa+\lambda+\mu+\nu}=1$

1.40 Να υπολογίσετε τις παρακάτω παραστάσεις:
α) $i^{57}+i^{58}+i^{59}+\cdots+i^{213}$ β) $i\cdot i^2\cdot i^3\cdots i^{2015}$
γ) $i+i^2+i^3+\cdots+i^{4\kappa}$, με $\kappa\in\mathbb{N}$

1.41 Να γράψετε στη μορφή $\alpha+\beta i$, με $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ τον μιγαδικό:

$$z=\left(\frac{1-9i}{5-4i}\right)^{28}+\left(\frac{-2+3i}{3+2i}\right)^{17}$$

1.42 Θεωρούμε τον μιγαδικό:

$$z=\left(\frac{13+7i}{7-13i}\right)^{36}+\left(\frac{21-4i}{4+21i}\right)^{53}$$

Να αποδείξετε ότι $[z-Re(z)]^{2015}=i$

1.43 Αν $z=\dfrac{1}{\sqrt{2}}-\dfrac{1}{\sqrt{2}}i$, να υπολογίσετε τον z^{127}

1.44 Αν $n\in\mathbb{Z}$, να αποδείξετε ότι $(\sqrt{3}+i)^{6n}=(\sqrt{3}-i)^{6n}$

1.45 Να βρείτε τις τιμές του $n\in\mathbb{Z}$, για τις οποίες είναι:
α) $i^{3n+31}=i^{n-5}$ β) $i^{3n-13}=i^{3-n}$ γ) $i^{3n-2}=i^{3-2n}$

1.46 Να βρείτε τις τιμές του $n\in\mathbb{N}$, για τις οποίες είναι:
α) $2i^n+(-1)^n=n-1$ β) $2i^n-3(-1)^n=-n-3$
γ) $8i^n+5(-1)^n=n+5$ δ) $2i^{2n+4}+5(-1)^n=4n-1$

1.47 Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί α,β. Να αποδείξετε ότι: $(\alpha+\beta i)^{2014}+(\beta-\alpha i)^{2014}=0$

1.48 Έστω η συνάρτηση $f(n)=i^nz$, με $z\in\mathbb{C}$ και $n\in\mathbb{N}$. Να αποδείξετε ότι $f(3)+f(8)+f(13)+f(18)=0$

1.49 Αν ισχύει η σχέση $2i^n=3n-20$, με $n\in\mathbb{N}$, να αποδείξετε ότι:
α) $n=6$ β) $(3+5i)^n+(5-3i)^n=0$

1.50 Αν ισχύει η σχέση $i^{n+2}-i=0$, με $n\in\mathbb{N}$, να αποδείξετε ότι ο αριθμός $(1+i)^{n+1}$ είναι πραγματικός

1.51 Έστω ο μιγαδικός $f(n)=i^n(1-i)$, με $n\in\mathbb{N}$. Να αποδείξετε ότι:
α) $f(4n)+f(4n+1)+f(4n+2)+f(4n+3)=0$
β) $f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(101)=1+i$

1.52 Έστω η συνάρτηση $f(z)=i(z^2+1)+z$, με $z\in\mathbb{C}$. Να υπολογίσετε:
α) τις τιμές $f(i)$ και $f(-i)$
β) την παράσταση $(f(i))^n+(f(-i))^n$, με $n\in\mathbb{N}$

1.53 Δίνονται οι μιγαδικοί $z = \sqrt{3} + i$ και $w = 1 - \sqrt{3}i$.

α) Να αποδείξετε ότι:

ι) $\dfrac{z}{w} = i$ ιι) $\dfrac{\alpha z - w}{z + \alpha w} = \dfrac{z}{w}$, με $\alpha \in \mathbb{R}$

ιιι) $z^{22} + w^{22} = 0$

β) Να βρείτε τις τιμές του $n \in \mathbb{N}^*$, για τις οποίες είναι $z^n + w^n = 0$

1.54 Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, να αποδείξετε ότι:

α) $i^n + i^{n+1} + i^{n+2} + i^{n+3} = \dfrac{1}{i^n} + \dfrac{1}{i^{n+1}} + \dfrac{1}{i^{n+2}} + \dfrac{1}{i^{n+3}}$

β) $i^{2n} + i^{2n+1} + i^{2n+2} + i^{2n+3} = \dfrac{1}{i^{2n}} - \dfrac{1}{i^{2n+1}} + \dfrac{1}{i^{2n+2}} - \dfrac{1}{i^{2n+3}}$

1.55 Αν $n \in \mathbb{N}$, να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων:

α) i^{5n+7} β) $i^{3n+1} + i^{2n} + i^{5n+3}$ γ) $(1 + i^n)(1 + i^{2n})$

δ) $i^n + i^{3n+2} + i^{2n+1} + i^{n+3}$ ε) $i^{n+1} + i^{2n+3} + i^{3n} + i^{n+2}$

1.56 Δίνεται ο μιγαδικός $z = \dfrac{\sqrt{2}(1 - i)}{2}$. Να αποδείξετε ότι:

α) $z^8 = 1$ β) $1 + z + z^2 + z^3 + \cdots + z^{79} = 0$

1.57 Έστω $z \in \mathbb{C}$ ώστε $z^2 - iz - 1 = 0$. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$A = z^{63} - z^{42} + z^{33} + z^{120}$$

1.58 Να αποδείξετε ότι $\left(\dfrac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} + \dfrac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} i\right)^{72} = 1$

1.59 Αν $n \in \mathbb{N}$, να αποδείξετε ότι:

α) $\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^{2n} + \left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^{2n} = 2(-1)^n$

β) $\left(\dfrac{4-2i}{1+2i}\right)^{n} + \left(\dfrac{6+2i}{1-3i}\right)^{n} = \begin{cases} 0, & \text{αν } n \text{ περιττός} \\ 2^{n+1} i^n, & \text{αν } n \text{ άρτιος} \end{cases}$

γ) $\left(\dfrac{x+i}{1-xi}\right)^{2n} + \left(\dfrac{i-x}{1+xi}\right)^{2n} = 2(-1)^n$, με $x, y \in \mathbb{R}$

δ) $\left(\dfrac{xi-y}{x+yi}\right)^{4n} - \left(\dfrac{x+yi}{xi-y}\right)^{4n+1} = 1 + i$, με $x, y \in \mathbb{R}$

1.60 Να βρείτε τις τιμές του $n \in \mathbb{N}$, ώστε να είναι:

α) $(2-3i)^n + (3+2i)^n = 0$ β) $\left(\dfrac{2-i}{1+2i}\right)^{3n+1} = -1$

γ) $\left(\dfrac{2-3i}{3+2i}\right)^{2n} + \left(\dfrac{4+5i}{5-4i}\right)^{2n} = 2^{n^2-7n+13}$

1.61 Έστω η συνάρτηση $f(z) = z^{3n}$, με $n \in \mathbb{N}^*$

α) Αν $n = 10$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $f(1 + i\sqrt{3}) - f(\sqrt{3} - i)$

β) Να βρείτε την ελάχιστη τιμή του n για την οποία είναι $f(3+4i) + f(4-3i) = 0$

1.62 Να υπολογίσετε το άθροισμα $\displaystyle\sum_{\kappa=0}^{99} (-1)^{\kappa}(100-\kappa) i^{\kappa+1}$

(ϛ΄) αν $z = w$, τότε $z^n = w^n$

1.63 Έστω οι μιγαδικοί z, w ώστε $z^2 + w^2 = 0$. Να αποδείξετε ότι $z^{2014} + w^{2014} = 0$

1.64 Έστω οι μιγαδικοί z, w για τους οποίους ισχύει $\sqrt{2}z = (1+i)w$. Να αποδείξετε ότι $z^4 + w^4 = 0$.

1.65 Έστω $z \in \mathbb{C}$, με $z^2 + z + 10 = 0$. Να αποδείξετε ότι $(2z+1)^{10} < 0$

(ζ΄) ταυτότητες

1.66 Έστω οι μιγαδικοί a, b, c με $a, b \neq 0$, για τους οποίους ισχύουν οι σχέσεις:

$$\frac{b+c}{a} \in \mathbb{R} \text{ και } \frac{c+a}{b} \in \mathbb{R} \text{ και } \frac{a}{b} \notin \mathbb{R}$$

Να αποδείξετε ότι $a + b + c = 0$

1.67 Έστω $z, w \in \mathbb{C}$ με $z + w = 1$ και $z^3 + w^3 = -2$. Να αποδείξετε ότι $z^{100} + w^{100} = -1$

1.68 Αν $z \in \mathbb{C}$ με $z^4 + z^2 + 1 = 0$ και $\kappa, \lambda, \mu \in \mathbb{N}$, να αποδείξετε ότι $z^{6\kappa} + z^{6\lambda+2} + z^{6\mu+4} = 0$

1.69 Έστω οι μιγαδικοί a, b, c ώστε να είναι:

$$a + b + c = a^2 + b^2 + c^2 = 0$$

Να αποδείξετε ότι:

α) $ab + bc + ca = 0$ β) $a^4 + b^4 + c^4 = 0$

γ) $a^4b^4 + b^4c^4 + c^4a^4 = 0$

1.70 Έστω $z \in \mathbb{C}$ ώστε $z^2 + z + 1 = 0$. Αν $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$, να αποδείξετε ότι:

α) $(\alpha+\beta)(\alpha z + \beta z^2)(\alpha z^2 + \beta z) = \alpha^3 + \beta^3$

β) $(\alpha z^2 + \beta z + \gamma)^3 = (\beta z^2 + \gamma z + \alpha)^3$

(η΄) εύρεση τύπου συνάρτησης

1.71 Έστω η συνάρτηση $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, για την οποία ισχύει $2f(z) + f(iz) = z^2$, για κάθε $z \in \mathbb{C}$. Να αποδείξετε ότι $f(z) = z^2$, για κάθε $z \in \mathbb{C}$

1.72 Έστω η συνάρτηση $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, για την οποία ισχύει $f(z) + f(iz) + f(-iz) = z$, για κάθε $z \in \mathbb{C}$. Να αποδείξετε ότι $f(z) = z$, για κάθε $z \in \mathbb{C}$

1.73 Έστω η συνάρτηση $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, για την οποία ισχύει $f(z) + f(\epsilon z) = z$, για κάθε $z \in \mathbb{C}$, με $\epsilon^3 = 1$. Να αποδείξετε ότι $f(z) = \dfrac{z}{\epsilon + 1}$

2 **Συζυγείς μιγαδικοί**

(α′) **ιδιότητες συζυγών μιγαδικών**

2.74 Δίνεται ο μιγαδικός $z = \dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}$. Να αποδείξετε ότι $z^2 = \overline{z}$

2.75 Δίνονται οι μιγαδικοί $z_1 = 2 - i$ και $z_2 = 3 + 2i$. Να βρείτε τους συζυγείς των μιγαδικών $w = z_1 + \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$ και $u = \dfrac{z_1}{\overline{z_2}}$

2.76 Να γράψετε στη μορφή $x + yi$, με $x, y \in \mathbb{R}$ τους συζυγείς των μιγαδικών:
α) $w = (1+i)^3 - (1-i)^3$ β) $z = \dfrac{(2+i)^2 + (2-i)^2}{1+i}$

2.77 Αν $z \in \mathbb{C}^*$, να αποδείξετε ότι:

$$\overline{\left(\frac{1+z}{z}\right)} - \overline{\left(z + \frac{1}{z}\right)} = 1 - \overline{z}$$

2.78 Να βρείτε τις τιμές των $x, y \in \mathbb{R}$, ώστε οι αριθμοί z, w να είναι συζυγείς, όταν:
α) $z = x^2 + (y+3)i$ και $w = xy - 2(x+i)$
β) $z = 3 + (3x+y)i$ και $z = 2y - x - 5i$
γ) $z = (x^2 + i)i$ και $w = x(5i - x) + 4i$

2.79 Να γράψετε τον συζυγή του μιγαδικού z, στη μορφή $x + yi$, με $x, y \in \mathbb{R}$, όταν:
α) $z = \dfrac{(1+2i)^2(3-i)}{i(1+i)^5}$ β) $z = \dfrac{1-i}{1+i} - \dfrac{(1+i)^{20}}{(1-i)^{10}}$

2.80 Δίνεται ο μιγαδικός αριθμός $z = \dfrac{(3+i)^2}{-1+i}$. Να βρείτε το πραγματικό και το φανταστικό μέρος του μιγαδικού $w = \dfrac{1+\overline{z}}{z}$

2.81 Αν $z \in \mathbb{C} - \mathbb{I}$, να αποδείξετε ότι $Re\left(\dfrac{z}{z+\overline{z}}\right) = \dfrac{1}{2}$

2.82 Αν $z, w \in \mathbb{C}$, να αποδείξετε ότι $(z\overline{w} - \overline{z}w)^2 \le 0$

2.83 Δίνεται η συνάρτηση $f(z) = \dfrac{2z+i}{\overline{z} - 2i}$, με $z \ne -2i$. Αν $f(9-5i) = w$, τότε:
α) να αποδείξετε ότι $w = \dfrac{3}{2} - \dfrac{3}{2}i$
β) να υπολογίσετε τον αριθμό $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{3} \cdot w\right)^{2014}$

2.84 Έστω οι μιγαδικοί z, w με $Re(z) \cdot Im(w) \ne 0$. Αν είναι $(z+w) \in \mathbb{I}$ και $(z^2 + w^2) \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι $\overline{z} + w = 0$

2.85 Αν $z, w \in \mathbb{C}$ με $z + w \in \mathbb{R}$ και $zw \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι $z = \overline{w}$

2.86 Θεωρούμε τους μιγαδικούς $z \ne 0$ και $w = \dfrac{\overline{z}}{z} - \dfrac{z}{\overline{z}}$. Να αποδείξετε ότι: α) $w \in \mathbb{I}$ β) $-2 \le Im(w) \le 2$

2.87 Αν $a, b, c \in \mathbb{C}$, να αποδείξετε ότι:
α) $a \cdot Im(b\overline{c}) + b \cdot Im(c\overline{a}) + c \cdot Im(a\overline{b}) = 0$
β) αν $Im(\overline{a}b) = Im(\overline{b}c) = Im(\overline{c}a) \ne 0$, τότε είναι $a + b + c = 0$

(β′) **η εξίσωση $f(z, \overline{z}) = 0$**

2.88 Να βρείτε τον μιγαδικό z που ικανοποιεί κάθε μία από τις παρακάτω σχέσεις:
α) $Im(\overline{z}+1) + iRe(2-z) = -2 - i$
β) $Re(2\overline{z}+1) + iIm(3-z) = 5 - 2i$
γ) $[Re(z) + 3i][Im(z) - i] = 3 - 4i - \overline{z}$
δ) $3(1+i) - z - 2\overline{z} = [Re(z) + 5i]i + [Im(\overline{z}) + 2i](1-i)$

2.89 Να βρείτε τον μιγαδικό z που ικανοποιεί κάθε μία από τις παρακάτω σχέσεις:
α) $z(1+i) = 1 + i \cdot \overline{z}$ β) $z + \overline{z} + i(z+i) + 2 = 0$
γ) $2z + \overline{z} = 3 + i$ δ) $(3+2i)z - (1-2i)\overline{z} = 4 - 4i$
ε) $\overline{z} + i(z - \overline{z}) + 3 = 0$ ζ) $z\overline{z} + 2i(z + \overline{z}) = 4(5+2i)$
η) $z - i(z + \overline{z}) - 1 = 0$ θ) $i(z+\overline{z}) + i(z - \overline{z}) = 6i - 4$
ι) $(i-1)(2\overline{z} - i) = z - 1$ κ) $z\overline{z} + 5(z - \overline{z}) = 61 + 50i$
λ) $(1+i)^2 z + 5 = \overline{z} + 4i$

2.90 Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:
α) $z^2 + \overline{z} = 0$ β) $z^2 + 4\overline{z} + 4 = 0$
γ) $z^2 + 2\overline{z}^2 + z - \overline{z} + 9 = 0$ δ) $z\overline{z} + z - \overline{z} - z^2 = 18$
ε) $z^2 + 2\overline{z} + 1 = 0$ ζ) $z^2 - 2\overline{z} + 1 - 2i = 0$
η) $iz^2 - 2\overline{z} - i = 0$

2.91 Να λύσετε την εξίσωση $1 + z + \overline{z} + z^2 + \overline{z}^2 + \overline{z}^3 = 0$

(γ′) **$z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \overline{z} = z$ και $z \in \mathbb{I} \Leftrightarrow \overline{z} = -z$**

2.92 Αν $a, b, c \in \mathbb{C}$, να αποδείξετε ότι οι παρακάτω μιγαδικοί είναι πραγματικοί:
α) $z = a\overline{b} + \overline{a}b$ β) $z = \dfrac{\overline{a}+b}{a} + \dfrac{a+\overline{b}}{\overline{a}}$
γ) $z = (a\overline{b} + c)(\overline{a}b + \overline{c})$ δ) $z = i\dfrac{a\overline{b} + b\overline{a}}{a\overline{b} - b\overline{a}}$
ε) $z = (a - \overline{b})^{15} + (\overline{a} - b)^{15}$

2.93 Αν $z \in \mathbb{C}$, να αποδείξετε ότι οι παρακάτω μιγαδικοί είναι πραγματικοί:
α) $w = \dfrac{z-i}{\overline{z}+i} + \dfrac{\overline{z}+i}{z-i}$ β) $w = \dfrac{\overline{z}^2 + z^2 - z - \overline{z}}{z\overline{z}+1}$
γ) $w = \overline{z}^2 - z\overline{z} + z^2$ δ) $w = (z-i)^2 + (\overline{z}+i)^2$

ε) $w = \dfrac{z+1}{\overline{z}} + \dfrac{\overline{z}+1}{z}$ ζ) $w = \dfrac{z}{\overline{z}} - \dfrac{(z+\overline{z})(z-\overline{z})}{2z\overline{z}}$

η) $w = \dfrac{z - i \cdot \overline{z}}{\overline{z} - i \cdot z}$

2.94 Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω αριθμοί είναι φανταστικοί:
α) $(3i-1)^9 + (3i+1)^9$ β) $(2-i\sqrt{3})^5 - (2+i\sqrt{3})^5$

2.95 Αν $z, w \in \mathbb{C}$, να αποδείξετε ότι οι παρακάτω μιγαδικοί είναι φανταστικοί:
α) $u = z\overline{w} - \overline{z}w$ β) $u = (z-\overline{w})^5 - (\overline{z}-w)^5$
γ) $u = \dfrac{\overline{z}+w}{1-z\overline{w}} - \dfrac{z+\overline{w}}{1-\overline{z}w}$ δ) $u = \dfrac{(z+i)^2 - (\overline{z}-i)^2}{(z+i)^3 + (\overline{z}-i)^3}$
ε) $u = \dfrac{z^2 - \overline{z}^2}{1 + z\overline{z}}$

2.96 Θεωρούμε τον μιγαδικό z και τη συνάρτηση:

$$f(z) = (1-i)z + (1+i)\overline{z} + 1$$

Να αποδείξετε ότι $f(\overline{z}) = \overline{f(z)} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$

2.97 Αν α, β, γ μιγαδικοί αριθμοί, να αποδείξετε ότι ο αριθμός $w = (\alpha-\beta)(\overline{\beta}-\overline{\gamma}) - (\beta-\gamma)(\overline{\alpha}-\overline{\beta})$ είναι φανταστικός

2.98 Δίνονται οι μιγαδικοί $z \neq -1$ και $w = \dfrac{z}{z+1}$. Να αποδείξετε ότι: $w \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$

2.99 Δίνονται οι μιγαδικοί $z \neq i$ και $w = \dfrac{z+i}{z-i}$. Να αποδείξετε ότι: $w \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z \in \mathbb{I}$

2.100 Αν $n \in \mathbb{N}$, να αποδείξετε ότι οι παρακάτω αριθμοί είναι πραγματικοί:
α) $(1+i)^n + (1-i)^n$ β) $(3+4i)^{4n} + (4+3i)^{4n}$
γ) $\dfrac{(\alpha+\beta i)^n}{\alpha-\beta i} + \dfrac{(\alpha-\beta i)^n}{\alpha+\beta i}$, με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^*$
δ) $\dfrac{(1-i)^n}{(2+i)(3-i)} + \dfrac{(1+i)^n}{(2-i)(3+i)} + (5-2i)^n(5+2i)^n$
ε) $\left(\dfrac{19+7i}{9-i}\right)^n + \left(\dfrac{20+5i}{7+6i}\right)^n$

2.101 Δίνονται οι συζυγείς μιγαδικοί z και w με $z+w \neq 0$. Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $u = i \cdot \dfrac{1-zw}{z+w}$ είναι φανταστικός

2.102 Αν $n \in \mathbb{N}$ και ο αριθμός $z = (1+i)^n + (1-i)^n + i^n$ είναι πραγματικός, να αποδείξετε ότι ο n είναι άρτιος

2.103 Έστω η συνάρτηση $f(z) = z^7 - 2z^8 + 1$, με $z \in \mathbb{C}$. Να αποδείξετε ότι $f(z) + f(\overline{z}) \in \mathbb{R}$

2.104 Αν $\lambda \in \mathbb{R}^*$ και $Im\left(\dfrac{\lambda+2z}{\lambda-2z}\right) = 0$, με $z \neq \dfrac{\lambda}{2}$, να αποδείξετε ότι $z \in \mathbb{R}$

2.105 Αν $z \in \mathbb{C}^*$, να αποδείξετε ότι:

$$\left(z + \frac{1}{z}\right) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \overline{z} = \frac{1}{z} \text{ ή } z \in \mathbb{R}^*$$

2.106 Έστω ο μιγαδικός $z \neq \alpha i$, με $\alpha \in \mathbb{R}^*$. Να αποδείξετε ότι:

$$\frac{z+\alpha i}{iz+\alpha} \in \mathbb{I} \Leftrightarrow z \in \mathbb{I}$$

2.107 Έστω ο μιγαδικός z, με $z \neq 0$ και θεωρούμε τον μιγαδικό $w = \dfrac{1-z}{z^2}$. Να αποδείξετε ότι:

$$w \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R} \text{ ή } z \cdot \overline{z} = 2Re(z)$$

2.108 Θεωρούμε τους μιγαδικούς z, w ώστε να είναι:

$$z^7 = 4 + 3i \text{ και } w^7 = 3 + 4i$$

Αν $u = \dfrac{z}{w}$, να αποδείξετε ότι: α) $u \notin \mathbb{R}$ β) $u \notin \mathbb{I}$

2.109 Θεωρούμε τους μιγαδικούς $z = x+yi$ και $w = y+xi$, με $x, y \in \mathbb{R}$. Αν $z^5 \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι $w^5 \in \mathbb{I}$

2.110 Δίνεται ο μιγαδικός $z \in \mathbb{C}^*$ και θεωρούμε τον μιγαδικό αριθμό:

$$w = \frac{z}{\overline{z}} + \frac{\overline{z}}{z}$$

Να αποδείξετε ότι:
α) $w \in \mathbb{R}$ και $-2 \leq w \leq 2$ β) αν $w = 2$, τότε $z \in \mathbb{R}$
γ) αν $w = -2$, τότε $z \in \mathbb{I}$

2.111 Θεωρούμε τους μιγαδικούς a, b και c. Να αποδείξετε ότι:
α) ο αριθμός $z = \overline{a}(b+c) + \overline{b}(c+a) + \overline{c}(a+b)$ είναι πραγματικός
β) ο αριθμός $w = \overline{a}(b-c) + \overline{b}(c-a) + \overline{c}(a-b)$ είναι φανταστικός

2.112 Δίνεται ο πραγματικός αριθμός x, ώστε να είναι $(1+xi)^7 \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι $(x+i)^7 \in \mathbb{I}$

2.113 Έστω $z, w \in \mathbb{C}$, ώστε $(z+w) \in \mathbb{R}$ και $(z-w) \in \mathbb{I}$. Να αποδείξετε ότι:
α) $zw \geq 0$
β) Αν $n \in \mathbb{N}^*$, τότε: ι) $z^n + w^n \in \mathbb{R}$ ιι) $z^n - w^n \in \mathbb{I}$

2.114 Έστω $z \in \mathbb{C}$ με $(z-i)(\overline{z}+i) = 1$. Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $w = \dfrac{(z-2i)^3}{(z-i)^3 - i^3}$ είναι πραγματικός

2.115 Έστω $z, w \in \mathbb{C}$ και $u = (z-w)(z-\overline{w})$. Να αποδείξετε ότι: $u \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$ ή $(z-w) \in \mathbb{I}$

2.116 Έστω η συνάρτηση $f(z)=\dfrac{(1+z)^n}{1+z^n}$, με $z\in\mathbb{C}$ και $n\in\mathbb{N}^*$

α) Να αποδείξετε ότι $f\left(\dfrac{1}{z}\right)=f(z)$, με $z\neq 0$

β) Αν $z\overline{z}=1$, να αποδείξετε ότι $f(z)\in\mathbb{R}$

γ) Να βρείτε τις τιμές του n, για τις οποίες ορίζεται η τιμή $f(i)$ και να αποδείξετε ότι $f(i)\in\mathbb{R}$

2.117 Έστω οι μιγαδικοί a,b,c για τους οποίους ισχύουν οι σχέσεις:

$$a+b=\overline{c}, b+c=\overline{a} \text{ και } c+a=\overline{b}$$

Να αποδείξετε ότι: α) $a+b+c=0$ β) $a,b,c\in\mathbb{I}$

2.118 Έστω οι μιγαδικοί a,b,c για τους οποίους ισχύουν οι σχέσεις:

$$a=b+\overline{c}, b=c+\overline{a} \text{ και } c=a+\overline{b}$$

Να αποδείξετε ότι: α) $a+b+c=0$ β) $a,b,c\in\mathbb{R}$
γ) $a=b=c=0$

2.119 Έστω $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$ με $\alpha\neq\beta$ και $w\in\mathbb{C}$, για τους οποίους ισχύει $\alpha w+\beta\overline{w}+\gamma=0$. Να αποδείξετε ότι $w\in\mathbb{R}$

2.120 Έστω οι πραγματικοί αριθμοί α,β και ο θετικός ακέραιος n ώστε να είναι $(\alpha+\beta i)^n+(\beta+\alpha i)^n\in\mathbb{R}^*$. Να αποδείξετε ότι $n=4\kappa$, με $\kappa\in\mathbb{N}^*$

2.121 Δίνεται ο μιγαδικός $z=\dfrac{2+2\sqrt{3}i}{1+i}$. Αν $z^n\in\mathbb{R}$, με $n\in\mathbb{N}^*$, να αποδείξετε ότι το n είναι πολλαπλάσιο του 12.

2.122 Έστω οι μιγαδικοί z,w με $z\neq w$ και θεωρούμε τους μιγαδικούς:

$$a=\frac{1-zw}{z-w}, b=\frac{1+zw}{z-w}i \text{ και } c=\frac{z+w}{z-w}$$

Να αποδείξετε ότι:
α) $a^2+b^2+c^2=1$
β) αν $a,b,c\in\mathbb{R}$, τότε οι μιγαδικοί z και $-\dfrac{1}{w}$ είναι συζυγείς

3 Εξισώσεις

(α΄) πρωτοβάθμιες

3.123 Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:
α) $(1+i)z=2$ β) $z-(1-i)(1+i)=i(z-2)$
γ) $2iz-(1+i)z=2$ δ) $(3+i)z+(2+i)^2=7+2i$
ε) $(2+3i)z-2=(1+2i)+2z+i$ ζ) $(1-i)^2z=4i-2$
η) $(i-z)(1+2i)+(1-iz)(3+4i)=14+6i$
θ) $(1-i)z+z=2(1+i)^2+7$ ι) $iz+z=i^2+i^3$
κ) $3iz-(1-i)(z+1)=(5+i)^2+23i^2$

3.124 Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:
α) $\dfrac{z+3}{1-i}-\dfrac{z-1}{1+i}=2i$ β) $2zi-\dfrac{z+3i}{1-2i}=9+2i$
γ) $z+\dfrac{iz}{1-i}=(1+i)^3$ δ) $\dfrac{z-1}{i+1}=\dfrac{z+1}{i-1}-i$

3.125 Αν $z_1=3-i$ και $z_2=2+i$, να λύσετε την εξίσωση:

$$\frac{z}{z_1}+z_2=(z_1-z_2)^2$$

3.126 Έστω η συνάρτηση $f(z)=(1+i)z+3-i$, με $z\in\mathbb{C}$.
α) Να λύσετε τις εξισώσεις:
ι) $f(z)=0$ ιι) $f(z)=z$ ιιι) $f(z)=f(1-i)$
β) Να βρείτε τις τιμές των $x,y\in\mathbb{R}$, ώστε να είναι $f(x-2yi)=f(2-4i)$

3.127 Να λύσετε την εξίσωση $(1-i)^{30}z=(1+i)^{33}-2^{16}i$

(β΄) συστήματα πρωτοβάθμιων εξισώσεων

3.128 Να βρείτε τους μιγαδικούς z,w οι οποίοι ικανοποιούν τις σχέσεις:
α) $z+w=4+i$ και $2z-w=-1+5i$
β) $z+iw=i$ και $3z+2w=3+5i$
γ) $(1+2i)z-iw=7$ και $(3-i)z-w=2-10i$
δ) $w-iz=3(1+i)$ και $z-2iw=3(1-i)$
ε) $(1+i)z+(1-i)w=2+i$ και $3z-2iw=4-i$
ζ) $(1-i)z+iw=i(-4+3i)$ και $iz-(2+i)w=-2-3i$
η) $3z+(1+i)\overline{w}=2+3i$ και $(2+i)\overline{z}+(1+i)w=1$

3.129 Να βρείτε τους μιγαδικούς z_1,z_2,z_3 για τους οποίους ισχύουν: $z_1=z_2+iz_3, z_2=z_3+iz_1$ και $z_3=z_1+iz_2$

(γ΄) δευτεροβάθμιες

3.130 Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:
α) $z^2+1=0$ β) $z^2-2z+4=0$ γ) $z^2-6z+25=0$
δ) $z^2+4z+8=0$ ε) $z^2=4z-13$

3.131 Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:
α) $\left(\dfrac{z+7i}{z-3i}\right)^2+9=0$ β) $\left(\dfrac{z-i}{z+i}\right)^2-3\left(\dfrac{z-i}{z+i}\right)+2=0$

3.132 Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:
α) $z^2=2i$ β) $z^2=5-12i$ γ) $z^2-2iz-1+2i=0$
δ) $z^2-(5+i)z+12+5i=0$ ε) $z^2-iz+6=0$
ζ) $z^2-5z+7-i=0$ η) $z(z-i)=2(iz+1)$
θ) $(z^2-4z+5)+i(z+1)=0$
ι) $(1+i)z^2-2\sqrt{2}iz-(1-i)=0$

3.133 Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, ώστε η εξίσωση $z^2 + \alpha z + \beta = 0$ να έχει ρίζα τον αριθμό $z_1 = 2 - i$.

3.134 Δίνεται η συνάρτηση $f(z) = \dfrac{z-1+i}{z^2-2z+2}$, με $z \in \mathbb{C}$
α) Να βρείτε για ποιές τιμές του z ορίζεται η συνάρτηση
β) Να λύσετε την εξίσωση $f(z) = \dfrac{z-1+i}{2}$

3.135 Έστω z_1, z_2 οι ρίζες της εξίσωσης $z^2 - 2z + 10 = 0$. Να αποδείξετε ότι:
α) $\dfrac{1}{z_1} + \dfrac{1}{z_2} = \dfrac{1}{5}$ β) $z_1^2 z_2 + z_1 z_2^2 = 20$ γ) $z_1^2 + z_2^2 = -16$

3.136 Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς $w_1 = 4 + 7i$ και $w_2 = 2i^{2020} + 3i^{2019}$. Αν η εξίσωση

$$x^2 - (4\alpha + \beta)x + 2\beta - \alpha = 0, \text{ με } \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

έχει ρίζα τον αριθμό $\dfrac{w_1}{w_2}$, τότε:
α) να βρείτε τις τιμές των α, β
β) να λύσετε την εξίσωση $\dfrac{z + \alpha}{\beta \bar{z} - i} = i(1 + i)$

3.137 Έστω z_1, z_2 οι ρίζες της εξίσωσης $z + \dfrac{3}{z} = 2$. Να αποδείξετε ότι:

$$\left(\frac{z_1 - z_2}{2\sqrt{2}}\right)^{2016} + \left(\frac{z_1 + z_2}{2}\right)^{2017} + \left(\frac{z_1 z_2}{3}\right)^{2018} = 3$$

3.138 Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:
α) $\left(\dfrac{z-1}{z-i}\right)^2 + 4 = 0$ β) $\left(\dfrac{z-3i}{2+i}\right)^2 + \left(\dfrac{z+3i}{2-i}\right)^2 = 0$

3.139 Αν z_1, z_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης $z^2 + 4z + 8 = 0$, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{z_1 + z_2 + 4i}{z_1 z_2 + 8i} \in \mathbb{I}$$

3.140 Έστω z_1, z_2 οι ρίζες της εξίσωσης $z^2 + 2z + 2 = 0$. Να γράψετε τον αριθμό

$$w = \frac{(z_1 + z_2)^4 + 2i}{(z_1 z_2)^2 - 2i}$$

στη μορφή $\alpha + \beta i$, με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

3.141 Δίνεται η εξίσωση $z - \dfrac{1}{z} = i\sqrt{3}$
α) Να λύσετε την παραπάνω εξίσωση
β) Αν z_1 είναι η λύση με $Re(z_1) < 0$, να αποδείξετε ότι $z_1^3 = 1$ και να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $z_1^{2015} + z_1^{-2015}$

3.142 Αν A, B είναι οι εικόνες των ριζών της εξίσωσης $z^2 + 5z + 13 = 0$ και $M(0, 1)$, να αποδείξετε ότι είναι $(MA) \cdot (MB) = 13$

3.143 Έστω z_1, z_2 οι ρίζες της εξίσωσης $\alpha z^2 + \beta z + \gamma = 0$, με $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ και $\alpha \neq 0$. Αν είναι $\beta^2 = \alpha^2 + \beta\gamma + 2\gamma\alpha$, να αποδείξετε ότι $z_1^2(1 + z_2) + z_2^2(1 + z_1) = 1$

3.144 Έστω η εξίσωση $z^2 + 2z + 2 = 0$
α) Να βρείτε τις ρίζες της z_1, z_2
β) Να αποδείξετε ότι $z_1^4 = z_2^4 = -4$
γ) Να βρείτε τις τιμές του $n \in \mathbb{N}^*$, ώστε $z_1^n + z_2^n = 0$

3.145 Δίνεται η εξίσωση $z^2 + \beta z + \gamma = 0$, με $\beta, \gamma \in \mathbb{C}$. Αν η εξίσωση έχει ρίζες τους συζυγείς μιγαδικούς z_1, z_2, να αποδείξετε ότι:
α) $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$
β) η εξίσωση $z^2 - \beta z - \gamma = 0$ έχει πραγματικές ρίζες

3.146 Έστω η εξίσωση $z^2 - 4\eta\mu\alpha \cdot z + 4 = 0$, με $0 \leq \alpha \leq \pi$
α) Να βρείτε τις ρίζες z_1, z_2 της παραπάνω εξίσωσης
β) Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

$$S_1 = \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} \text{ και } S_2 = z_1^4 + z_2^4$$

γ) Να βρείτε τις τιμές του α, ώστε να είναι $S_2 = 0$

(δ΄) **πολυωνυμικές**

3.147 Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $z^{2016} + \kappa z + \lambda i = 0$, με $\kappa, \lambda > 0$, δεν έχει πραγματική ρίζα

3.148 Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ για τις οποίες η εξίσωση $z^3 + \alpha z + \beta = 0$ έχει ρίζα τον αριθμό $1 + i$. Ποιές είναι οι άλλες ρίζες της εξίσωσης αυτής;

3.149 Θεωρούμε το πολυώνυμο $P(z) = z^3 + 7iz^2 - z - 7i$, με $z \in \mathbb{C}$
α) Να αποδείξετε ότι $P(1) = 0$
β) Να βρείτε πολυώνυμο $Q(z)$ ώστε να είναι $P(z) = (z-1)Q(z)$ για κάθε $z \in \mathbb{C}$
γ) Να λύσετε την εξίσωση $P(z) = 0$

3.150 Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:
α) $z^3 - 1 = 0$ β) $z^3 + z^2 - 2 = 0$ γ) $z^3 - 3z^2 + 2 = 0$
δ) $z^3 + 3z^2 + 3z + 2 = 0$ ε) $z^3 - 3z^2 + z + 2 = 0$
ζ) $z^4 = 1$ η) $z^4 + 2z^3 + 2z^2 + 2z + 1 = 0$
θ) $z^6 + 2z^5 + 2z^4 + 2z^3 + z^2 + (z+1)^2 = 0$

3.151 Αν $\theta \in \mathbb{R}$, να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:
α) $z^3 - 2(1 + \sigma\upsilon\nu\theta)z^2 + (1 + 4\sigma\upsilon\nu\theta)z - 2 = 0$
β) $z^2 + \dfrac{1}{z^2} = 2\sigma\upsilon\nu\theta$

3.152 Αν z_1, z_2, z_3 είναι οι ρίζες της εξίσωσης

$$z^3 - z^2 + z - 1 = 0$$

να αποδείξετε ότι $z_1^{2016} + z_2^{2016} + z_3^{2016} = 3$

3.153 Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

α) $\left(\dfrac{z+i}{z-i}\right)^3 + \left(\dfrac{z+i}{z-i}\right)^2 + \dfrac{z+i}{z-i} + 1 = 0$

β) $\left(\dfrac{z+1}{i}\right)^3 - 7\left(\dfrac{z+1}{i}\right)^2 + 16\dfrac{z+1}{i} - 10 = 0$

3.154 Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:
α) $(z^2+1)^2 + (z^2-z-1)^2 = 0$
β) $(z^2-4z+5)^2 + (z+1)^2 = 0$
γ) $(3z-1)^4 + (z-2)^4 = 0$

3.155 Αν z_1, z_2 είναι δύο διαφορετικές ρίζες της εξίσωσης $z^3 = 1 + \sqrt{3}$, να αποδείξετε ότι $\dfrac{z_1}{z_2} \notin \mathbb{R}$

3.156 Δίνεται το πολυώνυμο:

$$P(z) = z^3 - (5+2i)z^2 + (11+5i)z - 12i$$

α) Να αποδείξετε ότι έχει φανταστική ρίζα
β) Να βρείτε όλες τις ρίζες του $P(z)$

3.157 Να αποδείξετε ότι οι εικόνες των ριζών της εξίσωσης $z^4 + z^2(z-1)^2 + (z-1)^4 = 0$ είναι συνευθειακά σημεία

3.158 Αν $n \in \mathbb{N}^*$ και n άρτιος, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $(z+1)^n + (z-1)^n = 0$ δεν έχει πραγματική ρίζα

3.159 Έστω ο μιγαδικός z ώστε $z^4 + z^2 + 1 = 0$ (1)
α) Να αποδείξετε ότι: ι) $z^6 = 1$ ιι) $z^{2018} = z^2$
β) Να λύσετε την εξίσωση (1)

3.160 Αν ο αριθμός z_0 είναι ρίζα της εξίσωσης

$$\alpha_n x^n + \alpha_{n-1}x^{n-1} + \cdots + \alpha_1 x + \alpha_0 = 0$$

με $\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathbb{R}$ και $\alpha_n \neq 0$, να αποδείξετε ότι ο αριθμός $\overline{z_0}$ είναι επίσης ρίζα της εξίσωσης αυτής

3.161 Αν η εξίσωση $z^n = \alpha$, με $n \in \mathbb{N}$ και $n \geq 2$, έχει δύο συζυγείς ρίζες, να αποδείξετε ότι $\alpha \in \mathbb{R}$

3.162 Αν $z \in \mathbb{C}$ με $z^5 = 1$, να αποδείξετε ότι:

α) $\dfrac{z}{1+z^2} + \dfrac{z^2}{1+z^4} + \dfrac{z^3}{1+z} + \dfrac{z^4}{1+z^3} = 2$

β) $\dfrac{z}{1-z^2} + \dfrac{z^2}{1-z^4} + \dfrac{z^3}{1-z} + \dfrac{z^4}{1-z^3} = 0$, με $z \neq 1$

γ) $\dfrac{z^4}{z-1} + \dfrac{z^3}{z^2-1} + \dfrac{z^2}{z^3-1} + \dfrac{z^4}{z-1} = -1$, με $z \neq 1$

3.163 Δίνεται η εξίσωση $z^5 + z^3 + z + 3 = 0$. Αν z_1, z_2, z_3, z_4, z_5 οι ρίζες της εξίσωσης αυτής, να αποδείξετε ότι:

$$(1+z_1^2)(1+z_2^2)(1+z_3^2)(1+z_4^2)(1+z_5^2) = 10$$

(ε′) συστήματα μη γραμμικών εξισώσεων

3.164 Να βρείτε τους μιγαδικούς z, w σε κάθε μία από τις παρακάτω περιπτώσεις:
α) $z^2 = w$ και $w^2 = z$ β) $z^3 + w^5 = 0$ και $z^2 \cdot \overline{w}^4 = 1$

3.165 Έστω οι μη μηδενικοί αριθμοί z, w για τους οποίους ισχύουν οι σχέσεις $z^2 = \overline{w}$ και $w^2 = -\bar{z}$.
α) Να αποδείξετε ότι: ι) $z^3 = -1$ ιι) $w = -\dfrac{1}{z}$
β) Να βρείτε τους μιγαδικούς z, w

3.166 Σε κάθε μία από τις παρακάτω περιπτώσεις, να βρείτε τις κοινές λύσεις των εξισώσεων:
α) $z^{16} + 2z^{15} + 1 = 0$ και $(z+1)^2 + z^2 + z = 0$
β) $z^{16} + 2z^{14} + 1 = 0$ και $(z^2+1)^2 + z^3 + z = 0$
γ) $z^3 + 4z = 3z^2 + 2$ και $z^{10} - 32z + 32 = 0$

4 Γεωμετρικοί τόποι

(α′) ευθεία

4.167 Να περιγράψετε γεωμετρικά τους μιγαδικούς z σε κάθε μία από τις παρακάτω περιπτώσεις:
α) $Re(z) = 2$ β) $Im(z) = 3$ γ) $Im(z) = -3$ και $Re(z) > 3$ δ) $Im(z) = 1$ και $-2 \leq Re(z) \leq 2$

4.168 Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο του z, όταν:
α) $z + \bar{z} = 2$ β) $z - \bar{z} = 2i$ γ) $1 + Im(z) = 2Re(z)$
δ) $Im(z^2) = 0$ ε) $z^2 = \bar{z}^2$ ζ) $z^2 + 4z = \bar{z}^2 + 4\bar{z}$
η) $(2+5i)\bar{z} + (2-5i)z = 2$ θ) $Re[(2-i)z] = 4$
ι) $Re(\bar{z}+2) = Im(z)$ κ) $Re(2+iz) = Im(\bar{z}i) + 2Re(z)$
λ) $Re(z+5+7i) = Im(z-2+6i)$ μ) $z^3 = -\bar{z}^3$
ν) $(1+i\sqrt{3})\bar{z} = 2z$

4.169 Αν $\lambda \in \mathbb{R}$, να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών z, σε κάθε μια από τις παρακάτω περιπτώσεις:
α) $z = 5 + \lambda + (12+3\lambda)i$ β) $z = 4 - (1-\lambda)i$
γ) $z = 2 + (1-\lambda^2)i$ δ) $z = \lambda^2 + 1 - (2-\lambda^2)i$
ε) $z = (4+3i) + \lambda\left(\dfrac{1}{3}i - \dfrac{1}{4}\right)$ ζ) $z = \dfrac{2-\lambda i}{1+2i}$

4.170 Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί $z = 1 + \eta\mu\theta + i\sigma\upsilon\nu\theta$ και $w = 1 - \eta\mu\theta + i\sigma\upsilon\nu\theta$, με $\theta \in \mathbb{R}$. Αν Α, Β είναι οι εικόνες των z και w, να βρείτε το γεωμετρικό τόπο του μέσου του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ.

4.171 Δίνεται ο μιγαδικός $z = (1+t) - 2ti$, με $t \in \mathbb{R}$ και έστω $w = iz + 2$. Να βρείτε τους γεωμετρικούς τόπους των εικόνων των z και w

4.172 Δίνεται ο μιγαδικός $z = \lambda(1+i) + 1 - i$, με $\lambda \in \mathbb{R}$. Να βρείτε:
α) το γεωμετρικό τόπο του z
β) τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε $z = \dfrac{\alpha + \beta i}{1+i}$

4.173 Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο του μιγαδικού z για τους οποίους ο μιγαδικός w είναι φανταστικός, όταν:
α) $w = z(1-2i)$ β) $w = \dfrac{i}{z+1}$ γ) $w = \dfrac{2}{z+1+i}$

4.174 Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο του μιγαδικού z για τους οποίους ο μιγαδικός w είναι πραγματικός, όταν:
α) $w = i \cdot \bar{z} + 2z$ β) $w = (z-i)(\bar{z}-1)$ γ) $w = z^2 + z + 1$
δ) $w = \dfrac{z}{z+i}$ ε) $w = \dfrac{z+1}{z-1}$ ζ) $w = \dfrac{z+i}{z-1+2i}$
η) $w = \dfrac{z+2\bar{z}}{z^2}$ θ) $w = \dfrac{\bar{z}+1}{z+3}$ ι) $w = \dfrac{2-2i}{z+1}$

4.175 Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί z και $w = (\bar{z}-i)(z+zi)$. Αν η εικόνα του w βρίσκεται στην ευθεία $y = x$, να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων του z

4.176 Θεωρούμε το μιγαδικό z και έστω $w = z\bar{z} - z^2$. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων του z, αν ισχύει $Re(w) + Im(w) = 0$

4.177 Έστω $z \in \mathbb{C}$ και θεωρούμε τον μιγαδικό αριθμό $w = (1-z)(1-iz)$. Να βρείτε το σύνολο των σημείων $M(z)$ για τα οποία ισχύει $Re(w) + Im(z^2) = 0$

4.178 Δίνεται ο μιγαδικός

$$z = \frac{x+yi}{1-i} + \frac{2-4i}{1+i}, \text{ με } x, y \in \mathbb{R}$$

Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων $M(x,y)$, ώστε η εικόνα του z να ανήκει στην ευθεία $y = -x$.

4.179 Έστω οι μιγαδικοί $z = 2x - (y+1)i$ και $w = \dfrac{z-2}{z+2i}$. Αν $w \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι το σημείο $M(x,y)$ κινείται σε ευθεία της οποίας να βρείτε την εξίσωση.

4.180 Δίνεται ο μιγαδικός $z = \alpha + 1 + (2\alpha - 1)i$, όπου $\alpha \in \mathbb{R}$
α) Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών z είναι η ευθεία $(\epsilon) : y = 2x - 3$
β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (δ) η οποία διέρχεται από το σημείο $A(0,2)$ και είναι κάθετη στην ευθεία (ϵ)
γ) Να βρείτε τον μιγαδικό z που έχει την πλησιέστερη εικόνα στο σημείο A

4.181 Αν ο γεωμετρικός της εικόνας του z είναι η ευθεία $2x + 3y + 7 = 0$, να βρείτε το γεωμετρικό τόπο της εικόνας του μιγαδικού w, για τον οποίο ισχύει η σχέση $(2+i)w = z - 1 + 2i$

4.182 Αν η εικόνα του z στο μιγαδικό επίπεδο κινείται στην ευθεία $(\epsilon) : y = x + 1$, να αποδείξετε ότι η εικόνα του $w = (2+i)z + \bar{z} + i$ κινείται επίσης σε ευθεία της οποίας να βρείτε την εξίσωση.

4.183 Αν ο μιγαδικός αριθμός z είναι φανταστικός, να βρείτε το γεωμετρικό τόπο του μιγαδικού w, σε κάθε μία από τις παρακάτω περιπτώσεις:
α) $w = \dfrac{z-1}{z+i}$ β) $w = \dfrac{z+i}{1+iz}$

4.184 Δίνεται η εξίσωση:

$$z^2 + (2\lambda - 2)z + (5\lambda^2 - 2\lambda + 1) = 0, \text{ με } \lambda \in \mathbb{R}^*$$

Να βρείτε:
α) τις ρίζες z_1, z_2 της παραπάνω εξίσωσης
β) το γεωμετρικό τόπο των ριζών z_1, z_2

(β΄) **κύκλος**

4.185 Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο του z, όταν:
α) $z\bar{z} = z + \bar{z}$ β) $2z\bar{z} + 3(z+\bar{z}) + 2i(z-\bar{z}) + 2 = 0$
γ) $z\bar{z} + i(z-\bar{z}) = 3(2 - z - \bar{z})$ δ) $z\bar{z} + i(z-\bar{z}) = 3$
ε) $z\bar{z} - 3z - 5\bar{z} = 2iIm(z)$ ζ) $z\bar{z} + z + \bar{z} = i(z-\bar{z})$
η) $(\bar{z} - \alpha)(z + \alpha) = (\bar{z} + \alpha)(\alpha - z)$, με $\alpha > 0$
θ) $(z - (1+i))(\bar{z} - (1-i)) = 9$

4.186 Αν $\phi \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι η εικόνα του μιγαδικού z, στις παρακάτω περιπτώσεις, κινείται σε κύκλο του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα:
α) $z = (1 - \eta\mu\phi) + (2 + \sigma\upsilon\nu\phi)i$
β) $z = 3 + 2\eta\mu\phi + (4 + 2\sigma\upsilon\nu\phi)i$
γ) $z = 1 + 2i + 5(\sigma\upsilon\nu\phi + i\eta\mu\phi)$

4.187 Έστω οι μιγαδικοί z, w με $z \neq 1$, ώστε $w = \dfrac{z+1}{z-1}$. Αν $Re(w) = Im(w)$, να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων του z

4.188 Δίνονται οι μιγαδικοί $z \neq 2$ και $w = \dfrac{z-i}{z-2}$. Να αποδείξετε ότι:
α) Αν $w \in \mathbb{R}$, τότε η εικόνα του μιγαδικού z κινείται σε ευθεία από την οποία έχει εξαιρεθεί το σημείο $A(2,0)$
β) Αν $w \in \mathbb{I}$, τότε η εικόνα του μιγαδικού z κινείται σε κύκλο από τον οποίο έχει εξαιρεθεί το σημείο $A(2,0)$

4.189 Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο του z, όταν:

α) $\dfrac{z}{iz-2} \in \mathbb{R}$ β) $\dfrac{z^2}{z+i} \in \mathbb{I}$ γ) $\dfrac{z^2}{z-2} \in \mathbb{R}$

δ) $\left(z-\dfrac{1}{z}\right) \in \mathbb{I}$ ε) $\dfrac{z-i}{z-1} \in \mathbb{I}$ ζ) $\dfrac{1-z}{1-iz} \in \mathbb{R}$

η) $\dfrac{z}{z+4} \in \mathbb{I}$ θ) $\left(z+\dfrac{4}{z}\right) \in \mathbb{R}$ ι) $\dfrac{z+2i}{z-i} \in \mathbb{I}$

κ) $\dfrac{z+1}{z-2i} \in \mathbb{I}$ λ) $\dfrac{z^2-z+1}{z^2+1} \in \mathbb{R}$ μ) $\dfrac{z-1-i}{iz+1} \in \mathbb{R}$

ν) $\dfrac{i(z^2+1)}{z+1} \in \mathbb{I}$ ξ) $\dfrac{z(z-\alpha)}{1-\alpha z} \in \mathbb{R}$, με $\alpha \in (0,1)$

4.190 Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο του z, όταν:

α) $Re(z^2-1) = -2Im^2(z)$ β) $Re(z) + Im\left(\dfrac{1}{iz}\right) = 0$

γ) $Re\left(\dfrac{z+1}{z-1}\right) = 2$ δ) $Re\left(\dfrac{z+3}{z-1}\right) = Im\left(\dfrac{z+3}{z-1}\right)$

ε) $Im\left(\dfrac{1}{\overline{z}+1}\right) = \dfrac{1}{6}$ ζ) $Im\left(z-\dfrac{1}{z}\right) = 2Re(i\cdot\overline{z})$

η) $Re\left(z+\dfrac{\alpha^2}{z}\right) = (\alpha+1)Re(z)$, με $\alpha > 0$

θ) $Im\left(\dfrac{\alpha}{z}-\overline{z}\right) = (1-\alpha)Im(z)$, με $\alpha \in \mathbb{R}^*$

ι) $Im\left(\dfrac{1}{\alpha-z}\right) = \dfrac{1}{2\alpha}$, με $\alpha \in \mathbb{R}^*$

4.191 Έστω οι μιγαδικοί $z_1 = 3+i$ και $z_2 = -1+3i$. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο του z, σε κάθε μία από τις παρακάτω περιπτώσεις:

α) $\dfrac{z-z_1}{z-z_2} \in \mathbb{I}$ β) $(z-z_1)(\overline{z}-\overline{z_1}) = z_2\overline{z_2}$

4.192 Αν $\lambda \in \mathbb{R}$, σε κάθε μία από τις παρακάτω περιπτώσεις, να αποδείξετε ότι οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών z είναι σημεία κύκλου του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα:

α) $z = \dfrac{\lambda+1}{\lambda+i}$ β) $z = \dfrac{\lambda-2i}{\lambda+2i}$ γ) $z = \dfrac{\lambda+2i}{1+\lambda i}$

δ) $z = \dfrac{1+\lambda}{1+2\lambda+i}$

4.193 Δίνονται οι μιγαδικοί $z = x-2+yi$ και $w = x+yi$. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων $M(x,y)$ για τα οποία ο μιγαδικός $\dfrac{z}{w}$ είναι φανταστικός.

4.194 Έστω οι μιγαδικοί z, w με $w = \dfrac{z+1}{z-1}$. Αν η εικόνα του z κινείται στην ευθεία με εξίσωση $x+y=1$, να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων του w.

4.195 Έστω M, N οι εικόνες των μιγαδικών z, w αντίστοιχα για τους οποίους ισχύει $zw = 2i$. Αν το M κινείται στην ευθεία $(\epsilon): x+y+1=0$, να αποδείξετε ότι το N κινείται σε κύκλο του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα.

4.196 Αν η εικόνα του μιγαδικού z κινείται στον κύκλο $x^2+y^2=4$, να αποδείξετε ότι η εικόνα του μιγαδικού $w = z+\dfrac{4i}{\overline{z}}$ κινείται επίσης σε κύκλο.

4.197 Έστω $z, w \in \mathbb{C}$, με $w \neq 0$, για τους οποίους ισχύει η σχέση:

$$2Im(w) + wRe(z) + iw[1+Im(z)] = 0$$

Να αποδείξετε ότι η εικόνα του z βρίσκεται σε κύκλο με κέντρο O(0,0) και ακτίνα 1.

4.198 Δίνεται ο μιγαδικός $z = \dfrac{1}{2+\sigma\upsilon\nu\theta+i\eta\mu\theta}$, με $\theta \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η εικόνα του z βρίσκεται σε κύκλο του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα

(γ′) **παραβολή**

4.199 Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο του z, όταν:

α) $4(z+\overline{z}) = (z-\overline{z})^2$ β) $[Im(z)]^2 = 2(z+\overline{z})$

γ) $(z-\overline{z})^2 + 4(z+\overline{z}) = 0$ δ) $2z\overline{z} = z^2+\overline{z}^2+8(z+\overline{z})$

4.200 Αν $\lambda \in \mathbb{R}$, να βρείτε το γεωμετρικό τόπο της εικόνας του μιγαδικού z, στις παρακάτω περιπτώσεις:

α) $z = (\lambda+i)^2+1$ β) $z = (\lambda-1)^2+2(1-\lambda)i$

4.201 Αν η εικόνα του μιγαδικού z διαγράφει την παραβολή $y = \alpha x^2$, με $\alpha > 0$, να βρείτε το γεωμετρικό τόπο του μιγαδικού $w = iz$

4.202 Να αποδείξετε ότι οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών $z = \eta\mu\theta + i\sigma\upsilon\nu 2\theta$, με $\theta \in \mathbb{R}$ ανήκουν σε μια παραβολή.

(δ′) **έλλειψη-υπερβολή**

4.203 Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο του z, όταν:

α) $z^2+\overline{z}^2 = 14z\overline{z}-48$ β) $10z\overline{z}-3(z^2+\overline{z}^2) = 16$

γ) $z^2+\overline{z}^2 = z\overline{z}+1$ δ) $Re(z^2+z) = 1+Re(z)$

ε) $z^2-\overline{z}^2 = 8i$ ζ) $2(z+\overline{z})^2+3(z-\overline{z})^2 = 24$

η) $(z^2-1) \in \mathbb{I}$ θ) $z^2 = 1+2iRe(z)\cdot Im(z)$

ι) $z^2+\overline{z}^2+2\alpha(1-i)z\overline{z} = 2i$, με $\alpha \in \mathbb{R}$

4.204 Θεωρούμε τους μιγαδικούς z και $w = 2z-\overline{z}$. Αν $Re(w^2) = 1$, να βρείτε το γεωμετρικό τόπο της εικόνας του z

4.205 Αν $\theta \in \mathbb{R}$, να βρείτε το γεωμετρικό τόπο του z σε κάθε μία από τις παρακάτω περιπτώσεις:
α) $z = 3\eta\mu\theta + 4i\sigma\upsilon\nu\theta$
β) $z = (3 + 4\sigma\upsilon\nu\theta) + (4 + \eta\mu\theta)i$

4.206 Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί:

$$z = x + yi \text{ και } w = 2x + 3 + (3y - 5)i, \text{ με } x, y \in \mathbb{R}$$

Αν ο γεωμετρικός τόπος του w είναι ο κύκλος με κέντρο Κ(3,-5) και ακτίνα 6, να βρείτε το γεωμετρικό τόπο του z

4.207 Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών z, για τους οποίους είναι:
α) $\dfrac{1}{z^2+9} \in \mathbb{I}$ β) $\dfrac{i \cdot \bar{z} + 1}{z - i} \in \mathbb{R}$ γ) $\dfrac{z - 3\bar{z} + 2}{z - 2} \in \mathbb{I}$
δ) $\dfrac{i}{z^2+1} \in \mathbb{R}$ ε) $-\dfrac{1}{2}(z+\bar{z})^2-(z^2+\bar{z}^2)+(z-\bar{z})+16 \in \mathbb{I}$

4.208 Δίνονται οι σταθεροί αριθμοί $\rho > 0$ και $\lambda \in (0, 1)$. Αν η εικόνα του μιγαδικού z διαγράφει τον κύκλο με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα ρ, να βρείτε το γεωμετρικό τόπο της εικόνας του μιγαδικού w για τον οποίο ισχύει $2w = (1 + \lambda)z + (1 - \lambda)\bar{z}$

4.209 Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο της εικόνας του μιγαδικού z σε κάθε μία από τις παρακάτω περιπτώσεις:
α) $z = \epsilon\phi\theta + i\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu\theta}$, με $\theta \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$
β) $z = \sigma\phi\theta + i\dfrac{1}{\eta\mu\theta}$, με $\theta \in (0, \pi)$

4.210 Έστω ο μιγαδικός $z = x + yi$, με $x, y \in \mathbb{R}$ και θεωρούμε τους μιγαδικούς

$$w = x - 1 - \frac{1}{\lambda}(y + 2)i \text{ και } u = -x - 1 + \lambda(y - 2)i$$

Αν το λ μεταβάλλεται στο $\mathbb{R}^*$ και είναι $w = i \cdot \bar{u}$, να αποδείξετε ότι η εικόνα του z βρίσκεται σε υπερβολή.

4.211 Έστω ο μιγαδικός $z = x + yi$, με $x, y \in \mathbb{R}$ και θεωρούμε τους μιγαδικούς

$$w = (\lambda - i)\bar{z} + 3\lambda Re(z) \text{ και } u = \frac{2(1 + \lambda^2)}{1 - \lambda i}$$

Αν το λ μεταβάλλεται στο $\mathbb{R}^*$ και είναι $w = \bar{u}$, να αποδείξετε ότι η εικόνα του z βρίσκεται σε έλλειψη.

4.212 Δίνονται οι μιγαδικοί z, w για τους οποίους ισχύει $3w - (Im(w)) \cdot i = z + 2i$. Αν η εικόνα του z κινείται στην έλλειψη $4x^2 + 9y^2 = 36$, να αποδείξετε ότι η εικόνα του w κινείται σε κύκλο.

4.213 Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί z, w με $w = z + \dfrac{2\rho^2}{z}$, με $\rho > 0$. Αν η εικόνα του μιγαδικού z διαγράφει τον κύκλο με κέντρο $O(0, 0)$ και ακτίνα ρ, να αποδείξετε ότι η εικόνα του w διαγράφει έλλειψη της οποίας να βρείτε την εκκεντρότητα

4.214 Θεωρούμε τον μιγαδικό αριθμό $w = \alpha+\beta i$, με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, η εικόνα του οποίου κινείται στην έλλειψη με εξίσωση:

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$$

Ο μιγαδικός $z = x + yi$, με $x, y \in \mathbb{R}$, συνδέεται με τον w σύμφωνα με τη σχέση:

$$3z + 2Re(z) = 5 + 6i + w$$

Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του z είναι κύκλος με κέντρο το σημείο $K(1, 2)$ και ακτίνα $\rho = 1$.

4.215 Αν $0 < \theta < \pi$ να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των ριζών των παρακάτω εξισώσεων:
α) $z^2 - 10\sigma\upsilon\nu\theta \cdot z - 9\eta\mu^2\theta + 25 = 0$
β) $\eta\mu^2\theta \cdot z^2 - 2\eta\mu\theta \cdot z + 5 - 4\eta\mu^2\theta = 0$
γ) $(\sigma\upsilon\nu^2\theta)z^2 - (\eta\mu 2\theta)z + 2 - \sigma\upsilon\nu^2\theta = 0$
δ) $(\sigma\upsilon\nu^2\theta)z^2 - 2\sigma\upsilon\nu\theta \cdot z + 5 - 4\sigma\upsilon\nu^2\theta = 0$

4.216 Αν η εικόνα του μιγαδικού $z \neq 0$ βρίσκεται στην ευθεία $y = x$, να βρείτε το γεωμετρικό τόπο του μιγαδικού $w = z + \dfrac{1}{z}$

5 Μέτρο μιγαδικού

(α′) ιδιότητες του μέτρου

(i) ορισμός μέτρου-η ιδιότητα $|zw| = |z||w|$

5.217 Να βρείτε το μέτρο των μιγαδικών:
α) $z = (2 - 3i) + (6 - 3i)$ β) $z = (1 - \sqrt{2}i)(3 + \sqrt{3}i)$
γ) $z = (1 - i)^5(\sqrt{5} + \sqrt{3}i)$ δ) $z = \dfrac{-3 + 2i}{(1 - i)^2 - 2 - i}$
ε) $z = \dfrac{4\sqrt{3} - 4i}{1 + \sqrt{3}i}$ ζ) $z = \dfrac{(1 - 2i)^2 + 2 + 3i}{(3 - i)^2 - 7 + 5i}$
η) $z = (3 - 4i)\left(\dfrac{1 - xi}{x - i}\right)^5$, με $x \in \mathbb{R}$

5.218 Δίνονται οι μιγαδικοί $z = 2 - i$ και $w = \sqrt{3} - i$. Να βρείτε τα μέτρα των μιγαδικών zw και $\dfrac{z}{w}$

5.219 Αν $z, w \in \mathbb{C}$ με $Re(z) \cdot Im(w) = Im(z) \cdot Re(w)$, να αποδείξετε ότι $|zw| = |Re(z\overline{w})|$

5.220 Αν $z \in \mathbb{C}$, να αποδείξετε ότι:

$$|Im(z)| = \sqrt{\frac{|z|^2 - Re(z^2)}{2}}$$

5.221 Έστω ο μιγαδικός $z = (1+xi)(x+i) + (1-xi)^2$, με $x \in \mathbb{R}$.
α) Αν $z \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι $x = 1$
β) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ισχύει η σχέση $|z| = 8\sqrt{x^2+1}$

5.222 Έστω $z \in \mathbb{C}$, ώστε $|z| = 1$. Να βρείτε το μέτρο του μιγαδικού $w = \dfrac{z^2(z-i)}{1+zi}$

5.223 Αν $z, w \in \mathbb{C}$ με $w = \dfrac{z}{1+|z|}$, να αποδείξετε ότι $z = \dfrac{w}{1-|w|}$

5.224 Αν $z = 1-i$ και $w = \dfrac{z-2}{z^4}$, να αποδείξετε ότι $4|w| = |z|$

5.225 Να βρείτε μιγαδικό αριθμό z, για τον οποίο ισχύει:
α) $z = |z| - 1 + (|z|-2)i$ β) $z = |\overline{z}| - 1 + |1-2i|i$
γ) $z + |z| = 2 + 8i$

5.226 Να βρείτε τους μιγαδικούς z, w για τους οποίους ισχύουν οι σχέσεις $|z| = |w| = 1, zw \in \mathbb{R}$ και $\dfrac{z}{w} \in \mathbb{I}$

5.227 Έστω $z \in \mathbb{C}^*$ και $w = \dfrac{z+|z|}{\sqrt{2(Re(z)+|z|)}}$. Να αποδείξετε ότι $w^2 = z$

5.228 Να βρείτε τον μιγαδικό $z = x + yi$, με $x, y \in \mathbb{R}^*$, ο οποίος έχει μέτρο 2 και είναι $(x+iy^2)^3 \in \mathbb{I}$

5.229 Αν $z, w \in \mathbb{C}$, να αποδείξετε ότι:

$$|z|^2 \cdot |w|^2 = (Re(z\overline{w}))^2 + (Im(z\overline{w}))^2$$

5.230 Έστω $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ και $w = \dfrac{\alpha z_1 + \beta z_2}{\alpha+\beta}$, με $\alpha, \beta > 0$. Να αποδείξετε ότι $|w - z_1| + |w - z_2| = |z_1 - z_2|$

5.231 Έστω ο μιγαδικός $z_n = \dfrac{(1+i\sqrt{3})^3}{(\sqrt{3}-i)^n}$, με $n \in \mathbb{N}$. Να βρείτε τις τιμές του n για τις οποίες είναι:
α) $|z_n| = 64^{-1}$ β) $z_n \in \mathbb{I}$

5.232 Έστω $z \in \mathbb{C} - \{-1\}$, με $|z| = 1$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε $z = \dfrac{1+\lambda i}{1-\lambda i}$

5.233 Έστω $z, w, u \in \mathbb{C}$, ώστε να είναι:

$$zw + wu + uz = 1 \text{ και } |(z+w)(w+u)(u+z)| = 10$$

Να υπολογίσετε το μέτρο $|(1+z^2)(1+w^2)(1+u^2)|$

5.234 Αν $n \in \mathbb{N}^*$, θεωρούμε τον μιγαδικό:

$$z_n = \left(1 + \frac{i}{\sqrt{1}}\right)\left(1 + \frac{i}{\sqrt{2}}\right)\cdots\left(1 + \frac{i}{\sqrt{n}}\right)$$

Να αποδείξετε ότι $|z_{n+1} - z_n| = 1$

(ii) **εξισώσεις και μέτρα ριζών**

5.235 Δίνεται η εξίσωση $\alpha z^2 + 2\beta z + \alpha = 0$, με $\alpha > \beta > 0$.
α) Να βρείτε τις ρίζες z_1, z_2 της παραπάνω εξίσωσης
β) Να αποδείξετε ότι $|z_1| = |z_2| = 1$

5.236 Δίνεται η εξίσωση $z^2 - (2\epsilon\phi\theta)z + 1 = 0$, όπου $\theta \in \left(0, \dfrac{\pi}{4}\right)$. Αν οι ρίζες z_1, z_2 της εξίσωσης αυτής επαληθεύουν τη σχέση

$$|z_1 + z_2| = \frac{|z_1| + |z_2|}{\sqrt{3}}$$

να βρείτε την τιμή του θ και τις ρίζες z_1, z_2.

5.237 Έστω $\alpha \in [-2, 2]$ και οι μη μηδενικοί μιγαδικοί z, w ώστε $z^2 - \alpha zw + w^2 = 0$. Να αποδείξετε ότι $|z| = |w|$

(iii) **εξισώσεις και μέτρο μιγαδικού**

5.238 Να λύσετε τις εξισώσεις:
α) $|z+i-2| = -2iz$ β) $|z-2| = z$ γ) $|z-1| = z-i$
δ) $z+2\overline{z} = |z+2|$ ε) $|z|^2 = \overline{z}+1-i$ ζ) $|z|+z = 2+i$
η) $|z|^2 - 2z + 2i = 0$ θ) $|z-i| = 2z$ ι) $|\overline{z}-2| = -z$
κ) $z + |z+i| = 8 + 3i$ λ) $3z - |z+1+3i| = 1+3i$
μ) $z^2 - 2iz + |z| = 6$ ν) $|z|^2 - 2(z-\overline{z}) = 2(5-6i)$

5.239 Να λύσετε τις εξισώσεις:
α) $4z^2 + 8|z|^2 = 8$ β) $z^2 + z + |z+1| = 0$
γ) $|z| - z = 1 + 2i$ δ) $|z|^2 - 3z + 2\overline{z} = 21 + 15i$
ε) $z + |z-9-6i| = 17 + 2i$ ζ) $2z - |z| = 1 - 8i$
η) $z^2 + 2|z| - 8z + 15 = 0$ θ) $z^2 + z + |z+1| = 0$
ι) $z^2 + |z| = 0$ κ) $3(z-\overline{z}) + 2|z|^2 = 26 + 12i$

5.240 Να βρείτε τους μιγαδικούς z για τους οποίους ι- σχύει η σχέση:

$$|z-1-2i| + |z-2|i = |z+1-3i|i + 2\sqrt{2}$$

5.241 Αν $\alpha \in \mathbb{R}$, να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:
α) $|z|^2 - \alpha z - 1 + \alpha i = 0$ β) $z^2 - 3|z| + \alpha^2 = 0$
γ) $4|z-1|^2 - 4\alpha iz + 1 + 4\alpha i = 0$

5.242 Να βρείτε τους μιγαδικούς z με $|z|=1$ και ο αριθμός $w=(z+\bar{z})(1-i)^n+i(\bar{z}-z)(1+i)^n$, με $n\in\mathbb{Z}$ να είναι πραγματικός

5.243 Να βρείτε τον μιγαδικό z, σε κάθε μία από τις παρακάτω περιπτώσεις:
α) $Re(iz)=0$ και $|z+i|=2$
β) $z=i\cdot\bar{z}$ και $|z+1|=|z|$
γ) $|z|+|i\cdot\bar{z}|=2$ και $Re(z^2)=1$
δ) $|z+2\bar{z}|=\sqrt{10}$ και $|z|^2+Re(z^2)=2Im(z)$
ε) $|z|=1$ και $|z^2+\bar{z}^2|=1$
ζ) $|z|=1$ και $|z^2+\bar{z}^2+z^2\bar{z}+z\bar{z}^2-4|=6$
η) $(i|z|-3i)(z^2-z)=3i+z^3-z^2+z-i|z|$ και επίσης $z^{2012}+z^{1000}+1=0$

5.244 Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:
α) $z^2=4z+|z|^2+\dfrac{16}{|z|^3}$ β) $\dfrac{\bar{z}}{z}+\dfrac{z}{\bar{z}}=\dfrac{z}{|z|}+\dfrac{|z|}{z}$
γ) $z^2+2+i=(1+i)|z|$ δ) $|z^2+4|^2+6|z+2|^2=30$
ε) $8z^3+12z|z|^2+6\bar{z}|z|^2+\bar{z}^3-8=0$
ζ) $2014(z-i)^2(\bar{z}+i)-2013(\bar{z}+i)^2(z-i)=1$

5.245 Έστω $z,w\in\mathbb{C}^*$, για τους οποίους ισχύουν οι σχέσεις:

$$\left(z+\frac{1}{z}\right)\left(|w|+\frac{1}{|w|}\right)=4 \text{ και } |w|<1$$

Να αποδείξετε ότι $|z|=1$

(iv) $\boldsymbol{|z|^2=z\bar{z}}$

5.246 Αν $z\in\mathbb{C}^*$, να αποδείξετε ότι:
α) $\dfrac{z}{|z|}+\dfrac{|z|}{z}\in\mathbb{R}$ β) $\dfrac{z}{|z|}-\dfrac{|z|}{z}\in\mathbb{I}$

5.247 Αν $z_1,z_2,z_3\in\mathbb{C}$ ώστε $|z_1|=|z_2|=|z_3|=1$ και $z_1+z_2+z_3=1$, να αποδείξετε ότι $\dfrac{1}{z_1}+\dfrac{1}{z_2}+\dfrac{1}{z_3}=1$

5.248 Έστω ο μιγαδικός z. Να αποδείξετε ότι:
α) $|z-i|=|z+i|\Leftrightarrow z\in\mathbb{R}$ β) $|1-iz|=|1+iz|\Leftrightarrow z\in\mathbb{R}$

5.249 Αν $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ και $\alpha\neq\beta$, να αποδείξετε ότι:

$$|z-\alpha i|=|z-\beta i|\Leftrightarrow Im(z)=\frac{\alpha+\beta}{2}$$

5.250 Αν $z\in\mathbb{C}$, με $|z|=2$, να υπολογίσετε την παράσταση $|iz+2|^2+|2i-\bar{z}|^2$

5.251 Έστω $z\in\mathbb{C}^*$. Να αποδείξετε ότι:

$$z^2-2iz-|z|^2=0\Leftrightarrow Im(z)=1$$

5.252 Αν $z\in\mathbb{C}$, να αποδείξετε ότι:
α) $|z+i\cdot\bar{z}|^2=2|z|^2+2Im(z^2)$
β) $|z-3i|^2-|z+i|^2=8-Re(8i\cdot\bar{z})$

5.253 Αν $z,w\in\mathbb{C}$, να αποδείξετε ότι:

$$|zw|-Re(zw)=\frac{|z-\overline{w}|^2-(|z|-|w|)^2}{2}$$

5.254 Έστω οι μιγαδικοί z,w με $w\neq 0$. Να αποδείξετε ότι:
α) αν $|z+w|^2=|z|^2+|w|^2$, τότε $\dfrac{z}{w}\in\mathbb{I}$
β) αν $|z+w|=|z-w|$, τότε $\dfrac{z}{w}\in\mathbb{I}$
γ) αν $|z+w|=|z|+|w|$, τότε $\dfrac{z}{w}\geq 0$
δ) αν $|z+iw|=|z|+|w|$, τότε $\left(\dfrac{z}{w}\right)^2\leq 0$

5.255 Αν $z,w\in\mathbb{C}$ με $|z|=3,|w|=4$ και $|z-w|=5$, να αποδείξετε ότι $16z^2+9w^2=0$

5.256 Αν $z\in\mathbb{C}$ με $|z|=1$, να αποδείξετε ότι:

$$|1+z^2|=|2-|1-z|^2|$$

5.257 Θεωρούμε τους μιγαδικούς z,w
α) Να αποδείξετε ότι:

$$|z+w|^2+|z-w|^2=2(|z|^2+|w|^2)$$

β) Να αποδείξετε τις παρακάτω προτάσεις:
ι) αν $|z+w|=\sqrt{3}$ και $|z|=|w|=1$, τότε $|z-w|=1$
ιι) αν $a=|z|+|w|+i(|z|-|w|)$ και $b=|z+w|+i|z-w|$, τότε $|a|=|b|$
ιιι) αν $|z-2i|=1$ και $|z|=2$, τότε $|z+2i|=\sqrt{15}$
ιv) αν $|z-w|=|z|=|w|$, τότε $|z+w|=\sqrt{3}|z|$
v) $|z+w|=\sqrt{2}|z|\Leftrightarrow|z-w|=\sqrt{2}|w|$
vι) αν $|z-2|=|w-2|=2$ και $|z-w|=4$, τότε $|z+w|=4$
vιι) αν $\lambda\in\mathbb{R}^*$ και $w\neq 0$, τότε είναι:

$$\lambda^4\left|\frac{z}{\lambda^2}+w\right|^2+|z-\lambda^2w|^2=2|w|^2\cdot\left(\left|\frac{z}{w}\right|^2+\lambda^4\right)$$

vιιι) αν είναι $a=\sqrt[3]{|z^3+3z^2i-i-3z|^2}$ και είναι $b=\sqrt[3]{|z^3-3z^2i-i^3-3z|^2}$, τότε $a+b=2(|z|^2+1)$

5.258 Αν $z,w\in\mathbb{C}$ και $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι:

$$|\alpha z+\beta w|^2+|\beta z-\alpha w|^2=(\alpha^2+\beta^2)(|z|^2+|w|^2)$$

5.259 Να αποδείξετε τις παρακάτω προτάσεις:
α) αν $z \in \mathbb{C}$, τότε $(1+z)(1-\bar{z}) \in \mathbb{I} \Leftrightarrow |z| = 1$
β) αν $z \neq -i$, τότε $\dfrac{z-i}{z+i} \in \mathbb{I} \Leftrightarrow |z| = 1$
γ) αν $z \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$, τότε $\dfrac{(1+z)(1-\bar{z})}{z-\bar{z}} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow |z| = 1$
δ) αν $z \neq 1$, τότε $\dfrac{z-i}{z-1} \in \mathbb{I} \Leftrightarrow |2z-1-i| = \sqrt{2}$

5.260 Έστω $z, w \in \mathbb{C}$, Να αποδείξετε ότι:
α) αν $z \neq w$, τότε $\dfrac{i(z+w)}{z-w} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow |z| = |w|$
β) αν $z \neq \overline{w}$, τότε $\dfrac{z+\overline{w}}{z-\overline{w}} \in \mathbb{I} \Leftrightarrow |z| = |w|$
γ) αν $w \neq 1$, τότε $\dfrac{z-\bar{z}w}{1-w} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$ ή $|w| = 1$

5.261 Αν $z, w \in \mathbb{C}$, με $|z| = |w| = 1$, να αποδείξετε ότι:
α) $\dfrac{(z-w)^2}{zw} \leq 0$ β) $\dfrac{u + zw\overline{u} - (z+w)}{z-w} \in \mathbb{I}$, με $u \in \mathbb{C}$

5.262 Αν $z \in \mathbb{C}$, να αποδείξετε ότι:
α) αν $|z+8| = 2|z+2|$, τότε $|z| = 4$
β) αν $|z-2| = |2z-1|$, τότε $|z| = 1$
γ) αν $|z-8i| = 2|2z-i|$, τότε $|z| = 2$
δ) αν $|2z-i| = |iz+2|$, τότε $|z| = 1$
ε) αν $|\lambda z-1| = |z-\lambda|$, με $\lambda \in \mathbb{R} - \{-1, 1\}$, τότε $|z| = 1$
ζ) αν $|z+9+3i| = |3z+3+i|$, τότε $|z| = \sqrt{10}$

5.263 Αν $z \in \mathbb{C}$, να αποδείξετε ότι:
α) αν $|z-10| = 3|z-2|$, τότε $|z-1| = 3$
β) αν $|z+3| = 2|z-3|$, τότε $|z-5| = 4$
γ) αν $|z-i| = 2|z+i|$, τότε $|3z+5i| = 4$
δ) αν $|z+1-2i| = |2\bar{z}+2+i|$, τότε $|z+1| = 1$

5.264 Αν $z, w \in \mathbb{C}$, να αποδείξετε ότι $\dfrac{z|w| - w|z|}{zw + |zw|} \in \mathbb{I}$

5.265 Έστω $z, w \in \mathbb{C}$. Να αποδείξετε ότι:
α) $|z+w|^2 = |z|^2 + |w|^2 + 2Re(z\overline{w})$
β) $|z+w|^2 - |z-w|^2 = 4Re(z\overline{w})$
γ) $|z\overline{w}-1|^2 - |z-w|^2 = (|z|^2-1)(|w|^2-1)$
δ) $(|z|+|w|)^2 - |z+w|^2 = 2(|zw| - Re(z\overline{w}))$

5.266 Άν $z, w \in \mathbb{C}$, με $z \neq w$, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{z+w}{z-w} = \frac{|z|^2 - |w|^2}{|z-w|^2} + i\frac{z\overline{w} - \bar{z}w}{|z-w|^2}$$

5.267 Έστω $z \in \mathbb{C}$ ώστε $|z^2 - 2iz - 1| + |z^2 + 2iz - 1| = 2|z^2+1|$. Να αποδείξετε ότι: α) $|z-i| = |z+i|$ β) $z \in \mathbb{R}$

5.268 Έστω οι μιγαδικοί z, w με $|w| \neq 1$ και θεωρούμε τον μιγαδικό

$$u = (\sigma\upsilon\nu\theta + i\eta\mu\theta)\frac{z-w}{1-z\overline{w}}, \text{ με } \theta \in \mathbb{R}$$

Να αποδείξετε ότι $|u| = 1 \Leftrightarrow |z| = 1$

5.269 Έστω οι μη μηδενικοί μιγαδικοί αριθμοί z_1, z_2, z_3, οι οποίοι ικανοποιούν τις σχέσεις:

$$z_1 + z_3 \neq 0 \text{ και } |z_1 + z_2 + z_3| = |z_2 + z_3| = |z_1|$$

Να βρείτε τις τιμές του μιγαδικού $\dfrac{z_1}{z_2 + z_3}$

5.270 Αν $z, w \in \mathbb{C}$, με $|z| = |w| = \rho > 0$ να αποδείξετε ότι:
α) $(z+w)\left(\dfrac{1}{z} + \dfrac{1}{w}\right) \in \mathbb{R}$ β) $\dfrac{z+w}{\rho^2 + zw} \in \mathbb{R}$
γ) $\left(\dfrac{z+w}{z-w}\right)^2 \in \mathbb{R}$, με $z \neq w$ δ) $\dfrac{z^3 + w^3}{(z-w)^3} \in \mathbb{I}$, με $z \neq w$

5.271 Έστω $z, w \in \mathbb{C}$ με $z + w \neq 0, zw \notin \mathbb{R}$ και $|z| = |w| = \rho$. Να βρείτε την τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε να είναι $\dfrac{z+w}{\lambda + zw} \in \mathbb{R}$

5.272 Έστω $z, w, u \in \mathbb{C}$ ώστε να είναι:

$$|z+u-w|^2 + |z-u+w|^2 = 2|z|^2$$

Να αποδείξετε ότι $u = w$

5.273 Δίνονται οι μιγαδικοί z και w, με $w \neq 0$. Να αποδείξετε ότι:
α) $Re\left(\dfrac{z}{w}\right) = \dfrac{Re(z\overline{w})}{|w|^2}$ β) $Im\left(\dfrac{z}{w}\right) = \dfrac{Im(z\overline{w})}{|w|^2}$

5.274 Να βρείτε τους μιγαδικούς z, για τους οποίους ισχύουν οι σχέσεις:
α) $|z-1| = |z-i| = |z-2|$ β) $|z| = |z|^2 = |1-z|$
γ) $|z-1| = |z+i|$ και $|z-2| = 2|z+3|$
δ) $|z+i| = |z+5-4i|$ και $|z-6i| = |z|$
ε) $|z| = \dfrac{2}{|z|} = |z-2|$ ζ) $|z| = 1$ και $\left|z - \dfrac{1+i}{\sqrt{2}}\right| = 2$
η) $|z| = \left|\dfrac{1+i\sqrt{3}}{iz}\right| = |2-z|$

5.275 Αν $z, w \in \mathbb{C}$, να αποδείξετε τις παρακάτω προτάσεις:
α) $|z+\overline{w}| = |z-\overline{w}| \Leftrightarrow zw \in \mathbb{I}$
β) $|1-z\overline{w}| = |z-w| \Leftrightarrow |z| = 1$ ή $|w| = 1$
γ) $|z-2|^2 + |z+2|^2 = 10 \Leftrightarrow |z| = 1$
δ) $|z+w|^2 = 2\bar{z}w \Leftrightarrow |z-w|^2 = -2z\overline{w}$
ε) $|z|^2 + |w|^2 = |z-w|^2 \Leftrightarrow |z+w| = |z-w|$
ζ) $|z+w| = |z| + |w| \Leftrightarrow |z-w| = ||z| - |w||$
η) $\dfrac{z}{w} + \dfrac{w}{z} \in \mathbb{I} \Leftrightarrow |z + \alpha w| = |z - \alpha w|$, με $\alpha \in \mathbb{R}^*$

5.276 Αν $z, w, u \in \mathbb{C}$, να αποδείξετε ότι:

$$|z-w|^2 + |z-u|^2 = 2\left|z - \frac{u+w}{2}\right|^2 + \frac{|u-w|^2}{2}$$

5.277 Έστω $z,w \in \mathbb{C}$, ώστε $|z|=|w|=1$. Να αποδείξετε ότι:

$$\left|z+\frac{z}{w}\right|^2+\left|z-\frac{z}{w}\right|^2=4$$

5.278 Αν $z,w \in \mathbb{C}^*$, να αποδείξετε ότι:

$$\left|\frac{|w|}{|z|}z+\frac{|z|}{|w|}w\right|=|z+w|$$

5.279 Έστω οι μιγαδικοί z,w. Να αποδείξετε ότι:
α) $|1+z\overline{w}|^2+|z-w|^2=(1+|z|^2)(1+|w|^2)$
β) αν $|z-w|=\sqrt{(1+|z|^2)(1+|w|^2)}$, τότε $z\overline{w}=-1$

5.280 Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί z,w με $z \neq w$ και ο μιγαδικός $u=\dfrac{z+w}{z-w}$. Να αποδείξετε ότι:
α) αν $z\overline{w} \in \mathbb{R}$, τότε $u \in \mathbb{R}$ β) αν $|z|=|w|$, τότε $u \in \mathbb{I}$

5.281 Έστω $z,w \in \mathbb{C}$ με $z \neq iw$ και $w \neq 0$. Αν ισχύει $|z^2+w^2|=|z^2-2izw-w^2|$, να αποδείξετε ότι $\dfrac{z}{w} \in \mathbb{R}$

5.282 Αν $z \in \mathbb{C}$, να αποδείξετε ότι:

$$|z+|z||+|z-|z||=2|z| \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$$

5.283 Έστω $z \in \mathbb{C}$, ώστε $|z+i|+|z-i|=\sqrt{2}(|z|+1)$. Να αποδείξετε ότι $\left|z+\dfrac{1}{z}\right|=2$

5.284 Να βρείτε τους μιγαδικούς z για τους οποίους ισχύουν οι σχέσεις $|z-3|+|z+3|=10$ και $|z|=4$

5.285 Έστω $z \in \mathbb{C}$, ώστε $|z-1|=\sqrt{3}$ και $|z|=1$. Να αποδείξετε ότι: α) $z^2+z+1=0$ β) $z^{2013}=1$

5.286 Αν $z \in \mathbb{C}$, ώστε $|z+i|+|z-i|=|z+1|+|z-1|$, να αποδείξετε ότι $|Re(z)|=|Im(z)|$

5.287 Αν $z \in \mathbb{C}$ με $z \notin \mathbb{R}$ και ο αριθμός $w=\dfrac{1+z+z^2}{1-z+z^2}$ είναι πραγματικός, να αποδείξετε ότι $|z|=1$.

5.288 Θεωρούμε τους μιγαδικούς z και $w=\dfrac{1-iz+z^2}{1+iz+z^2}$. Να αποδείξετε ότι: $|w|=1 \Leftrightarrow |z|=1$ ή $z \in \mathbb{R}$

5.289 Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(z)=z+\dfrac{1}{z}$, όπου $z \in \mathbb{C}^*$. Να αποδείξετε ότι:
α) $f(z) \in \mathbb{I} \Leftrightarrow z \in \mathbb{I}$ β) $f\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right) \in \mathbb{I} \Leftrightarrow |z_1+z_2|=|z_1-z_2|$

5.290 Έστω $a,b,c \in \mathbb{C}$ με $|a|=|b|=|c|=1$. Να αποδείξετε ότι:
α) ο αριθμός $u=\dfrac{a+b}{c}+\dfrac{b+c}{a}+\dfrac{c+a}{b}$ είναι πραγματικός
β) ο αριθμός $v=\dfrac{a-b}{c}+\dfrac{b-c}{a}+\dfrac{c-a}{b}$ είναι φανταστικός
γ) αν επιπλέον είναι $a+b+c=0$, να αποδείξετε ότι

$$Re\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)=-\frac{3}{2}$$

5.291 Έστω $z_1,z_2,z_3 \in \mathbb{C}$, για τους οποίους ισχύουν οι σχέσεις:

$$|z_1|=|z_2|=|z_3|=1 \text{ και } \frac{1+z_1z_2z_3}{z_1+z_2+z_3} \in \mathbb{R}$$

Να αποδείξετε ότι $z_1z_2z_3=-1$ ή $z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1=z_1+z_2+z_3$

5.292 Έστω $z,w \in \mathbb{R}$, ώστε $zw=1$. Να αποδείξετε ότι:

$$\left|\frac{z-w}{2}+i\right|+\left|\frac{z-w}{2}-i\right|=|z|+|w|$$

5.293 Έστω $z,w,u \in \mathbb{C}$, ώστε $z^2=wu$. Να αποδείξετε ότι:

$$|w+u+2z|+|w+u-2z|=2|w|+2|u|$$

5.294 Έστω $z,w,u \in \mathbb{C}$, ώστε $w^2=z^2-u^2$. Να αποδείξετε ότι:

$$|z-w|+|z+w|=|z-u|+|z+u|$$

5.295 Δίνονται οι μιγαδικοί $z_1,z_2,...,z_n$ ώστε να είναι:

$$|z_1|=|z_2|=\cdots=|z_n|=\rho>0$$

Να αποδείξετε ότι ο αριθμός

$$w=(z_1+\overline{z_2})(z_2+\overline{z_3})\cdots(z_{n-1}+\overline{z_n})(z_n+\overline{z_1})$$

είναι πραγματικός

5.296 Έστω οι μη μηδενικοί μιγαδικοί $z_1,z_2,z_3,...,z_n$, οι οποίοι έχουν ίσα μέτρα. Να αποδείξετε ότι

$$\left(1+\frac{z_2}{z_1}\right)\left(1+\frac{z_3}{z_2}\right)\cdots\left(1+\frac{z_n}{z_{n-1}}\right)\left(1+\frac{z_1}{z_n}\right) \in \mathbb{R}$$

5.297 Έστω $z,w \in \mathbb{C}$, με $|z|=|w|$ και $|z+w|=|z|+|w|$. Να αποδείξετε ότι $z=w$.

5.298 Να βρείτε τους μιγαδικούς z,w για τους οποίους ισχύουν οι σχέσεις:
α) $z+w+2zw=1$ και $|z|=|w|=1$
β) $z+w+1=zw$ και $|z|=|w|=1$

5.299 Αν $z, w, u \in \mathbb{C}$, να αποδείξετε ότι:
α) $|z-w|^2+|w-u|^2+|u-z|^2+|z+w+u|^2 =$
$= 3(|z|^2+|w|^2+|u|^2)$
β) $|z+w|^2+|w+u|^2+|u+z|^2 = |z|^2+|w|^2+|u|^2+|z+w+u|^2$
γ) $|z+w+u|^2+|-z+w+u|^2+|z-w+u|^2+|z+w-u|^2 =$
$= 4(|z|^2+|w|^2+|u|^2)$

5.300 Έστω $z, w \in \mathbb{C}$, ώστε $|z^2-w^2| = 2|zw|$. Να αποδείξετε ότι:

$$||z+w|-|z-w|| = 2\sqrt{2}||z|-|w||$$

5.301 Έστω οι $z, w \in \mathbb{C}^*$, ώστε να είναι $|z| = |w| = |z+w|$
α) Να αποδείξετε ότι $z^3 - w^3 = 0$
β) Να υπολογίσετε τον μιγαδικό $\dfrac{z}{w}$

5.302 Έστω $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n > 0$ και $z \in \mathbb{C}$ ώστε να είναι:

$$\frac{\alpha_1}{z+\alpha_1}+\frac{\alpha_2}{z+\alpha_2}+\cdots+\frac{\alpha_n}{z+\alpha_n} = 0$$

Να αποδείξετε ότι $z \in \mathbb{R}$

5.303 Να βρείτε τους μιγαδικούς z, w για τους οποίους ισχύουν: $|z| = |w| = 1$ και $|z+w+2| = |zw-1|$

5.304 Αν Α, Β είναι οι εικόνες των μιγαδικών z, w και είναι $|z| = |w|$ και $A\widehat{O}B = 45^0$, να αποδείξετε ότι $z^2+w^2 = \sqrt{2}zw$

(v) $|z| = |\bar{z}|$

5.305 Αν $z \in \mathbb{C}$ με $|i-z|+|\bar{z}+i| = 2$, να αποδείξετε ότι $|z-i| = 1$

5.306 Αν $z \in \mathbb{C}$, να αποδείξετε ότι:
α) $|\bar{z}^2+i| = |i-z^2|$ β) $|z+|z|^2| = |z^2+z|$

5.307 Αν $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ ώστε να είναι $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$ και $z_1+z_2+z_3 = 4i$, να υπολογίσετε το μέτρο του μιγαδικού $w = \dfrac{1}{z_1}+\dfrac{1}{z_2}+\dfrac{1}{z_3}$

5.308 Αν $z, w \in \mathbb{C}$, με $|z| = |w| = 1$ και $\alpha \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι $|zw+\alpha| = |\alpha zw+1|$

5.309 Αν $z, w \in \mathbb{C}$, με $|z| = |w| = 1$, να αποδείξετε ότι $|z+w+zw-1| = |z+w-zw+1|$

5.310 Αν $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 2$ και $|z_1+z_2+z_3| = 4$, να αποδείξετε ότι $|z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1| = 8$.

5.311 Αν $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$, ώστε $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$, να αποδείξετε ότι $|z_1+z_2+z_3| = |z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1|$

5.312 Έστω $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$, ώστε να ισχύουν:

$$z_1+z_2+z_3 = \frac{3}{2} \text{ και } |z_1-1| = |z_2-1| = |z_3-1| = 3$$

Να αποδείξετε ότι $|z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1| = 3|z_1+z_2+z_3-3|$

(vi) **Αν $z = w$, τότε $|z| = |w|$**

5.313 Αν $z \in \mathbb{C}$, με $8+z^2 = (\sqrt{3}z^2-6)i$, να βρείτε το μέτρο του μιγαδικού z

5.314 Αν $z \in \mathbb{C}$ με $z^4+(z-1)^4 = 0$, να αποδείξετε ότι $Re(z) = \dfrac{1}{2}$

5.315 Αν $z \in \mathbb{C}$, ώστε $(z-2)^n = (z+2)^n$, με $n \in \mathbb{N}^*$, να αποδείξετε ότι $z \in \mathbb{I}$

5.316 Να βρείτε τις τιμές του $n \in \mathbb{N}$, σε κάθε μία από τις παρακάτω περιπτώσεις:
α) $(1+i)^n = 16$ β) $-8i(1+i)^n = (\sqrt{3}-i)^n$
γ) $(\sqrt{3}-i)^n = -8i$ δ) $(2i)^n+(-2i)^n = -2048$
ε) $(1+2i)^n = -3+4i$ ζ) $\alpha+\beta i^n = 0$, με $\alpha, \beta > 0$
η) $(\alpha+\beta i)^{2n} = (\beta+\alpha i)^{n+1}$, όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^*$
θ) $n(2+3i)^n+(3-2i)^n+(-3+2i)^n = 0$

5.317 Να βρείτε τον θετικό αριθμό α και τις τιμές του $n \in \mathbb{N}^*$, ώστε να ισχύει $(1+\alpha i)^n = 2^n$

5.318 Αν $z \in \mathbb{C}-\{i\}$ και $n \in \mathbb{N}^*$ με $\left(\dfrac{z-3i}{iz+1}\right)^n = \dfrac{1-i\sqrt{3}}{2}$, να αποδείξετε ότι $Im(z) = 2$

5.319 Αν $z, w \in \mathbb{C}^*$ με $\dfrac{z}{w}-\dfrac{w}{z} = i$, να αποδείξετε ότι $|z| = |w|$

5.320 Έστω $z, w \in \mathbb{C}$ με $(z-w)^2+w^2 = 0$. Να αποδείξετε ότι:
α) $Re(\bar{z}w) = \dfrac{|w|^2}{2}$ β) $|w| = \sqrt{2}|z|$

5.321 Έστω $z, w \in \mathbb{C}$ ώστε $z^{20}+w^{20} = 0$. Να αποδείξετε ότι:
α) $|z| = |w|$ β) αν $w \neq 0$, τότε $\left(\dfrac{z}{w}\right)^{30} \in \mathbb{I}$

5.322 Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω εξισώσεις, δεν έχουν πραγματικές ρίζες:
α) $(1+iz)^7 = (z+i)^5$
β) $(1+iz)^n = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}+i}$, με $n \in \mathbb{N}^*$
γ) $(1+iz)^{2\kappa+1} = (i+z)^{2\lambda+1}$, με $\kappa, \lambda \in \mathbb{N}^*$ και $\kappa \neq \lambda$,

5.323 Αν $z \in \mathbb{C}$, ώστε $5(z+i)^n = (4+3i)(1+iz)^n$, με $n \in \mathbb{N}^*$, να αποδείξετε ότι $z \in \mathbb{R}$

5.324 Έστω z_1, z_2 οι ρίζες της εξίσωσης $\alpha z^2+\beta z+\gamma = 0$, με $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ και $\alpha\gamma > \beta^2$. Να αποδείξετε ότι:
α) $z_1, z_2 \notin \mathbb{R}$
β) αν $(w-z_1)^n = (w-z_2)^n$, με $n \in \mathbb{N}$ και $n > 1$, τότε $w \in \mathbb{R}$

5.325 Έστω ο μιγαδικός $z = x + yi$, με $x, y \in \mathbb{R}$, για τον οποίο ισχύει $(z-1)^{22} = (z-i)^{22}$. Να αποδείξετε ότι:
α) $x = y$ β) $z^{22} \in \mathbb{I}$

5.326 Έστω $z \in \mathbb{C}$ με $(1+z)^{2n} + (1-z)^{2n} = (1-z^2)^n$, όπου $n \in \mathbb{N}$ και $n \geq 2$. Να αποδείξετε ότι $|1-z| = |1+z|$

5.327 Έστω ο μιγαδικός $z \neq -i$ για τον οποίο ισχύει $(z+i)^3 + 2i(\overline{z}-i)^2 = 0$. Να αποδείξετε ότι:
α) $|z+i| = 2$ β) $\dfrac{(z+i)^2+4}{z+i} \in \mathbb{R}$

5.328 Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί $\alpha, \beta \neq 0$ και ο μιγαδικός αριθμός z ώστε να ισχύει η σχέση:

$$\left(\frac{z-i}{z+i}\right)^n = \frac{\alpha+\beta i}{\alpha-\beta i}, \text{ όπου } n \in \mathbb{N}^*$$

Να αποδείξετε ότι: α) $|z-i| = |z+i|$ β) $z \in \mathbb{R}$

5.329 Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:
α) $z^3 = |z|$ β) $z^3 - |z| - 6 = 0$ γ) $2z^3 = |z| + 1$
δ) $z^3 = \overline{z}$ ε) $z^3 = \overline{z}|z|$ ζ) $2z^6 = |z| + 1$

5.330 Δίνεται ο μιγαδικός z και ο θετικός ακέραιος n για τους οποίους ισχύουν οι σχέσεις:

$$z^n = 1 \text{ και } (z+1)^n = 1$$

Να αποδείξετε ότι:
α) $|z| = |z+1| = 1$ β) $z^2 + z + 1 = 0$

5.331 Αν $z \in \mathbb{C}$, με $\overline{z}^{14} = 27z^{11}$, να αποδείξετε ότι $z^{25} \in \mathbb{R}$

5.332 Αν $z \in \mathbb{C}$, με $[(1-2i)z]^7 = (z+2)^7$, να αποδείξετε ότι: α) $\sqrt{5}|z| = |z+2|$ β) $|2z-1| = \sqrt{5}$

5.333 Έστω $z \in \mathbb{C}$, με $z^{100} + iz^{99} - iz + 1 = 0$. Να αποδείξετε ότι $|z| = 1$

5.334 Έστω $z, w \in \mathbb{C}$, με $z^2 + zw + w^2 = 0$. Να αποδείξετε ότι $|z+w| = |z| = |w|$

5.335 Έστω $z \in \mathbb{C}$, ώστε $1 + 2z + 2^2z^2 + \cdots + 2^nz^n = 0$, με $n \in \mathbb{N}^*$. Να αποδείξετε ότι $(1+2z)(1-2\overline{z}) \in \mathbb{I}$

(vii) **μέτρο και συστήματα**

5.336 Έστω οι μιγαδικοί z, w για τους οποίους ισχύουν οι σχέσεις:

$$z + \frac{20i}{w} = 5 + i \text{ και } w + \frac{12i}{z} = -4 + 10i$$

Να βρείτε τις τιμές του $|zw|$

5.337 Έστω $z_1, z_2 \in \mathbb{C}^*$ με $|z_1| = |z_2|$. Να βρείτε τους μιγαδικούς x, y για τους οποίους ισχύουν οι σχέσεις $xy = z_1$ και $x\overline{y} = z_2$

(β′) **Μέτρο διαφοράς**

(i) **απόσταση σημείων**

5.338 Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί:

$$z = \frac{\lambda - 8i}{(3+4i)^4} \text{ και } w = \frac{\lambda + 17i}{(4-3i)^4}, \text{ με } \lambda \in \mathbb{R}$$

Να βρείτε την απόσταση των εικόνων τους στο μιγαδικό επίπεδο

(ii) **ισοσκελές τρίγωνο**

5.339 Έστω ότι Α, Β, Γ είναι οι εικόνες των μιγαδικών $z_1 = 1 + 3i, z_2 = 3 - 3i$ και $z_3 = 1 - 9i$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.

5.340 Έστω οι μιγαδικοί $z \neq 0$ και $w = t(\sqrt{3} - 1)z$, με $t \in \mathbb{R}^*$. Να βρείτε την τιμή του t για την οποία το τρίγωνο ΟΑΒ να είναι ισοσκελές, με ΟΑ=ΟΒ

5.341 Να αποδείξετε ότι οι εικόνες των ριζών της εξίσωσης $z^2 - 5(1+i)z + 13i = 0$ και η αρχή των αξόνων σχηματίζουν ισοσκελές τρίγωνο

5.342 Έστω $z, w \in \mathbb{C}^*$, ώστε να είναι $\dfrac{2z}{w} + \dfrac{w}{z} = 2$. Να αποδείξετε ότι:
α) οι εικόνες των z, w και η αρχή Ο των αξόνων σχηματίζουν ισοσκελές τρίγωνο
β) $|z| = \dfrac{\sqrt{2}}{2}|w|$

5.343 Για τους μιγαδικούς a, b, c ισχύει:

$$c = za + (1-z)b, \text{ με } a \neq b \text{ και } z = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Να αποδείξετε ότι οι εικόνες των a, b, c είναι κορυφές ισοσκελούς τριγώνου.

5.344 Έστω $\phi \in \mathbb{R}$ και θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς:

$$z_1 = \sigma\upsilon\nu\phi + i(1 + \eta\mu\phi) \text{ και } z_2 = (1 + \eta\mu\phi) + i\sigma\upsilon\nu\phi$$

Αν Α, Β είναι αντίστοιχα οι εικόνες των z_1, z_2 να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΟΑΒ είναι ισοσκελές.

5.345 Αν $z \in \mathbb{C}$ με $z \notin \mathbb{R}$ και $z \notin \mathbb{I}$, να αποδείξετε ότι οι εικόνες των μιγαδικών $z, \overline{z}, \dfrac{z^2}{\overline{z}}$ είναι κορυφές ισοσκελούς τριγώνου

5.346 Οι μιγαδικοί αριθμοί a, b, c είναι διαφορετικοί μεταξύ τους ανά δύο και ικανοποιούν τις σχέσεις $a + b + c = 0$ και $|b| = |c|$. Να αποδείξετε ότι οι εικόνες των a, b, c είναι κορυφές ισοσκελούς τριγώνου

5.347 Έστω Α,Β,Γ οι εικόνες των μιγαδικών α, β, γ αντίστοιχα. Αν τα σημεία Α,Β,Γ είναι διαφορετικά μεταξύ τους ανά δύο και δεν είναι συνευθειακά, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές αν και μόνο αν $Re[(\beta + \gamma - 2\alpha)(\overline{\beta} - \overline{\gamma})] = 0$

5.348 Έστω Α,Β,Γ οι εικόνες των μιγαδικών α, β, γ αντίστοιχα. Αν τα σημεία Α,Β,Γ είναι διαφορετικά μεταξύ τους ανά δύο και δεν είναι συνευθειακά, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές αν και μόνο αν υπάρχει $\lambda \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$ με $|\lambda| = 1$ και $(1 - \lambda)\alpha + \lambda\beta - \gamma = 0$

(iii) **ορθογώνιο τρίγωνο**

5.349 Σε κάθε μία από τις παρακάτω περιπτώσεις, να αποδείξετε ότι οι εικόνες των μιγαδικών z_1, z_2, z_3 είναι κορυφές ορθογωνίου τριγώνου:
α) $z_1 = 3 + 4i, z_2 = 5 + 5i$ και $z_3 = 2 + 6i$
β) $z_1 = \dfrac{4 - 2i}{1 - i}, z_2 = \dfrac{6 + 2i}{1 - 3i}$ και $z_3 = \dfrac{2 - 6i}{2 - i}$

5.350 Έστω οι μιγαδικοί z, w με $z \neq 0$ για τους οποίους ισχύει $w = z(1 + \alpha i)$, με $\alpha > 0$. Αν το τρίγωνο που σχηματίζουν οι εικόνες των z, w και η αρχή των αξόνων είναι ισοσκελές, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο αυτό είναι ορθογώνιο.

5.351 Έστω Α, Β οι εικόνες των μιγαδικών $z, w \neq 0$ και $z \neq w$. Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω προτάσεις είναι ισοδύναμες:
α) $A\widehat{O}B = 90^0$ β) $|z - w| = |z + w|$
γ) $|z|^2 + |w|^2 = |z + w|^2$ δ) $z\overline{w} + \overline{z}w = 0$

5.352 Σε κάθε μία από τις παρακάτω περιπτώσεις, να αποδείξετε ότι οι εικόνες των μιγαδικών z, w, u, οι οποίοι είναι διαφορετικοί μεταξύ τους ανά δύο, είναι κορυφές ορθογωνίου τριγώνου:
α) $2u = iz + (2 - i)w$ β) $(1 - 2i)u = w - 2iz$

5.353 Αν $z, w \in \mathbb{C}$, να αποδείξετε ότι οι εικόνες των μιγαδικών, στις παρακάτω περιπτώσεις, σχηματίζουν τρίγωνο ορθογώνιο και ισοσκελές:
α) z, w και $u = iz(1 - i)w$, με $z \neq w$
β) $z - i, 1 + iz$ και $(1 + i)(z - i)$, με $z \neq i$

5.354 Έστω Α, Β, Γ οι εικόνες των μιγαδικών α, β, γ αντίστοιχα, για τους οποίους ισχύει η σχέση:

$$\frac{|\alpha|}{\sqrt{2}} = \frac{|\beta|}{2} = \frac{|\gamma|}{2\sqrt{2}}$$

Αν το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές, με $\widehat{A} = 90^0$, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{Re(\alpha\overline{\beta})}{Re(\beta\overline{\gamma})} = \frac{1}{2}$$

5.355 Έστω οι μη μηδενικοί μιγαδικοί αριθμοί z_1, z_2 με $z_1^2 + z_2^2 = 0$. Να αποδείξετε ότι:
α) $|z_1| = |z_2|$ β) $|z_1 + z_2| = |z_1 - z_2|$
γ) αν Α, Β είναι οι εικόνες των z_1, z_2 τότε το τρίγωνο ΟΑΒ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές

5.356 Οι μιγαδικοί z_1, z_2, z_3 είναι διαφορετικοί μεταξύ τους ανά δύο, έχουν ίσα μέτρα και ισχύει:

$$|z_1 - z_2|^2 + |z_1 - z_3|^2 = |z_2 - z_3|^2$$

Να αποδείξετε ότι $z_2 + z_3 = 0$

5.357 Έστω Α, Β, Γ είναι οι εικόνες των μιγαδικών z_1, z_1, z_3 αντίστοιχα, οι οποίοι είναι διαφορετικοί μεταξύ τους ανά δύο. Να αποδείξετε ότι:

$$\widehat{A} = 90^0 \Leftrightarrow |z_2 + z_3 - z_1|^2 = |z_2|^2 + |z_3|^2 - |z_1|^2$$

(iv) **ισόπλευρο τρίγωνο**

5.358 Να αποδείξετε ότι οι εικόνες των ριζών των παρακάτω εξισώσεων, είναι κορυφές ισοπλεύρου τριγώνου:
α) $z^2 - 2i \cdot \overline{z} = 0$, με $z \neq 0$ β) $z^3 + 3z^2 + 3z + 9 = 0$
γ) $z^3 = 27$

5.359 Έστω $z, w \in \mathbb{C}$ ώστε $2z = (1 + i\sqrt{3})w$. Αν η εικόνα Β του w κινείται στον κύκλο $x^2 + y^2 = 4$, να αποδείξετε ότι:
α) η εικόνα Α του z κινείται στον ίδιο κύκλο
β) το τρίγωνο ΟΑΒ είναι ισόπλευρο

5.360 Αν $z, w \in \mathbb{C}$, να αποδείξετε ότι οι εικόνες των μιγαδικών $z + w, z - w$ και $z + i\sqrt{3}w$ είναι κορυφές ισοπλεύρου τριγώνου.

5.361 Να βρείτε τους μιγαδικούς z, για τους οποίους οι εικόνες των μιγαδικών στις παρακάτω περιπτώσεις, είναι κορυφές ισοπλεύρου τριγώνου:
α) i, z, iz β) $1, z, z^2$

5.362 Αν $z, w \in \mathbb{C}^*$ με $z^2 + w^2 = zw$, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο που σχηματίζουν οι εικόνες των z, w και η αρχή των αξόνων είναι ισόπλευρο

5.363 Θεωρούμε την εξίσωση:

$$(\eta\mu^2 x)z^2 - (6\eta\mu x)z + 4\sigma\upsilon\nu^2 x + 9 = 0, \text{ με } x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

α) Να βρείτε τις ρίζες z_1, z_2 της παραπάνω εξίσωσης.
β) Αν Α, Β είναι οι εικόνες των z_1, z_2 αντίστοιχα, τότε:
ι) να εξετάσετε αν υπάρχει τιμή του x, για την οποία το τρίγωνο ΟΑΒ είναι ορθογώνιο,
ιι) για ποιά τιμή του x το τρίγωνο ΟΑΒ είναι ισόπλευρο;

5.364 Θεωρούμε την εξίσωση:

$$z^2 - (2^{\theta+1}\sigma\upsilon\nu\theta)z + 2^{2\theta} = 0, \text{ με } \theta \in [0, 2\pi)$$

α) Να βρείτε τις ρίζες z_1, z_2 της παραπάνω εξίσωσης
β) Αν Α, Β είναι οι εικόνες των z_1, z_2 αντίστοιχα, να υπολογίσετε τις τιμές του θ για τις οποίες το τρίγωνο ΟΑΒ είναι ισόπλευρο.

5.365 Έστω Α, Β, Γ οι εικόνες των μιγαδικών z_1, z_2, z_3 αντίστοιχα για τους οποίους ισχύει:

$$\frac{z_1 - z_2}{z_3 - z_1} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο

5.366 Αν $a, b, c \in \mathbb{C}$, με $|a| = |b| = |c|$ και οι εικόνες των a, b, c είναι κορυφές ισοπλεύρου τριγώνου, να αποδείξετε ότι οι εικόνες των ab, bc, ca είναι επίσης κορυφές ισοπλεύρου τριγώνου.

5.367 Αν $\epsilon^3 = 1$, με $\epsilon \neq 1$, να αποδείξετε ότι οι εικόνες των μιγαδικών z, w και $-\epsilon z - \epsilon^2 w$ με $z \neq w$ είναι κορυφές ισοπλεύρου τριγώνου

5.368 Οι μιγαδικοί a, b, c είναι διαφορετικοί μεταξύ τους ανά δύο και ικανοποιούν τις σχέσεις:

$$|a| = |b| = |c| = \rho \text{ και } Re(a\overline{b}) = Re(b\overline{c}) = -\frac{\rho^2}{2}$$

Αν Α, Β, Γ είναι οι εικόνες των μιγαδικών a, b, c αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:
α) το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο
β) το κέντρο βάρους του τριγώνου ΑΒΓ είναι η αρχή των αξόνων
γ) $Re(c\overline{a}) = -\dfrac{\rho^2}{2}$

(v) **θεώρημα συνημιτόνων**

5.369 Έστω οι μιγαδικοί z, w με $|z| = 1$ και $|w| = 2$. Αν οι διανυσματικές ακτίνες των μιγαδικών z, w σχηματίζουν γωνία 60^0, τότε:
α) να υπολογίσετε την απόσταση των εικόνων των μιγαδικών z και w
β) να υπολογίσετε τα μέτρα: ι) $|z + w|$ ιι) $|2z + w|$

5.370 Έστω Α, Β οι εικόνες των μη μηδενικών μιγαδικών z, w αντίστοιχα, για τους οποίους ισχύει η σχέση:

$$|z - w|^2 + \sqrt{3}|z| \cdot |w| = |z|^2 + |w|^2$$

Να αποδείξετε ότι $(OAB) = \dfrac{|zw|}{4}$

5.371 Αν $z, w \in \mathbb{C}^*$ και ισχύει $\dfrac{z}{w} + \dfrac{w}{z} = \sqrt{3}$, να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου με κορυφές τα σημεία $O(0,0), A(z)$ και $B(w)$.

5.372 Έστω Α, Β, Γ οι εικόνες των μιγαδικών z_1, z_2, z_3 αντίστοιχα. Αν το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές, με ΑΒ=ΑΓ και είναι $\eta\mu A = \left|\dfrac{z_2 - z_3}{z_1 - z_2}\right|^2$, να αποδείξετε ότι $5(z_2^2 + z_3^2) = 4z_1(z_3 + z_2 - z_1) + 6z_2z_3$

(vi) **τετράπλευρα**

5.373 Σε κάθε μία από τις παρακάτω περιπτώσεις, να αποδείξετε ότι οι εικόνες των μιγαδικών z_1, z_2, z_3, z_4 είναι κορυφές παραλληλογράμμου:
α) $z_1 = 4 + i, z_2 = 6 + 5i, z_3 = 4 + 11i$ και $z_4 = 2 + 7i$
β) $z_1 = 1 + 2i, z_2 = 5 + 8i, z_3 = 7 + 12i$ και $z_4 = 3 + 6i$

5.374 Να αποδείξετε ότι οι ρίζες των εξισώσεων

$$z^2 - z + 1 = 0 \text{ και } z^2 + \sqrt{3}z + 1 = 0$$

είναι κορυφές ισοσκελούς τραπεζίου.

5.375 Έστω οι μη μηδενικοί μιγαδικοί α, β με $a \neq \beta$ και $\alpha^2 + \beta^2 = 0$. Να αποδείξετε ότι οι εικόνες των μιγαδικών $\alpha, \beta, \alpha + \beta$ και η αρχή των αξόνων είναι κορυφές τετραγώνου

5.376 Έστω οι μιγαδικοί z, w με $z \neq w$. Να αποδείξετε ότι οι εικόνες των μιγαδικών $z, w, z + (z - w)i$ και $w + (z - w)i$ είναι κορυφές τετραγώνου

5.377 Έστω $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}^*$ οι οποίοι είναι διαφορετικοί μεταξύ τους ανά δύο. Αν Α, Β, Γ είναι οι εικόνες των α, β, γ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΟΑΒΓ είναι παραλληλόγραμμο, αν και μόνο αν είναι $Im[(\alpha - \beta)\overline{\gamma}] = 0$ και $|\alpha - \beta| = |\gamma|$

(γ') Μέτρο και γεωμετρικοί τόποι

(i) ευθεία

5.378 Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών z, για τους οποίους ισχύει η σχέση:
α) $|z+2| = |z+1-i|$ β) $|z-1-2i| = |z-3+4i|$
γ) $|z+i| = |z-3+i|$ δ) $|iz-3+2i| = |iz+2-i|$
ε) $|z+\bar{z}|^2 = 2|z|^2$ ζ) $|2iz-1+i| = |2iz+1+i|$

5.379 Έστω $z \in \mathbb{C}$ και $n \in \mathbb{N}^*$, ώστε $z^{2n} = |z|^n(z+1)^n$. Να αποδείξετε ότι η εικόνα του z βρίσκεται στην ευθεία $2x+1=0$

5.380 Δίνεται η συνάρτηση $f(z) = \left|\dfrac{z-3i}{z+i}\right|$, με $z \neq -i$
α) Αν $f(z) = 1$, να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο της εικόνας του μιγαδικού z
β) Αν $f(z) < 1$, να αποδείξετε ότι $Im(z) > 1$

5.381 Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(z) = iz+1$, όπου $z \in \mathbb{C}$
α) Να λύσετε την εξίσωση $f(z) = z$
β) Αν ισχύει $|f(z)| = |z|$, να βρείτε το γεωμετρικό τόπο του z

5.382 Έστω οι μιγαδικοί z, w. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο της εικόνας του z, σε κάθε μία από τις παρακάτω περιπτώσεις:
α) $|w-1| = 1$ και $zw = i$
β) $|w| = 1$ και $zw = z+1+wi$

5.383 Θεωρούμε τους μιγαδικούς z, w για τους οποίους ισχύουν οι σχέσεις:

$$\sqrt{2}|z| = z+\bar{z} \text{ και } \frac{w}{iw-2} \in \mathbb{R}$$

α) Να βρείτε τους γεωμετρικούς τόπους των εικόνων των μιγαδικών z, w
β) Να λύσετε την εξίσωση $z = w$

5.384 Έστω $z, w \in \mathbb{C}$, ώστε $|z+\overline{w}| = |\bar{z}-w|$. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο της εικόνας του μιγαδικού $u = zw$.

5.385 Έστω οι μιγαδικοί z, w με $w \neq 1$ για τους οποίους ισχύει η σχέση:

$$|2zw-2z+w-1| = |2z\overline{w}-2z+2\overline{w}-2|$$

Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων του z

(ii) κύκλος

5.386 Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των μιγαδικών z, για τους οποίους ισχύει:
α) $|2\bar{z}-1| = 4$ β) $|z+1+2i| = 3$ γ) $|\bar{z}-i| = 2$
δ) $|(1-i)z+2i| = 2$ ε) $|3-2iz+4z| = 7$
ε) $\left|\dfrac{4z}{2+i}\right| + \sqrt{5} = |\bar{z}\sqrt{5}|$

5.387 Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών z για τους οποίους ισχύει:
α) $|z-3-4i| \leq 5$ β) $1 \leq |z-3-4i| \leq 2$
γ) $2 < |2z-2+6i| < 4$ δ) $|1-z|^2 \leq 1-|z|^2$

5.388 Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών z, για τους οποίους ισχύει η σχέση:
α) $|4z-i| = 2|\bar{z}+i|$ β) $|z-1|^2+|z+1|^2 = 10$
γ) $|z+1| = 2|z-2|$ δ) $|z-1-i| = 2|z-1+i|$
ε) $2|z| = |z-3|$ ζ) $|z-2i|^2+|z-3+i|^2 = 13$
η) $2|z-3-2i|^2+2|z+1-3i|^2 = 21$

5.389 Να βρείτε τους μιγαδικούς z, για τους οποίους ισχύουν οι σχέσεις:

$$|z-4| \leq \frac{5}{2} \text{ και } |z-3i| \leq \frac{5}{2}$$

5.390 Αν $z, w \in \mathbb{C}$, να βρείτε το γεωμετρικό τόπο του w, σε κάθε μία από τις παρακάτω περιπτώσεις:
α) $|z-i| = 2$ και $w = 4z+i$
β) $|z| = \sqrt{5}$ και $w = (2-i)z+3i$
γ) $|z| = 4$ και $2iw = z-1-i$
δ) $|z-1| = 2$ και $(w+2i)z = 2w$
ε) $|z-3+4i| = 5$ και $zw = 1$
ζ) $|\bar{z}-2i| = 3$ και $w = 4z-i$
η) $|z| = 1$ και $w = \dfrac{z-1}{z}$

5.391 Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z για τους οποίους ισχύει η σχέση $|z-2+i| = 3$. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών:
α) $\bar{z}$ β) $\bar{z}+3-2i$ γ) $iz+1$

5.392 Θεωρούμε τους μιγαδικούς z, για τους οποίους ισχύει $|z-3+i| = 2$. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο του w, στις παρακάτω περιπτώσεις:
α) $w = z+1$ β) $w = z-3+5i$ γ) $w = 2z-4+3i$

5.393 Αν η εικόνα του μιγαδικού z βρίσκεται σε κύκλο κέντρου O(0,0) και ακτίνα 1, να αποδείξετε ότι ο μιγαδικός

$$w = \frac{\lambda z-i}{iz+\lambda}, \text{ με } \lambda \in \mathbb{R}$$

βρίσκεται στον ίδιο κύκλο

5.394 Έστω $z, w \in \mathbb{C}$ ώστε $|z| = 1$ και $z^2 = 2+izw$
α) Να υπολογίσετε το μέτρο του μιγαδικού $z-iw$
β) Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο του w

5.395 Έστω οι μιγαδικοί z, w με $zw-iw = z-(2+3i)$. Αν η εικόνα του z βρίσκεται στη μεσοκάθετο του τμήματος με άκρα τα σημεία A(0,1) και B(2,3), να αποδείξετε ότι η εικόνα του w βρίσκεται στον μοναδιαίο κύκλο

5.396 Να αποδείξετε ότι οι εικόνες των μιγαδικών z για τους οποίους ισχύει $(z-2i)^\nu = 4^\nu$, με $\nu \in \mathbb{N}$ και $\nu \geq 4$ είναι σημεία του ίδιου κύκλου.

5.397 Θεωρούμε τον μιγαδικό $z \neq 0$, για τον οποίο ισχύει $Re\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{4}$
α) Να αποδείξετε ότι η εικόνα του z βρίσκεται στον κύκλο $|z-2| = 2$
β) Αν ισχύει $Im(z) = 1$, να υπολογίσετε το πραγματικό μέρος του z

5.398 Οι μιγαδικοί z_1, z_2, z_3 έχουν τις εικόνες τους σε κύκλο με κέντρο την αρχή των αξόνων, ακτίνα $\rho > 0$ και είναι $z_1+z_2+z_3 \neq 0$. Να αποδείξετε ότι η εικόνα του μιγαδικού

$$z = \frac{z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1}{z_1 + z_2 + z_3}$$

ανήκει στον ίδιο κύκλο.

5.399 Θεωρούμε τους μιγαδικούς z για τους οποίους ισχύει $2|z| = |z-3|$
α) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο του z
β) Να αποδείξετε ότι οι εικόνες των μιγαδικών $w = \frac{z-3}{z+1}$ κινούνται σε κύκλο του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα.

5.400 Θεωρούμε τον μιγαδικό z, για τον οποίο ισχύει $|z+3| = 2|z-3|$. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο:
α) της εικόνας του z β) της εικόνας του $w = \frac{z-9}{z-5}$

5.401 Θεωρούμε το μιγαδικό $z \neq i$ και έστω $w = \frac{z+2i}{z-i}$. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο του z, στις παρακάτω περιπτώσεις:
α) $|w| = 2$ β) $w \in \mathbb{I}$ και $Im(w) > 0$

5.402 Έστω ο μιγαδικός $z_0 \neq 0$ και θεωρούμε τους μιγαδικούς z για τους οποίους ισχύει $|z-z_0| = |z|$. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο του μιγαδικού w για τον οποίο ισχύει $zw = -1$

5.403 Αν η εικόνα του μιγαδικού z βρίσκεται σε κύκλο ο οποίος διέρχεται από την αρχή των αξόνων, να αποδείξετε ότι η εικόνα του μιγαδικού w, για τον οποίο ισχύει $zw = 1$, βρίσκεται σε ευθεία

5.404 Αν η εικόνα του μιγαδικού z, κινείται στον κύκλο κέντρου $O(0,0)$ και ακτίνας 4, να αποδείξετε ότι η εικόνα του μιγαδικού $w = z^2 + 3i$ κινείται επίσης σε κύκλο του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα.

5.405 Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z για τους οποίους ισχύουν οι σχέσεις:

$$|z-i| = 1 \text{ και } Im(z) \geq 1$$

α) Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο του z
β) Να αποδείξετε ότι η εικόνα του μιγαδικού

$$w = \frac{1}{2}\left(z - i - \frac{1}{z-i}\right)$$

βρίσκεται σε ευθύγραμμο τμήμα του άξονα $y'y$

5.406 Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών z, για τους οποίους ισχύει $|z^2+1| = 2|z|$.

5.407 Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών $z \neq 0$, για τους οποίους ισχύει η σχέση:

$$\left|z + \frac{1}{z} + 2\right| + \left|z + \frac{1}{z} - 2\right| = 4$$

(iii) **παραβολή**

5.408 Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο του z, στις παρακάτω περιπτώσεις:
α) $|z+2| = |Re(z) - 2|$ β) $|4z - i| = 1 + 4Im(z)$
γ) $|z|^2 - \left(Im(z) + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{5}{4} = 0$
δ) $(|z| - 2i)(|z| + 2i) = (Re(z) + 2)^2$

5.409 Αν $p \in \mathbb{R}^*$ και $z \in \mathbb{C}$, να αποδείξετε ότι:
α) αν $|2z - p| = |z + \bar{z} + p|$, τότε η εικόνα του z βρίσκεται στην παραβολή $y^2 = 2px$
β) αν $|2z - pi| = |z - \bar{z} + pi|$, τότε η εικόνα του z βρίσκεται στην παραβολή $x^2 = 2py$

5.410 Αν $z, w \in \mathbb{C}$ ώστε $w = \frac{\alpha}{z^2}$, με $\alpha \in \mathbb{R}^*$ και $|z-1| = 1$, να βρείτε το γεωμετρικό τόπο του w

5.411 Έστω ο μιγαδικός z για τον οποίο ισχύει η σχέση:

$$(2z + \bar{z} + i)^{10} = \left(\frac{\sqrt{3} - i}{2}\right)^{50} (z - i)^{10}$$

Να αποδείξετε ότι:
α) $|2z + \bar{z} + i| = |z - i|$
β) η εικόνα του z κινείται σε παραβολή της οποίας να βρείτε την εστία και την διευθετούσα

5.412 Έστω $z \in \mathbb{C}$, ώστε $|z|^2 - (Im(z) + 1)^2 + 1 = 0$. Να βρείτε:
α) το γεωμετρικό τόπο του z
β) τους μιγαδικούς z που έχουν μέτρο $\sqrt{8}$

(iv) **έλλειψη-υπερβολή**

5.413 Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο του z, στις παρακάτω περιπτώσεις:
α) $|z-1|+|z+1|=4$ β) $|z-3i|+|z+3i|=10$
γ) $||z-4i|-|z+4i||=6$ δ) $|z-2|=|z+2|+1$
ε) $|z-10i|-|z+10i|=12$ ζ) $\dfrac{1}{|z-i|}+\dfrac{1}{|z+i|}=\dfrac{4}{|z^2+1|}$
η) $|z-\alpha|+|z+\alpha|=4\alpha$, με $\alpha>0$ θ) $\left|z+\dfrac{1}{z}\right|=|z|$

5.414 Δίνεται ο μιγαδικός z για τον οποίο ισχύει

$$|\overline{z}+6|+|\overline{z}-6|=20$$

α) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο του z
β) Να υπολογίσετε την παράσταση $|9z-\overline{z}|$

5.415 Αν $\alpha>\beta>0$, να βρείτε το γεωμετρικό τόπο του μιγαδικού z για τον οποίο ισχύει η σχέση:

$$|(\alpha+\beta)z-(\alpha-\beta)\overline{z}|=2\alpha\beta$$

(δ΄) Ανισοτικές σχέσεις

(i) **μέτρο και ανισότητες**

5.416 Αν z είναι μιγαδικός αριθμός, να αποδείξετε τις παρακάτω ισοδυναμίες:
α) $|z-i|<|z+i| \Leftrightarrow Im(z)>0$
β) $|z|<|1-z| \Leftrightarrow 2Re(z)<1$
γ) $|iz+1|>|z| \Leftrightarrow 2Im(z)<1$
δ) $|6z-i|\leq|2+3iz| \Leftrightarrow |z|\leq\dfrac{1}{3}$

5.417 Αν $z\in\mathbb{C}-\{-1\}$, να αποδείξετε ότι:

$$Re\left(\frac{2}{z+1}\right)>1 \Leftrightarrow |z|<1$$

5.418 Αν $z\in\mathbb{C}$ με $Re(z)>1$, να αποδείξετε ότι:

$$\left|z-\frac{1}{2}\right|<\frac{1}{2}$$

5.419 Αν $z,w\in\mathbb{C}$, να αποδείξετε τις παρακάτω ισοδυναμίες:
α) $|z-w|>|\overline{z}+w| \Leftrightarrow Re(z)\cdot Re(w)<0$
β) $|z-w|\leq|z-\overline{w}| \Leftrightarrow Im(z)\cdot Im(w)\geq 0$

5.420 Αν $z\in\mathbb{C}$, με $|z|\leq 1$, να αποδείξετε ότι:

$$|2z-\overline{z}|^2+|2z+\overline{z}|^2\leq 10$$

5.421 Αν οι μιγαδικοί z,w είναι συζυγείς, να αποδείξετε ότι $(z^2-3z+5)(w^2-3w+5)\geq 0$

5.422 Αν $z,w\in\mathbb{C}$ ώστε $|z|<|w|$ και $|z-w|>|1-\overline{z}w|$, να αποδείξετε ότι $|z|<1$ και $|w|>1$

5.423 Αν $a,b,z,w\in\mathbb{C}$ με $|a|\leq 1, |b|=1$ και $w=\dfrac{b(a-z)}{\overline{a}z-1}$. Να αποδείξετε ότι $|w|\leq 1 \Leftrightarrow |z|\leq 1$

5.424 Αν $z\in\mathbb{C}^*$, να αποδείξετε τις παρακάτω ισοδυναμίες:
α) $\left|z-\dfrac{2}{iz}\right|<|z| \Leftrightarrow Im(z^2)<-1$
β) $\left|z+\dfrac{1}{z}\right|<|z| \Leftrightarrow Re(z^2)<-\dfrac{1}{2}$

5.425 Αν $a,b,c\in\mathbb{C}$ με $|a|\leq 1, |b|\leq 1$ και $|c|\leq 1$, να αποδείξετε ότι $|ab|+|bc|+|ca|\geq 3|abc|$

5.426 Αν $z,w\in\mathbb{C}$, να αποδείξετε ότι:
α) $|z|^2+|w|^2\geq z\overline{w}+\overline{z}w$
β) $-2|zw|\leq z\overline{w}+\overline{z}w\leq 2|zw|$
γ) $2(|z|^2+|w|^2)\geq(z+w)^2$
δ) $(1+|z|^2)(1+|w|^2)\geq(|z|+|w|)^2$
ε) $2|z+w|^2\leq 6|z|^2+3|w|^2$

5.427 Αν $z,w\in\mathbb{C}$, με $|z|\leq 1$ και $|w|\leq 1$, να αποδείξετε ότι: α) $|z|+|w|\leq 1+|zw|$ β) $|z-w|\leq|1-z\overline{w}|$

5.428 Αν $z,w,x,y\in\mathbb{C}$, να αποδείξετε ότι:

$$(|z|^2+|w|^2)(|x|^2+|y|^2)\geq|zx+wy|^2$$

5.429 Έστω $z\in\mathbb{C}$ με $|z|=2$ και θεωρούμε τον μιγαδικό $w=z^2-z-4$. Να αποδείξετε ότι:
α) $|w|=2\sqrt{1+4(Im(z))^2}$ β) $|w|\leq 2\sqrt{17}$
γ) $(z^2-z-4)\left(\dfrac{16}{z^2}-\dfrac{4}{z}-4\right)\leq 68$

5.430 Αν $z,w\in\mathbb{C}$ με $|z|=|w|=2$ και για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $|z+xw|>1$, να αποδείξετε ότι $|Re(z\overline{w})|<2\sqrt{3}$

5.431 Έστω $z,w\in\mathbb{C}^*$ για τους οποίους ισχύουν οι σχέσεις $z\overline{w}\in\mathbb{R}$ και $8z|w|-w=z^2|w|\overline{w}$. Να αποδείξετε ότι $0<|w|\leq 16$

5.432 Άν $z,w\in\mathbb{C}$, να αποδείξετε τις παρακάτω προτάσεις:
α) αν $|z|\leq 1, |w|\leq 1$ και $|z-w|=\sqrt{3}$, τότε είναι $|z+w|\leq 1$
β) αν $|z|\leq 5, |w|\leq 5$ και $|z+w|=6$, τότε είναι $|z-w|\leq 8$

5.433 Αν $z,w\in\mathbb{C}$, με $|z|=|w|=1$, να αποδείξετε ότι:

$$|z+w|+|z-w|\leq 2\sqrt{2}$$

5.434 Αν $z\in\mathbb{C}$, με $Re(z)\geq 0$, να αποδείξετε ότι

$$\sqrt{2}|1+z| \geq 1+|z|$$

5.435 Αν $z,w \in \mathbb{C}$, με $Re(z) \geq 0$ και $Re(w) \geq 0$, να αποδείξετε ότι $|z|^2+|w|^2+zw+\overline{z}\cdot\overline{w} \geq 0$

5.436 Αν $z,w \in \mathbb{C}$ με $|w|=1$, να αποδείξετε ότι:

$$|z-w| \geq \left|1-\frac{1}{2}(z\overline{w}+\overline{z}w)\right|$$

5.437 Αν $z,w \in \mathbb{C}$, με $|z+w|=1$. Να αποδείξετε ότι $Re(z\overline{w}) \leq \dfrac{1}{4}$

5.438 Έστω $z,w \in \mathbb{C}$ με $w\overline{w}+1=|zw-iw|$. Να αποδείξετε ότι $|z-i| \geq 2$

5.439 Για κάθε $z \in \mathbb{C}$, να αποδείξετε ότι $|z+1| \geq \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ ή $|z^2+1| \geq 1$

5.440 Αν $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ με $\alpha\beta(\alpha+\beta) \neq 0$ και $\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}<0$, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{|z+w|^2}{\alpha+\beta} \geq \frac{|z|^2}{\alpha}+\frac{|w|^2}{\beta}$$

5.441 Αν $z,w \in \mathbb{C}$, με $|w|=1$, να αποδείξετε ότι

$$|z-w| \geq \frac{1}{2}(z\overline{w}+\overline{z}w)-1$$

5.442 Δίνεται ο μιγαδικός $z=x+yi$, με $x,y \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:

$$||x|-|y|| \leq |z| \leq |x|+|y| \leq \sqrt{2}|z|$$

5.443 Έστω $\alpha \in (-\infty,-1) \cup (1,+\infty)$ και $z \in \mathbb{C}$.
α) Να αποδείξετε ότι:

$$|z+\alpha i| > |\alpha z+i| \Leftrightarrow |z|<1$$

β) Αν είναι $\alpha z^4+iz^3+z+\alpha i=0$, να αποδείξετε ότι $|z|=1$

5.444 Έστω z μιγαδικός με $|z|=1$. Να αποδείξετε ότι $|z^2+z-1| \leq \sqrt{5}$

5.445 Έστω οι μιγαδικοί a,b,c για τους οποίους ισχύουν οι σχέσεις $|a|=|b|=|c|=1$ και $a+b+c=3$. Για κάθε $z \in \mathbb{C}$ με $[Im(z)]^2 \geq 1$, να αποδείξετε ότι:

$$|z-a|^2+|z-b|^2+|z-c|^2 \geq 3$$

5.446 Θεωρούμε το σύνολο:

$$A=\{z \in \mathbb{C}: z=\alpha+\beta i, \alpha>0, |z|<1\}$$

Να αποδείξετε ότι για κάθε $z \in A$ υπάρχει $x \in A$ τέτοιος ώστε $z=\dfrac{1-x}{1+x}$

5.447 Έστω $z_1,z_2,...,z_n \in \mathbb{C}-\{-i\}$, με $n \in \mathbb{N}^*$ για τους οποίους ισχύει η σχέση:

$$\left|\frac{z_1-i}{z_1+i}\right|+\left|\frac{z_2-i}{z_2+i}\right|+\cdots+\left|\frac{z_n-i}{z_n+i}\right|<1$$

Να αποδείξετε ότι:
α) $\left|\dfrac{(z_1+z_2+\cdots+z_n)-i}{(z_1+z_2+\cdots+z_n)+i}\right|<1$
β) δεν υπάρχει κάποιος από τους $z_1,z_2,...,z_n$ που να είναι πραγματικός

5.448 Αν $\alpha,\beta>0$, με $\alpha+\beta=\alpha\beta$ και $z,w \in \mathbb{C}$, να αποδείξετε ότι $\alpha|z|^2+\beta|w|^2 \geq |z+w|^2$

5.449 Αν $z,w \in \mathbb{C}$ και $\alpha>0$, να αποδείξετε ότι:

$$|z+w|^2 \leq (1+\alpha)|z|^2+\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)|w|^2$$

5.450 Αν $z \in \mathbb{C}^*$, να αποδείξετε ότι:

$$\left|\frac{1}{z}-iz\right|+\left|\frac{1}{z}-\frac{z}{i}\right| \geq \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\left|iz-\frac{z}{i}\right|$$

5.451 Έστω $x,y \in \mathbb{R}^*$, με $x^2+y^2=1$. Για κάθε $z,w \in \mathbb{C}$, να αποδείξετε ότι:

$$\left|\frac{z}{x}\right|^2+\left|\frac{w}{y}\right|^2 \geq |z+w|^2$$

5.452 Αν $z,w \in \mathbb{C}$, με $|z|=|w|$ και $z+w>0$, να αποδείξετε ότι $zw>0$

(ii) **τριγωνική ανισότητα**

5.453 Αν $z,w \in \mathbb{C}$, να αποδείξετε ότι:

$$||z|-|w|| \leq |z \pm w| \leq |z|+|w|$$

5.454 Έστω $z \in \mathbb{C}$. Να αποδείξετε ότι:
α) αν $|z|=3$ και $w=6+8i$, τότε $7 \leq |z+w| \leq 13$
β) αν $|z|=4$ και $w=3-4i$, τότε $1 \leq |z-w| \leq 9$
γ) αν $|z-1|=3$ τότε $5 \leq |2z-3| \leq 7$
δ) αν $|z|=3$ και $w=-8+6i$, τότε $24 \leq |2z+3w| \leq 36$
ε) αν $|z-3i|=3$, τότε $2 \leq |z-4| \leq 8$
ζ) αν $|z-6i| \leq 4$, τότε $6 \leq |z+8| \leq 14$
η) αν $|z-2+3i|=2$, τότε $3 \leq |z-5+7i| \leq 7$

5.455 Αν $a=3+5i, b=7+5i$ και $z \in \mathbb{C}$, να αποδείξετε ότι $|z-a|+|z-b| \geq 4$

5.456 Αν $z, w \in \mathbb{C}$ με $|z| = 1$ και $|w| = 2$, να αποδείξετε ότι $|2z + (3 + 4i)w| \leq 12$

5.457 Αν $z, w \in \mathbb{C}$, να αποδείξετε ότι:
α) αν $|z| = |w| = 1$, τότε $|z\overline{w} + \overline{z}w| \leq 2$
β) αν $|z| = 1$, τότε $|zw - |z|| \leq 1 + |w|$

5.458 Αν $z \in \mathbb{C}$ με $|z| \leq \sqrt{3} - 1$ και $\theta \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι $|2z\eta\mu\theta + z^2| \leq 2$

5.459 Αν $z \in \mathbb{C}$, να αποδείξετε τις παρακάτω προτάσεις:

α) αν $|z| < \dfrac{1}{2}$, τότε είναι $|(1 + i)z^3 + iz| < \dfrac{3}{4}$

β) αν $|z| < \dfrac{1}{3}$, τότε είναι $|(\sqrt{3} + i)z^3 - i \cdot \overline{z}| < \dfrac{11}{27}$

5.460 Έστω $z, w \in \mathbb{C}$, ώστε $|z+2i| \leq 3$ και $|w-4+5i| \leq 1$. Να αποδείξετε ότι $|z - w| \leq 9$

5.461 Έστω $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ ώστε $|z_1 - 2| = 1$ και $|z_2 + i| = 4$. Αν $w = 2 - i - z_1 - z_2$, να αποδείξετε ότι $3 \leq |w| \leq 5$

5.462 Αν η εικόνα του μιγαδικού z βρίσκεται στο εσωτερικό του μοναδιαίου κύκλου, να αποδείξετε ότι:

$$|Im(1 - \overline{z} + z^2)| < 3$$

5.463 Έστω οι μιγαδικοί a, b, c και x, y, z για τους οποίους ισχύουν οι σχέσεις:

$$|a| < 1, |b| < 1, |c| < 1 \text{ και } |x| + |y| + |z| = 1$$

Να αποδείξετε ότι $|ax + by + cz| < 1$

5.464 Αν $z \in \mathbb{C} - \{\pm 1\}$ και $|z| = 1$, να αποδείξετε ότι:

$$\left|\frac{z^3 - 1}{z - 1}\right| + \left|\frac{z^3 + 1}{z + 1}\right| \geq 2$$

5.465 Έστω οι μιγαδικοί $z_1, z_2, ..., z_n$ με $n \in \mathbb{N}^*$ για τους οποίους ισχύει $z_1 + z_2 + \cdots + z_n = 0$. Για κάθε $w \in \mathbb{C}$ με $|w| = 1$, να αποδείξετε ότι:

$$|w - z_1| + |w - z_2| + \cdots + |w - z_n| \geq n$$

5.466 Αν $z \in \mathbb{C}$ με $|z| = 1$, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{1}{7} \leq \left|\frac{1}{3 + 4z^2}\right| \leq 1$$

5.467 Αν $z \in \mathbb{C}$ με $|z| = 3$, να αποδείξετε ότι:

$$2 \leq \left|\frac{z^3 + 2z + 1}{z^2 + 1}\right| \leq \frac{17}{4}$$

5.468 Αν $z \in \mathbb{C}$, να αποδείξετε ότι:
α) $|z^2+z| \leq |z^2+z-2|+2$ β) $|z-1+5i|+|4-i-z| \geq 5$
γ) $|z - |z|| \leq 2|z|$ δ) $|4z - 5| + |3z - 2| - 7|z - 1| \leq 2$
ε) $|4z + 2| + |z - 5| - |z + 2| \leq 4|z| + 9$
ζ) $|z + 2| + |z - 1| \leq |z + 1| + |z| + 2$
η) $|z| + |z - 1| + |z - i| + |z - 1 - i| \geq 2\sqrt{2}$

5.469 Αν $z \in \mathbb{C}$ με $z^3 + \overline{z}^3 = 16$, να αποδείξετε ότι $|z| \geq 2$

5.470 Αν $z \in \mathbb{C}^*$, με $z^{-8} + (\overline{z})^{-8} = \dfrac{1}{128}$, να αποδείξετε ότι $|z| \leq 2$

5.471 Αν $z, w \in \mathbb{C}$ ώστε $|1+z|(1-|w|) > 1$, να αποδείξετε ότι $|z| > |w|$

5.472 Αν $z \in \mathbb{C}$, να βρείτε την ελάχιστη τιμή της παράστασης $A = |z^2 - z + 1| + |z^2 - z - 1|$

5.473 Αν $z \in \mathbb{C}$, να αποδείξετε ότι η ελάχιστη τιμή της παράστασης $A = |z - 2| + |z - 5| + |z - 7|$ είναι 5

5.474 Έστω οι μιγαδικοί a, b, c με $|a| = 1, |b| = 2$ και $|c| = 4$. Να αποδείξετε ότι $a + b + c \neq 0$.

5.475 Αν $z \in \mathbb{C}$ με $|z - 2| = 2$, να βρείτε την ελάχιστη και τη μέγιστη τιμή της παράστασης $|3z^2 + 4|$

5.476 Έστω οι μιγαδικοί a, b, c με $|a| = 1, |b| = 4, |c| = 10$ και $a + b + mc = 0$, με $m > 0$. Να αποδείξετε ότι $\dfrac{3}{10} \leq m \leq \dfrac{1}{2}$

5.477 Έστω οι μιγαδικοί a, b, c με $a + b + c = 0$ και $|a| = |b| = |c| = 1$. Για κάθε $z \in \mathbb{C}$, να αποδείξετε ότι:

$$3|z| \leq |z - a| + |z - b| + |z - c| \leq 3(|z| + 1)$$

5.478 Έστω $z, w \in \mathbb{C}$ και $u = |z|w + |w|z$ για τον οποίο είναι $|u| = |z|^2 + |w|^2$. Να αποδείξετε ότι $|z| = |w|$

5.479 Έστω $z, w \in \mathbb{C}$, με $|z| = 1$ και $|w| = 2$. Να αποδείξετε ότι:

$$(z + w)\left(\frac{1}{z} + \frac{4}{w}\right) \leq 9$$

5.480 Έστω οι μιγαδικοί a, b, c με $|a| = 1, |b| = 2$ και $|c| = 3$. Να αποδείξετε ότι:
α) $(a + b + c) \cdot \left(\dfrac{1}{a} + \dfrac{4}{b} + \dfrac{9}{c}\right) \leq 36$
β) $|a - b - c| + \left|\dfrac{1}{a} + \dfrac{4}{b} + \dfrac{9}{c}\right| \geq 2$

5.481 α) Αν $z \in \mathbb{C}$, να αποδείξετε ότι:

$$|z - 2i| + |\overline{z} + 3i| \leq |z| + |\overline{z} + 5i|$$

β) Αν $w \in \mathbb{C}$ με $|w| = 1$, να αποδείξετε ότι:

$$|2w-1|+|3w-1|\leq 1+|5w-1|$$

5.482 Αν $z\in\mathbb{C}^*$ με $\left|z+\dfrac{2}{z}\right|=3$, να αποδείξετε ότι:

$$|z|+\frac{2}{|z|}\leq\sqrt{17}$$

5.483 Αν $z\in\mathbb{C}$, με $|z|=1$, να αποδείξετε ότι:
α) $|3z-2|=|2z-3|$ β) $|3z-2|+|5z^2-2z-1|\geq 1$

5.484 Αν $z\in\mathbb{C}$ με $|z|=1$, να αποδείξετε ότι:

$$|2013z-1|+|2014-z+2013z^2|\geq 2014$$

5.485 Αν $z\neq\dfrac{1}{2}$ και $w\neq-\dfrac{1}{2}$, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{|3z+w|}{|2z-1|+|2w+1|}\leq\frac{1}{2}+\frac{|z|}{|z+w|}$$

5.486 Αν $z_1,z_2,z_3\in\mathbb{C}$ ώστε $|z_1|=|z_2|=|z_3|=1$, να αποδείξετε ότι:

$$\left|\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}+\frac{1}{z_3}\right|\leq 3$$

5.487 Αν οι μιγαδικοί $z_1,z_2,...,z_n$ βρίσκονται σε κύκλο κέντρου O(0,0) και ακτίνα 1, να αποδείξετε ότι:

$$\left|\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}+\cdots+\frac{1}{z_n}\right|=|z_1+z_2+\cdots+z_n|\leq n$$

5.488 Αν $z\in\mathbb{C}-\mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι

$$\left|\frac{z}{z+|z|}\right|+\left|\frac{z}{z-|z|}\right|\geq 1$$

5.489 Αν $z\in\mathbb{C}$ με $|z|=\rho>2$, να αποδείξετε ότι:

$$\left|\frac{1}{z^2+z+1}\right|\leq\frac{1}{\rho^2-\rho-1}$$

5.490 Έστω $z\in\mathbb{C}$ ώστε να είναι:

$$|z-1|+|z|+|z+2|+|z+3|=8$$

Να αποδείξετε ότι $|z+1|\leq 2$

5.491 Έστω $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{C}$ και θεωρούμε το σύνολο:

$$K=\{z\in\mathbb{C}/|z-\alpha|+|z-\beta|\leq|\gamma|\}$$

Αν $z_1,z_2\in K$ και $\lambda\in[0,1]$, να αποδείξετε ότι ο μιγαδικός $z=\lambda z_1+(1-\lambda)z_2$ ανήκει στο σύνολο K

5.492 Έστω $z\in\mathbb{C}$ και $n\in\mathbb{N}^*$ ώστε να είναι:

$$|z-1|+|z+1|+|z-2|+|z+2|+\cdots+|z-n|+|z+n|=$$

$$=2n^2+4n$$

Να αποδείξετε ότι $|z|\leq n+2$

5.493 Αν $z,w\in\mathbb{C}^*$, να αποδείξετε ότι:

$$|z+w|\cdot\left|\frac{z}{|z|}+\frac{w}{|w|}\right|\leq 2(|z|+|w|)$$

5.494 Αν $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, με $\alpha+\beta=1$ και $z,w\in\mathbb{C}$, με $|z|=|w|=1$, να αποδείξετε ότι:

$$|\alpha z+\beta w|\geq\frac{|z+w|}{2}$$

5.495 Αν $z,w\in\mathbb{C}$, με $|z|=|w|$ και $x\geq-1$, να αποδείξετε ότι:

$$(x+1)|z+w|\leq 2|xz+w|$$

5.496 Αν $z,w\in\mathbb{C}$, με $|z+w|=|zw|$, να αποδείξετε ότι $|z|\leq 2$ ή $|w|\leq 2$

5.497 Αν $z\in\mathbb{C}$, με $|z|=2$, να αποδείξετε ότι:

$$|z^4-5z^2+6|\geq 2$$

5.498 Αν $z_1,z_2,z_3,z_4\in\mathbb{C}$, να αποδείξετε ότι:

$$|z_1-z_2|\cdot|z_3-z_4|+|z_2-z_3|\cdot|z_1-z_4|\geq|z_1-z_3|\cdot|z_2-z_4|$$

5.499 Αν $z,w\in\mathbb{C}$, να αποδείξετε ότι:
α) $|z|+|w|\leq|z|+|w|+||z|-|w||\leq|z+w|+|z-w|$
β) $\sqrt{|z|+|w|}+\sqrt{||z|-|w||}\leq\sqrt{|z+w|}+\sqrt{|z-w|}$

5.500 Αν $\alpha,\beta,\gamma,z\in\mathbb{C}$, να αποδείξετε ότι:

$$|z-\alpha|+|z-\beta|+|z-\gamma|\geq\frac{|\alpha-\beta|+|\beta-\gamma|+|\gamma-\alpha|}{2}$$

5.501 Έστω οι μιγαδικοί z,w και $u=|z|w+|w|z$, ώστε $|u|=|z|^2+|w|^2$. Να αποδείξετε ότι $|z|=|w|$

5.502 Αν $z\in\mathbb{C}$, να αποδείξετε ότι:
α) $|1+z|+|1-z|\leq 2(1+|z|)$
β) $|1+z|-|z|\leq|1+z|^2$
γ) $|z^2+2z+2|+|z-1|+|z^2+z|\geq 3$
δ) $|z^2+z|+|z^2+1|+3|z+1|\geq 2$
ε) $|z+1|+|z+2|\leq|z|+|z+3|$
ζ) $|z+2|+|z+3|\leq|z|+|z+1|+4$
η) $|z+3|+|z+4|-|z+1|-|z-2|\leq 8$
θ) $2|z+5|\leq|z|+|z+1|+9$
ι) $|z|+|z+1|\leq|z-1|+|z+2|$
κ) $|z+2|+|z-1|\leq|z+1|+|z|+2$

5.503 Έστω $z \in \mathbb{C}$, ώστε $|z^2+1| \leq 1$ και $|z+1| \leq 1$. Να αποδείξετε ότι:
α) $|z^2+2z+1| \leq 1$ β) $|z| \leq 1$

5.504 Αν $z, w \in \mathbb{C}$ και $x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{|z|}{\eta\mu x} + \frac{|w|}{\sigma\upsilon\nu x} \geq |z+w|$$

5.505 Αν $z, w \in \mathbb{C}$ και $\epsilon = \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3} + i\eta\mu\frac{\pi}{3}$, να αποδείξετε ότι $|z - \epsilon w| \leq |z| + |z-w|$

5.506 Αν $z \in \mathbb{C}$, ώστε $z^4 - 4z + 6 = 0$, να αποδείξετε ότι $|z| > 1$.

5.507 Αν $z, w \in \mathbb{C}$ και $\alpha \in [0,1]$, να αποδείξετε ότι:

$$|z+w| \leq |\alpha z + (1-\alpha)w| + |(1-\alpha)z + \alpha w| \leq |z| + |w|$$

5.508 Αν $z \in \mathbb{C}$, με $|z| = 1$, να αποδείξετε ότι:
α) $|1+z| + |1+z^2| + |1+z^3| \geq 2$
β) $|1+3z^{2014}| + |1-z^{2014}| + |1+2z^{2014}| + |1+z^{2014}| \geq 5$
γ) $2|1+z| + |1+z^2| + |1+z^3| + |1+z^4| + |1+z^5| \geq 4$

5.509 Αν $z, w \in \mathbb{C}$, με $|z| = |w| = 1$, να αποδείξετε ότι:

$$|z+1| + |w+1| + |zw+1| \geq 2$$

5.510 Έστω $z \in \mathbb{C}$, ώστε $|z^2+1| = 2|z+1|$. Να αποδείξετε ότι $|z| \leq 3$

5.511 Αν $z \in \mathbb{C}^*$, να αποδείξετε ότι:
α) αν $\left|z^2 + \dfrac{1}{z^2}\right| \leq 2$, τότε $\left|z + \dfrac{1}{z}\right| \leq 2$
β) αν $\left|z^3 + \dfrac{1}{z^3}\right| \leq 2$, τότε $\left|z + \dfrac{1}{z}\right| \leq 2$

5.512 Έστω $z, w \in \mathbb{C}$, ώστε $z^3 + z^2 w = z - w$. Αν $|w| \leq 2$, να αποδείξετε ότι $|z| \leq 2$.

5.513 Αν $a, b, c \in \mathbb{C}$, να αποδείξετε ότι:

$$|(1-a)(1-b)(1-c)| \geq 1 - |a| - |b| - |c|$$

5.514 Αν $z_1, z_2, ..., z_n \in \mathbb{C}$, να αποδείξετε ότι:

$$|1+z_1| + |z_1+2z_2| + \cdots + |(n-1)z_{n-1} + nz_n| \geq 1 - n|z_n|$$

(ε΄) Μέγιστο-ελάχιστο μέτρο

(i) **ευθεία**

5.515 Σε κάθε μία από τις παρακάτω περιπτώσεις, να βρείτε την ελάχιστη τιμή του $|z|$ και τους μιγαδικούς z που έχουν το ελάχιστο μέτρο:
α) $Re(z) + 1 = Im(z)$ β) $|z-5+3i| = |z-1-i|$
γ) $|iz+3| = |\overline{z}-4|$ δ) $|z+4i|^2 - |z+3|^2 = 17$
ε) $z = (\lambda+2) + (2\lambda+1)i$, με $\lambda \in \mathbb{R}$

5.516 Αν $z \in \mathbb{C}$ με $Re(z) = Im(z) + 3$, να βρείτε την ελάχιστη τιμή της παράστασης $|z|^2 - 8$

5.517 Έστω (ϵ) η ευθεία που διέρχεται από τις εικόνες των μιγαδικών z_1, z_2 για τους οποίους ισχύουν οι σχέσεις $z_1 + z_2 = 1 - 2i$ και $z_1 - z_2 = 3 - 4i$. Να βρείτε τον μιγαδικό w του οποίου η εικόνα βρίσκεται στην ευθεία (ϵ) και έχει το ελάχιστο μέτρο.

5.518 Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z για τους οποίους ισχύει η σχέση:

$$2|\overline{z}+1| = |(1+i\sqrt{3})z - 3\sqrt{3} + 3i|$$

Να βρείτε:
α) τον γεωμετρικό τόπο της εικόνας του z
β) την ελάχιστη τιμή του $|z|$

5.519 Έστω $z \in \mathbb{C}$, ώστε να ισχύει $|z-4| + |z-3i| = 5$.
α) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο του z
β) Να βρείτε την ελάχιστη τιμή του $|z|$

(ii) **ευθεία-σημείο**

5.520 Η εικόνα του μιγαδικού z κινείται στην ευθεία με εξίσωση $3x + 4y - 60 = 0$. Να βρείτε την ελάχιστη τιμή του $|z-3-4i|$

5.521 Έστω ο μιγαδικός $z = (2-\lambda) + (1+2\lambda)i$, με $\lambda \in \mathbb{R}$. Να βρείτε:
α) τη γραμμή στην οποία βρίσκεται η εικόνα του z
β) το μιγαδικό z ο οποίος έχει το ελάχιστο μέτρο
γ) την ελάχιστη τιμή του μέτρου $|z-1-i|$

5.522 Θεωρούμε τους μιγαδικούς z, για τους οποίους ισχύει η σχέση $|z+2-3i| = |z+1-i|$. Να βρείτε:
α) το γεωμετρικό τόπο του z
β) το μιγαδικό z, ο οποίος απέχει την ελάχιστη απόσταση από το σημείο $A(1,1)$

5.523 Έστω $z \in \mathbb{C}$ ώστε $|2iz - 2 - 6i| = 2|\overline{z} - 5 + 3i|$
α) Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο του z
β) Να βρείτε την ελάχιστη τιμή του $|z|$
γ) Να αποδείξετε ότι $|z-2+3i| \geq 2\sqrt{5}$

5.524 Να βρείτε τον μιγαδικό z, για τον οποίο ισχύει $|z-1| = |z-i|$ και το άθροισμα $|z-2i| + |z+3-4i|$ να γίνεται ελάχιστο

(iii) **δύο ευθείες**

5.525 Να βρείτε τους γεωμετρικούς τόπους των εικόνων των μιγαδικών z και w και την ελάχιστη τιμή του μέτρου $|z-w|$, σε κάθε μία από τις παρακάτω περιπτώσεις:
α) $z(4-3i)+\overline{z}(4+3i) = -2$ και $4(w+\overline{w})-3i(w-\overline{w}) = -22$
β) $|z-2| = |z+2-3i|$ και $|w+i| = |w-4+4i|$

5.526 Έστω ο μιγαδικός z με $|z^2| + Im(z^2) = 1$
α) Να αποδείξετε ότι οι εικόνες του z βρίσκονται σε δύο ευθείες (η_1) και (η_2)
β) Αν οι μιγαδικοί z_1, z_2 βρίσκονται στις ευθείες (η_1) και (η_2), να αποδείξετε ότι $|z_1 - z_2| \geq \sqrt{2}$

5.527 Έστω $z, w \in \mathbb{C}$, ώστε $w = 3z - i \cdot \overline{z} + 4$. Αν η εικόνα του z βρίσκεται στην ευθεία $y = x - 2$, τότε:
α) να βρείτε το γεωμετρικό τόπο του w
β) να αποδείξετε ότι $|z-w| \geq 5\sqrt{2}$

5.528 Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί $z_1 = -\alpha + (\alpha-1)i$ και $z_2 = (\alpha-3) - \alpha i$, με $\alpha \in \mathbb{R}$.
α) Να αποδείξετε ότι οι εικόνες των μιγαδικών z_1 και z_2 κινούνται σε δύο παράλληλες ευθείες.
β) Να βρείτε την ελάχιστη τιμή του $|z_1 - z_2|$
γ) Αν $\alpha = 2$, να υπολογίσετε την παράσταση

$$K = 1 + \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{2014}$$

5.529 Έστω οι μιγαδικοί z, w για τους οποίους ισχύουν οι σχέσεις:

$$|z+2| = |iz+2| \text{ και } w = \lambda(-1+i) + \frac{2+i}{i}, \text{ με } \lambda \in \mathbb{R}$$

α) Να βρείτε τους γεωμετρικούς τόπους των εικόνων των μιγαδικών z και w
β) Να αποδείξετε ότι $|z-w| \geq \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

(iv) **κύκλος**

5.530 Σε κάθε μία από τις παρακάτω περιπτώσεις, να βρείτε το ελάχιστο και το μέγιστο μέτρο του μιγαδικού z, καθώς και τους μιγαδικούς που έχουν το ελάχιστο και μέγιστο μέτρο αντίστοιχα:
α) $|z-2| = 1$ β) $2|z|^2 = (1-i)z + (1+i)\overline{z}$
γ) $|z-4-3i| = 2$ δ) $|z|^2 + 2i(z-\overline{z}) + 3 = 0$

5.531 Αν $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, ώστε $|z|^2 = 2Re(z)$, να αποδείξετε ότι $|z_1 - z_2| \leq 2$

5.532 Έστω $z, w \in \mathbb{C}$, ώστε $|w| = 1$ και $z - 5 = 2\sqrt{2}w - 5i$. Να αποδείξετε ότι:
α) η εικόνα του z βρίσκεται σε κύκλο
β) $3\sqrt{2} \leq |z| \leq 7\sqrt{2}$

5.533 Θεωρούμε τους μιγαδικούς z για τους οποίους ισχύει η σχέση:

$$|z-1-3i|^2 + |z-3-3i|^2 = 4$$

α) Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο του z
β) Να αποδείξετε ότι $4 \leq |z-\overline{z}| \leq 8$

5.534 Έστω οι μιγαδικοί z, w για τους οποίους ισχύουν οι σχέσεις $|w| = 2$ και $z = 2w + 2i$. Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή του $|z-w|$

5.535 Θεωρούμε τους μιγαδικούς z για τους οποίους ισχύει η σχέση:

$$Re[(z-1)(\overline{z}+1)] = z + \overline{z}$$

α) Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο του z
β) Αν z_1, z_2 είναι δύο από τους παραπάνω μιγαδικούς z, να αποδείξετε ότι $|z_1 - \overline{z_2}| \leq 2\sqrt{2}$

5.536 Εστω οι μιγαδικοί z, ώστε να είναι:

$$(z-3-4i)(\overline{z}-3+4i) = 25$$

Να βρείτε:
α) τον γεωμετρικό τόπο των μιγαδικών z
β) τον μιγαδικό z με το ελάχιστο μέτρο και τον μιγαδικό με το μέγιστο μέτρο

5.537 Θεωρούμε τους μιγαδικούς z για τους οποίους ισχύει η σχέση:

$$|z-1+2i| = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Να βρείτε:
α) το γεωμετρικό τόπο των μιγαδικών $w = 2z + 1 + i$
β) τους μιγαδικούς w οι οποίοι έχουν το ελάχιστο και το μέγιστο μέτρο

5.538 Έστω $z \in \mathbb{C}$ για τον οποίο ισχύει $|z-i| = \sqrt{2}|z-1|$
α) Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο του z
β) Να αποδείξετε ότι $\sqrt{5} - 2 \leq |z| \leq \sqrt{5} + 2$

5.539 Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί z για τους οποίους ισχύει η σχέση:

$$|(3+4i)z + 25| + |\overline{z} + 3 + 4i| = 6$$

α) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο του z
β) Να βρείτε την ελάχιστη και τη μέγιστη απόσταση του z από την αρχή των αξόνων
γ) Αν z_1, z_2 είναι δύο μιγαδικοί που επαληθεύουν τη δοσμένη σχέση, να βρείτε την μέγιστη τιμή του $|z_1 - z_2|$

5.540 Δίνονται οι μιγαδικοί z_1, z_2 με $|z_1 - z_2| = 2$ και θεωρούμε τον μιγαδικό w για τον οποίο ισχύει η σχέση:

$$(w - z_1)(\overline{w} - \overline{z_1}) + (w - z_2)(\overline{w} - \overline{z_2}) = 4$$

α) Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων του μιγαδικού w
β) Να βρείτε τη μέγιστη τιμή της παράστασης $|w - z_2|$

5.541 Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί:

$$z = (3 + \sqrt{2}\sigma\upsilon\nu\phi) + (3 + \sqrt{2}\eta\mu\phi)i, \text{ όπου } \phi \in [0, 2\pi)$$

α) Να βρείτε τη γραμμή πάνω στην οποία βρίσκονται οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών z
β) Από τους παραπάνω μιγαδικούς αριθμούς z, να βρείτε αυτόν που έχει το ελάχιστο μέτρο και αυτόν που έχει το μέγιστο μέτρο

(v) **κύκλος-σημείο**

5.542 Αν $z \in \mathbb{C}$, να βρείτε την μέγιστη και ελάχιστη τιμή της παράστασης Α, σε κάθε μία από τις παρακάτω περιπτώσεις:
α) $A = |z - 4 - 3i|$, με $|z| = 2$
β) $A = |z - 1 - i|$, με $|z + 2 + 3i| = 3$
γ) $A = |z - 2 + 5i|$, με $|z + 1 + i| = 2$
δ) $A = |z - 6 + 2i|$, με $|z + 2i| \leq 1$

5.543 Έστω $z \in \mathbb{C}$. Να αποδείξετε ότι:
α) αν $|z - 2 - i| \leq 5$, τότε $8 \leq |z - 14 - 6i| \leq 18$
β) αν $|z - 1 - i| < 5$, τότε $|z - 10 - 13i| > 10$
γ) αν $|z - 1 + 2i| < 3$, τότε $2 < |z + 2 - 2i| < 8$

5.544 Αν $z \in \mathbb{C}$ με $|z| = 1$, να βρείτε την ελάχιστη και τη μέγιστη τιμή της παράστασης $|z^2 + 2z|$

5.545 Θεωρούμε τους μιγαδικούς z για τους οποίους ισχύει η σχέση $|z - i|^2 + |z + i|^2 = 4$. Να αποδείξετε ότι $4 \leq |z - 3 + 4i| \leq 6$

5.546 Έστω ο μιγαδικός $z = x + (y - 1)i$, με $x, y \in \mathbb{R}$ για τον οποίο ισχύει η σχέση $|z - 1 - i| - 1 = 0$
α) Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο της εικόνας του μιγαδικού $w = x + yi$
β) Να αποδείξετε ότι $\sqrt{2} - 1 \leq |w - 2 - i| \leq \sqrt{2} + 1$

5.547 Έστω ο μιγαδικός z για τον οποίο ισχύει η σχέση $(2z - 3)^n = (z - 3i)^n$, με $n \in \mathbb{N}^*$.
α) Να αποδείξετε ότι η εικόνα του z βρίσκεται σε κύκλο του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα
β) Αν z_1, z_2 είναι δύο μιγαδικοί που ικανοποιούν τη δοσμένη σχέση, να αποδείξετε ότι $|z_1 - z_2| \leq 2\sqrt{5}$
γ) Αν $w = 2 + \sqrt{5}i$, να βρείτε τον μιγαδικό z για τον οποίο το μέτρο $|z - w|$ γίνεται ελάχιστο

5.548 Έστω $z \in \mathbb{C}$, ώστε $|(3 + 4i)z + 4 - 3i| = 10$. Να βρείτε:
α) τον γεωμετρικό τόπο του z
β) την ελάχιστη τιμή της παράστασης $u = |iz - 2 + 3i|$
γ) τον μιγαδικό z για την οποία η παράσταση u γίνεται ελάχιστη

5.549 Έστω $z \in \mathbb{C}$ ώστε $|z + 1 - i| = 1$. Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της παράστασης:

$$|z - 1 - 2i|^2 + |z - 5 + 4i|^2$$

(vi) **κύκλος-ευθεία**

5.550 Αν $z, w \in \mathbb{C}$, να βρείτε την ελάχιστη τιμή της παράστασης $|z - w|$ σε κάθε μία από τις παρακάτω περιπτώσεις:
α) $|z - 1| = |z - i|$ και $|w - 2| = 1$
β) $(1 + i)z + (1 - i)\overline{z} + 4 = 0$ και $(w - 2)(\overline{w} - 2) = 1$
γ) $|z - 1 - i| = \sqrt{2}$ και $zw = 6$

5.551 Έστω οι μιγαδικοί z, w για τους οποίους ισχύουν οι σχέσεις:

$$|z + 1| \leq 1 \text{ και } w = \frac{1 - \eta\mu t}{2} + i\frac{1 + \eta\mu t}{2}, \text{ με } t \in \mathbb{R}$$

Να βρείτε την ελάχιστη και τη μέγιστη τιμή του μέτρου $|z - w|$

5.552 Έστω $z, w \in \mathbb{C}$, ώστε $zw = 2w + 1$. Αν η εικόνα του z βρίσκεται σε κύκλο κέντρου K(1,0) και ακτίνα $\rho = 1$, τότε:
α) να βρείτε το γεωμετρικό τόπο του w
β) να βρείτε την ελάχιστη τιμή του $|z - w|$

5.553 Δίνονται οι μιγαδικοί z, w για τους οποίους ισχύουν οι σχέσεις:

$$|(1 + i)z - 1| = \sqrt{2} \text{ και } |w + 3i| = |w - 1 + 2i|$$

Να βρείτε:
α) τους γεωμετρικούς τόπους των z, w
β) την ελάχιστη τιμή του $|z - w|$

5.554 Έστω οι μιγαδικοί z, w για τους οποίους ισχύουν οι σχέσεις:

$$z\bar{z} + 2|z| = 3 \text{ και } w = \lambda - (\lambda - 3)i, \text{ με } \lambda \in \mathbb{R}$$

α) Να βρείτε τους γεωμετρικούς τόπους των μιγαδικών z και w

β) Να αποδείξετε ότι $|z - w| \geq \dfrac{3\sqrt{2} - 2}{2}$

γ) Να αποδείξετε ότι $|2z - w| \geq \dfrac{3\sqrt{2} - 4}{2}$

5.555 Δίνονται οι μιγαδικοί z, w για τους οποίους ισχύουν οι σχέσεις:

$$|z - 2 - 4i| = 2 \text{ και } |w - 2 + 4i| = |w - 6|$$

Να βρείτε τις ελάχιστες τιμές των παραστάσεων:
α) $|z - w|$ β) $|z - w - 1 + 3i|$

(vii) **δύο κύκλοι**

5.556 Σε κάθε μία από τις παρακάτω περιπτώσεις, να βρείτε την ελάχιστη και τη μέγιστη τιμή του $|z - w|$
α) $|z + 2| = 1$ και $|w - 4i| = 2$
β) $|2z - 4i| = 2$ και $|w - 3 + 3i| = 2$
γ) $|z + 1 - 2i| = 2$ και $|w - 6 - 2i| = 3$
δ) $|z - 1 - i| = 1$ και $w = 2z + 3$

5.557 Αν η εικόνα του μιγαδικού z ανήκει στο μοναδιαίο κύκλο, να αποδείξετε ότι:
α) η εικόνα του μιγαδικού $w = \dfrac{z - 2i}{2iz + 1}$ ανήκει στον ίδιο κύκλο
β) $|z - w| \leq 2$

5.558 Δίνονται οι μιγαδικοί z, w για τους οποίους ισχύουν οι σχέσεις:

$$|z - 3 + 2i| \leq 3 \text{ και } |(1 + i)w + 2| \leq 2\sqrt{2}$$

Να αποδείξετε ότι $|z - w| \leq 10$

5.559 Έστω $z, w \in \mathbb{C}$ ώστε να είναι:

$$\frac{1 + iz}{z + i} \in \mathbb{R} \text{ και } |iw + 1| = |2w + i|$$

Να βρείτε:
α) τους γεωμετρικούς τόπους των z, w
β) τη μέγιστη και την ελάχιστη απόσταση των z, w

5.560 Έστω οι μιγαδικοί z, w για τους οποίους ισχύουν οι σχέσεις:

$$|z - 1 - 4i| \leq 2\sqrt{2} \text{ και } |iw + 11 - 2i| \leq 3\sqrt{2}$$

α) Να βρείτε τη μέγιστη τιμή του $|z - w|$
β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $z = w$ έχει μοναδική λύση

5.561 Αν $z \in \mathbb{C}$, ώστε $|z - 1| \leq 1$ και $|z - 2| = 1$, να αποδείξετε ότι $1 \leq |z| \leq \sqrt{3}$

5.562 Έστω $z, w \in \mathbb{C}$ ώστε $|z| = 2$ και $|w - 3 + 4i| = 5$. Να βρείτε την μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της παράστασης $|2z + w|$

(viii) **παραβολή-ευθεία**

5.563 Έστω οι μιγαδικοί $z = \lambda^2 + 2\lambda i$ και $w = t - 1 + 2ti$, με $\lambda, t \in \mathbb{R}$. Να βρείτε:
α) τους γεωμετρικούς τόπους των εικόνων των z, w
β) την ελάχιστη τιμή του $|z - w|$

5.564 Έστω οι μιγαδικοί z, w για τους οποίους ισχύουν οι σχέσεις:

$$|4z - 1| = 1 + Re(z) \text{ και } Re(w) + Im(2\overline{w}) = -6$$

α) Να βρείτε τους γεωμετρικούς τόπους των εικόνων των μιγαδικών z και w
β) Να αποδείξετε ότι $|z - w| \geq \sqrt{5}$

5.565 Έστω οι μιγαδικοί z, w για τους οποίους ισχύουν οι σχέσεις:

$$z^2 + \overline{z}^2 + 4Re(z) = 2|z|^2 \text{ και } |w + 1|^2 - |w - 2i|^2 = -15$$

α) Να βρείτε τους γεωμετρικούς τόπους των εικόνων των μιγαδικών z και w
β) Να αποδείξετε ότι $|z - w| \geq \sqrt{5}$

(ix) **παραβολή-σημείο**

5.566 Έστω οι μιγαδικοί z, w για τους οποίους ισχύουν οι σχέσεις:

$$|z + 1| = 1 - Re(z) \text{ και } w - 2 = \left(\frac{1 + 3i}{\sqrt{6} + 2i}\right)^7$$

α) Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο του z
β) Να αποδείξετε ότι $|z - w| \geq 1$

(x) **έλλειψη**

5.567 Έστω $z \in \mathbb{C}$ με $|z-4|+|z+4|=10$
α) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο (C) των εικόνων του z
β) Αν οι μιγαδικοί z_1, z_2 βρίσκονται στη γραμμή (C) και οι εικόνες τους είναι συμμετρικές ως προς την αρχή των αξόνων, να αποδείξετε ότι $6 \leq |z_1 - z_2| \leq 10$

5.568 Θεωρούμε τους μιγαδικούς z για τους οποίους ισχύει η σχέση:

$$\frac{1}{|z-3i|}+\frac{1}{|z+3i|}=\frac{10}{z^2+9}$$

α) Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών z
β) Αν z_1, z_2 είναι δύο από τους παραπάνω μιγαδικούς z με $|z_1-z_2|=6$, να αποδείξετε ότι $|z_1+z_2| \leq 8$

5.569 Έστω οι μιγαδικοί z, w για τους οποίους ισχύουν οι σχέσεις $|z-3|+|z+3|=10$ και $|w|=4$. Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της παράστασης $|z-w|$

5.570 Έστω $z \in \mathbb{C}$, ώστε $|iz-3|+|iz+3|=10$. Να αποδείξετε ότι:
α) η εικόνα του z βρίσκεται σε έλλειψη, της οποίας να βρείτε την εξίσωση, τις κορυφές και τις εστίες
β) $4 \leq |z| \leq 5$ γ) $16 \leq |z^2-9| \leq 25$

(xi) **υπερβολή**

5.571 Αν $z \in \mathbb{C}$ με $|z+5|-|z-5|=8$, να αποδείξετε ότι $|z| \geq 4$

5.572 Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z για τους οποίους ισχύει η σχέση:

$$|z+2i|-|z-2i|=2\sqrt{3}$$

α) Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών z
β) Να αποδείξετε ότι $|z-1| \geq \sqrt{6}$

6 Μιγαδικοί και διανύσματα

(α΄) **συνευθειακά σημεία**

6.573 Σε κάθε μία από τις παρακάτω περιπτώσεις, να αποδείξετε ότι οι εικόνες των μιγαδικών z, w και η αρχή O των αξόνων είναι συνευθειακά σημεία:
α) $z\overline{w}=\overline{z}w$ β) $|z|=|w|=|Re(z\overline{w})|=1$

6.574 Έστω M, N οι εικόνες των μιγαδικών z, w αντίστοιχα. Να αποδείξετε τις παρακάτω προτάσεις:
α) $\frac{z}{w} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \overrightarrow{OM}//\overrightarrow{ON}$ β) $\frac{z}{w} \in \mathbb{I} \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} \perp \overrightarrow{ON}$
γ) $|z+w|=|z|+|w| \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} \uparrow\uparrow \overrightarrow{ON}$

6.575 Σε κάθε μία από τις παρακάτω περιπτώσεις, να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών z, για τους οποίους οι εικόνες των αριθμών που δίνονται, είναι συνευθειακά σημεία:
α) $1+i, z, z+i$ β) $z, z+1, z^2$ γ) $1, iz, 1-z^2$
δ) $1, z, 1+z^2$

6.576 Έστω A_1, A_2, A_3, A_4 οι εικόνες τεσσάρων μιγαδικών z_1, z_2, z_3, z_4 αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

$$\overrightarrow{A_1A_2}//\overrightarrow{A_3A_4} \Leftrightarrow \frac{z_2-z_1}{z_4-z_3} \in \mathbb{R}$$

6.577 Έστω $\alpha, \beta \in \mathbb{C}^*$ και θεωρούμε τη συνάρτηση $f(z)=\alpha z+\beta$, με $z \in \mathbb{C}$. Αν οι εικόνες των μιγαδικών z_1, z_2, z_3 είναι συνευθειακά σημεία, να αποδείξετε ότι και οι εικόνες των μιγαδικών $f(z_1), f(z_2), f(z_3)$ είναι συνευθειακά σημεία

6.578 Αν $z \in \mathbb{C}^*$, να αποδείξετε ότι οι εικόνες των μιγαδικών $\overline{z}, -\overline{z}$ και $\frac{1}{z}$ είναι συνευθειακά σημεία.

6.579 Αν $z, w \in \mathbb{C}$ με $\overline{z}w=-1$, να αποδείξετε ότι οι εικόνες των μιγαδικών z, w και η αρχή των αξόνων είναι συνευθειακά σημεία

6.580 Δίνονται οι μιγαδικοί a, b, c οι οποίοι είναι διαφορετικοί μεταξύ τους ανά δύο και ικανοποιούν τη σχέση $a\overline{b}+b\overline{c}+c\overline{a}=1$. Να αποδείξετε ότι:
α) $\frac{b-a}{c-a} \in \mathbb{R}$
β) οι εικόνες των a, b, c είναι σημεία συνευθειακά

6.581 Έστω $z \in \mathbb{C}-\mathbb{R}$ και $a, b \in \mathbb{R}$ ώστε $a \neq b$ και $a+b+1>0$. Να αποδείξετε ότι οι εικόνες των μιγαδικών $-z^2, az+b, bz+a$ είναι σημεία συνευθειακά αν και μόνο αν $|z-1|=\sqrt{a+b+1}$

6.582 Έστω $z \in \mathbb{C}^*$ και θεωρούμε τους μιγαδικούς:

$$w=\left(\frac{z}{|z|}+1\right)^{2n} \text{ και } u=\left(\frac{z}{|z|}-1\right)^{2n}, \text{ με } n \in \mathbb{N}^*$$

Να αποδείξετε ότι οι εικόνες των μιγαδικών w, u και η αρχή O των αξόνων είναι συνευθειακά σημεία

6.583 Έστω A, B οι εικόνες των μη μηδενικών μιγαδικών z, w. Να αποδείξετε ότι:

$$\frac{(z+w)^2}{zw} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \text{O, A, B συνευθειακά ή } |\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OB}|$$

6.584 Έστω οι μιγαδικοί $z \neq 0$ και $w = \dfrac{\kappa}{\bar{z}}$, με $\kappa > 0$. Αν Μ, Ν είναι οι εικόνες των z, w αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:
α) $\overrightarrow{OM}^2 \cdot \overrightarrow{ON} = \kappa \cdot \overrightarrow{OM}$
β) τα σημεία Ο, Μ, Ν είναι συνευθειακά

6.585 Αν $a, b, c \in \mathbb{C}$ με $|a| = |b| = |c| = 1$ και $|a+b+c| = 3$, να αποδείξετε ότι $a = b = c$

(β′) **εσωτερικό γινόμενο**

6.586 Δίνονται οι μιγαδικοί $z = 2 + 3i$ και $w = 1 + 4i$ με εικόνες τα σημεία Α, Β αντίστοιχα. Να βρείτε σημείο Μ της ευθείας $(\epsilon) : 3x + y - 5 = 0$, ώστε να είναι $M\widehat{A}B = 90^0$

6.587 Δίνονται οι μιγαδικοί z, w με εικόνες τα σημεία Α, Β αντίστοιχα.
α) Να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = Re(z\overline{w})$
β) Να βρείτε τη γωνία που σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ η ευθεία που διέρχεται από τις εικόνες των μιγαδικών $z - 1$ και $z - i$
γ) Να αποδείξετε ότι οι εικόνες των μιγαδικών $z, z-1$ και $z - i$ είναι κορυφές ορθογωνίου τριγώνου

6.588 Έστω Α, Β οι εικόνες των ριζών της εξίσωσης $z^2 + 2z + \lambda = 0$, με $\lambda \in \mathbb{R}$. Αν Μ είναι η εικόνα του μιγαδικού $w = 1 - i$, να βρείτε την τιμή του λ για την οποία είναι $|\overrightarrow{MA}| \cdot |\overrightarrow{MB}| = 4$

6.589 Έστω Μ η εικόνα του μιγαδικού z και Α, Β οι εικόνες των μιγαδικών $z - 1$ και $2z + i$ αντίστοιχα. Να βρείτε το σύνολο των σημείων Μ ώστε $\overrightarrow{AM} \perp \overrightarrow{AB}$

6.590 Έστω οι μιγαδικοί z και $w = 1 + i$. Αν Α, Β είναι οι εικόνες των $z + w$ και $z - w$ αντίστοιχα, να βρείτε το γεωμετρικό τόπο του z, αν ισχύει $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 2$

6.591 Έστω ο μιγαδικός $z \neq 0$ και έστω Α, Β είναι οι εικόνες των μιγαδικών z και $z^2 - 1$ αντίστοιχα. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο της εικόνας του z, ώστε να είναι $\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OB}$

6.592 Έστω A_1, A_2, A_3, A_4 οι εικόνες τεσσάρων μιγαδικών z_1, z_2, z_3, z_4 αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

$$\overrightarrow{A_1A_2} \perp \overrightarrow{A_3A_4} \Leftrightarrow \frac{z_2 - z_1}{z_4 - z_3} \in \mathbb{I}$$

6.593 Δίνεται ο αριθμός $\alpha \in [0, \pi]$ και θεωρούμε την εξίσωση $z^2 - 2\sigma\upsilon\nu\alpha \cdot z + 1 = 0 \quad (1)$
α) Να βρείτε τις ρίζες z_1, z_2 της εξίσωσης (1)
β) Αν M_1, M_2 είναι οι εικόνες των ριζών z_1, z_2 αντίστοιχα, να βρείτε τις τιμές του α, ώστε $\overrightarrow{OM_1} \perp \overrightarrow{OM_2}$
γ) Να αποδείξετε ότι η εικόνα της ρίζας με θετικό φανταστικό μέλος, κινείται σε ημικύκλιο.

6.594 Έστω Α, Β οι εικόνες των μη μηδενικών μιγαδικών α, β αντίστοιχα, με $|\alpha| = |\beta|$. Αν $z = (\alpha + \beta)^n$ και $w = (\alpha - \beta)^n$ με $n \in \mathbb{N}^*$, να αποδείξετε ότι:
α) αν ο n είναι άρτιος, τότε τα σημεία Α, Β και η αρχή Ο των αξόνων είναι συνευθειακά
β) αν ο n είναι περιττός, τότε ΟΑ⊥ΟΒ

(γ′) **τετράπλευρα**

6.595 Έστω Α, Β, Γ, Δ οι εικόνες των μιγαδικών z_1, z_2, z_3, z_4 αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι το ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο αν και μόνο αν $z_1 - z_2 = z_4 - z_3$

6.596 Έστω Α, Β, Γ οι εικόνες των μιγαδικών $z, z + w, w$ αντίστοιχα. Αν ο αριθμός $\dfrac{z + iw}{z - iw}$ είναι φανταστικός, να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΟΑΒΓ είναι ρόμβος.

7 **Επαναληπτικές ασκήσεις**

(α′) **α ομάδα**

7.597 Θεωρούμε τους μιγαδικούς $z \neq 1$ και $w = \dfrac{1 - z}{\bar{z} - 1}$
α) αν $z = -2 + i$, να βρείτε το $|w|$
β) να αποδείξετε ότι $|w| = 1$
γ) να αποδείξετε ότι ο αριθμός $u = \dfrac{w - 1}{z - 1}$ είναι πραγματικός
δ) αν $w = 1$, να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο της εικόνας του μιγαδικού z

7.598 Στο μιγαδικό επίπεδο, έστω $\overrightarrow{OA}$ η διανυσματική ακτίνα ενός μιγαδικού $z \neq 0$ και έστω $\overrightarrow{OB}$ η διανυσματική ακτίνα του μιγαδικού $w = z\epsilon$, με $\epsilon = \dfrac{1 + i\sqrt{3}}{2}$
α) Να αποδείξετε ότι $\epsilon^3 = 1$
β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΟΑΒ είναι ισόπλευρο
γ) Να αποδείξετε ότι $z^3 + w^3 = 0$ και $z^2 + w^2 = zw$
δ) Αν η εικόνα του z διαγράφει τον μοναδιαίο κύκλο, να αποδείξετε ότι και η εικόνα του w διαγράφει τον ίδιο κύκλο

7.599 Θεωρούμε τους μιγαδικούς $z \neq -1$ και $w = \dfrac{z + i}{\bar{z} + 1}$
α) αν $|w| = 1$, να αποδείξετε ότι $Re(z) = Im(z)$
β) αν $w \in \mathbb{I}$, να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων του z
γ) αν $|w| = 2$, να αποδείξετε ότι οι εικόνες του z βρίσκονται σε κύκλο, του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα

7.600 Δίνεται ο μιγαδικός z για τον οποίο ισχύουν οι σχέσεις:

$$|z-1| = 10 \text{ και } \left|z+\frac{1}{3}\right| = 12$$

Αν για τον μιγαδικό w ισχύει $3wz+6 = 6\overline{z} - w$, να βρείτε:
α) το μέτρο του μιγαδικού $\overline{w}$
β) το γεωμετρικό τόπο του μιγαδικού u για τον οποίο ισχύει η σχέση:

$$\left(2u-\frac{3}{2}\right)\left(\overline{u}-\frac{3}{4}\right) = 6w\overline{w}$$

7.601 Έστω ο μιγαδικός z με $|z-3-6i| = 2|z|$
α) Να αποδείξετε ότι $|z+1+2i| = 2\sqrt{5}$
β) Αν z_1, z_2 είναι δύο από τους παραπάνω μιγαδικούς z, να αποδείξετε ότι $|z_1 - z_2| \le 4\sqrt{5}$
γ) Αν z_1, z_2 είναι δύο από τους παραπάνω μιγαδικούς z, με $|z_1 - z_2| = 4\sqrt{5}$, να αποδείξετε ότι:

$$|z_1+z_2|^n = 2^n \cdot 5^{\frac{n}{2}}, \text{ όπου } n \in \mathbb{N}^*$$

7.602 Θεωρούμε τους μιγαδικούς z, w, u για τους οποίους ισχύουν οι σχέσεις:

$$w = z + i\cdot\overline{z} \text{ και } u = \overline{z} + iz$$

α) Να αποδείξετε ότι:
ι) $|w|^2 = 2|z|^2 + 2Im(z^2)$
ιι) $|w+u| \le 4|z|$
ιιι) $|w-u| \le 2\sqrt{2}|z|$
β) Αν $|w| = \sqrt{2}$, να βρείτε το γεωμετρικό τόπο της εικόνας του z

7.603 Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(z) = \dfrac{1}{\overline{z}}$, με $z \in \mathbb{C}^*$
α) Να υπολογίσετε τον αριθμό $(f(-i))^{2015}$
β) Αν η εικόνα του z βρίσκεται σε κύκλο με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα 1, να αποδείξετε ότι η εικόνα του $f(z)$ βρίσκεται στον ίδιο κύκλο
γ) Να αποδείξετε ότι $|f(z) - f(\overline{z})| \le \dfrac{2}{|z|}$
δ) Αν είναι $|f(z) - z| = 3|z|$, να βρείτε το γεωμετρικό τόπο της εικόνας του z

7.604 Θεωρούμε τον μιγαδικό z για τον οποίο ισχύει $|z-i|^2 + |z+i|^2 = 4$ και έστω $w = (4+4i)z$
α) Αν Α, Β, Μ είναι οι εικόνες των $i, -i$ και z αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι $A\widehat{M}B = 90^0$
β) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο της εικόνας του z
γ) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο της εικόνας του w
δ) Να αποδείξετε ότι $|z-w| = 5$

7.605 Δίνεται ο μιγαδικός $z = \sigma\upsilon\nu\theta + i\eta\mu\theta$, με $\theta \in [0, 2\pi)$ και θεωρούμε τον μιγαδικό:

$$w = 3z + 10 + \frac{4i}{\overline{z}}$$

α) Να βρείτε τους γεωμετρικούς τόπους των εικόνων των μιγαδικών z και w
β) Να αποδείξετε ότι $5 \le Re(w) \le 15$ και ότι $-5 \le Im(w) \le 5$
γ) Να βρείτε την ελάχιστη και τη μέγιστη τιμή του $|z-w|$

7.606 Θεωρούμε τους μιγαδικούς w για τους οποίους ισχύει η σχέση $3(w+\overline{w}) + 2i^{75}(w-\overline{w}) = -26i^{90}$
α) Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο του w
β) Να βρείτε τον μιγαδικό w_0 ο οποίος έχει το ελάχιστο μέτρο
γ) Αν $z \in \mathbb{C}$ με $|z+i^{10}|^2 + |z-w_0|^2 = 6$, να βρείτε την ελάχιστη και τη μέγιστη τιμή του $|z+1-5i|$

7.607 Δίνονται οι μιγαδικοί z, w για τους οποίους ισχύουν οι σχέσεις:

$$|w| = 1 \text{ και } z = \frac{1+2w}{w-2}$$

α) Να αποδείξετε ότι η εικόνα του z βρίσκεται σε κύκλο με κέντρο το σημείο $K\left(-\dfrac{4}{3}, 0\right)$ και ακτίνα $\rho = \dfrac{5}{3}$
β) Αν z_1, z_2 είναι δύο από τους παραπάνω μιγαδικούς z, με $z_1 \neq z_2$, να αποδείξετε ότι ο αριθμός

$$u = \frac{3z_1 + 3z_2 + 8}{3z_1 - 3z_2}$$

είναι φανταστικός
γ) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο της εικόνας του $\dfrac{1}{z}$
δ) Να αποδείξετε ότι $|12z^2 + 7z - 12| = 25|z|$

7.608 Έστω $\alpha \in \mathbb{R}^*$ και οι μιγαδικοί αριθμοί $z \neq \alpha i$ και $w = \dfrac{z+\alpha i}{iz+\alpha}$. Να αποδείξετε ότι:
α) αν w είναι φανταστικός αριθμός, τότε και z είναι φανταστικός αριθμός
β) αν $|w| = 1$, τότε $z \in \mathbb{R}$
γ) αν $w \in \mathbb{R}$, να βρείτε το γεωμετρικό τόπο του z

7.609 Έστω οι μιγαδικοί z_1, z_2 και θεωρούμε τον μιγαδικό $w = |z_1 z_2|^2 + (z_1\overline{z_2} + \overline{z_1}z_2)i$ του οποίου η εικόνα βρίσκεται στην ευθεία $y = x$
α) Να αποδείξετε ότι η εικόνα του μιγαδικού $z_1\overline{z_2}$ βρίσκεται σε κύκλο με κέντρο το σημείο $K(1,0)$ και ακτίνα $\rho = 1$
β) Αν $z = 2+2i$ και $Im(z_1\overline{z_2}) > 0$, τότε:

ι) να βρείτε τους μιγαδικούς $z_1\overline{z_2}$ και $\overline{z_1}z_2$

ιι) να αποδείξετε ότι $(z_1\overline{z_2})^{20} + (\overline{z_1}z_2)^{20} = -2^{11}$

ιιι) αν Μ η εικόνα του z και Α, Β είναι οι εικόνες των $z_1\overline{z_2}$ και $\overline{z_1}z_2$, να αποδείξετε ότι $(MAB) = 1$

7.610 Έστω οι μιγαδικοί z, w για τους οποίους ισχύουν οι σχέσεις:

$$w = \left(\frac{4-3i}{3+4i}\right)^{13} + (2-i)^2 + 1 + 2i$$

$$\text{και } |z+3i| + |i \cdot \overline{z} + 3| = \sqrt{2}|1+i|$$

α) Να αποδείξετε ότι $Re(w) = 4$ και $Im(w) = -3$
β) Να αποδείξετε ότι η εικόνα του μιγαδικού z βρίσκεται σε κύκλο με κέντρο το σημείο $K(0,-3)$ και ακτίνα $\rho = 1$
γ) Να βρείτε ποιός από τους μιγαδικούς z έχει το μέγιστο και ποιός το ελάχιστο μέτρο
δ) Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή του $|z-w|$

7.611 Δίνεται η συνάρτηση $f(z) = z + i \cdot \overline{z}$, με $z \in \mathbb{C}$
α) Αν $z \neq 0$, να αποδείξετε ότι $\left|\frac{f(z)}{z}\right| \leq 2$
β) Να αποδείξετε ότι οι εικόνες των μιγαδικών $f(i), f(1+i)$ και η αρχή Ο των αξόνων είναι σημεία συνευθειακά
γ) Αν $f(z) \neq 0$, να αποδείξετε ότι $\left(\frac{\overline{f(z)}}{f(z)}\right)^{2014} = -1$
δ) Αν ισχύει $f(z) + \overline{f(z)} = 4$, να βρείτε:

ι) τον γεωμετρικό τόπο του z

ιι) την ελάχιστη τιμή του $|z|$

7.612 Έστω η συνάρτηση $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ για την οποία ισχύει:

$$2f(z) + f(1-z) = 3z^2 - 7z + 14, \text{ για κάθε } z \in \mathbb{C}$$

α) Να αποδείξετε ότι $f(z) = z^2 - 5z + 6$, για κάθε $z \in \mathbb{C}$
β) Να λύσετε την εξίσωση $f(z) = -5z + 9 + 4i$
γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(z) = 5 - 4z$ και να αποδείξετε ότι οι ρίζες της βρίσκονται στον μοναδιαίο κύκλο
δ) Να λύσετε την ανίσωση $f(z) > 0$
ε) Να αποδείξετε ότι $f(z)f(\overline{z}) \geq 0$, για κάθε $z \in \mathbb{C}$

7.613 Έστω η συνάρτηση $f(z) = \frac{2iz + 9 - 12i}{z - 2i}$, με $z \neq 2i$ και θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς $w_1 = z - 2i$ και $w_2 = f(z) - 2i$.
α) Να αποδείξετε ότι $w_1 w_2 = 5 - 12i$
β) Αν $w_1 = w_2$, να βρείτε τους w_1, w_2
γ) Να λύσετε τις εξισώσεις:

ι) $f(z) = 2 - 2i$ ιι) $f(z^2) = \frac{8-7i}{6+5i}$

δ) Αν $f(z) \in \mathbb{R}$, να βρείτε το γεωμετρικό τόπο του z

7.614 Δίνεται η συνάρτηση $f(z) = \frac{iz-1}{z+1}$, με $z \in \mathbb{C} - \{-1\}$
α) Να αποδείξετε ότι $(f(i))^{12} = -64$
β) Να βρείτε τον μιγαδικό z για τον οποίο ισχύει:

$$f(z) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$$

γ) Αν $|f(z)| = 1$ και $|f(w)| = 2$, να βρείτε την ελάχιστη τιμή του $|z-w|$

7.615 Δίνεται η συνάρτηση $f(z) = |z+2i|$, με $z \in \mathbb{C}$
α) Να αποδείξετε ότι:

ι) $f(\overline{z}) = |i \cdot \overline{z} + 2|$ ιι) $f(-z) = f(\overline{z})$

β) Αν ισχύει $f(1+i+z) = f(2+3i+z)$, να αποδείξετε ότι η εικόνα του μιγαδικού z βρίσκεται σε ευθεία της οποίας να βρείτε την εξίσωση
γ) Να αποδείξετε τις παρακάτω ισοδυναμίες:

ι) $f(z) = f(\overline{z}) \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$

ιι) $f^2(z) + f^2(\overline{z}) = 10 \Leftrightarrow |z| = 1$

δ) Να λύσετε την εξίσωση:

$$z + f(z-2i) = f^2(1-i) + if(i)$$

7.616 Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(z) = \frac{(z-i)(\overline{z}+i)}{z - \overline{z}}$, με $z \in \mathbb{C}$ και $Im(z) \neq 0$
α) Να αποδείξετε ότι $f(z) \in \mathbb{I}$
β) Να αποδείξετε ότι $f\left(\frac{1}{\overline{z}}\right) = f(z)$
γ) Θεωρούμε τους μιγαδικούς z για τους οποίους ισχύει:

$$f\left(\frac{1}{\overline{z}}\right) = \frac{z - \overline{z}}{2} + i$$

Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο:

ι) της εικόνας του z

ιι) της εικόνας του μιγαδικού $w = 2z^2 + 1$

7.617 Έστω οι μιγαδικοί z, w για τους οποίους ισχύει η σχέση $w + 2 + i = (1+i)|z|$
α) Αν $z = w$, να βρείτε τον μιγαδικό z
β) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών z αν είναι: ι) $w \in \mathbb{R}$ ιι) $w \in \mathbb{I}$
γ) Να αποδείξετε ότι $\sqrt{2}|z| \leq |w| + \sqrt{5}$

7.618 Έστω οι μιγαδικοί z, w για τους οποίους ισχύουν οι σχέσεις:

$$w = \frac{\sqrt{5}z}{|z|} \text{ και } w^2 = 3 + \lambda i, \text{ με } \lambda > 0$$

α) Να αποδείξετε ότι $\lambda = 4$
β) Να αποδείξετε ότι $5z - (3+4i)\overline{z} = 0$
γ) Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο του z
δ) Να βρείτε την ελάχιστη τιμή του $|z - 3 + 4i|$

7.619 Έστω οι μιγαδικοί z, w για τους οποίους ισχύουν οι σχέσεις:

$$|z + 2i| = |w + 2i| = 2 \text{ και } |z - w| = 4$$

Να αποδείξετε ότι:
α) οι διανυσματικές ακτίνες των μιγαδικών z και w είναι κάθετες μεταξύ τους
β) $|z + w| = 4$ γ) αν $|w| = 1$, τότε $|z + 3w| = 2\sqrt{3}$

7.620 Έστω οι μιγαδικοί z, w για τους οποίους ισχύουν οι σχέσεις:

$$\frac{z}{1+i} + \frac{\overline{z}}{1-i} = 2 \text{ και } Re(w^2) + (Im(w))^2 = Re(w)$$

α) Να αποδείξετε ότι $z = 2i$ και $w = 1 + i$
β) Να αποδείξετε ότι $(w - z)^{30} + w^{30} = 0$
γ) Να βρείτε τον θετικό ακέραιο n για τον οποίο ισχύει η σχέση:

$$3\left(\frac{z}{2}\right)^n = 4n - 27$$

δ) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών $u = \lambda w + (\lambda - 1)z$, με $\lambda \in \mathbb{R}$

7.621 Έστω οι μιγαδικοί $z \neq 0$ και $w = -\frac{1}{\overline{z}}$ και M, N οι εικόνες των z, w αντίστοιχα.
α) Να αποδείξετε ότι τα σημεία O, M, N είναι συνευθειακά
β) Να αποδείξετε ότι $\overline{w} + 1 = \frac{z-1}{z}$
γ) Αν $|z - 1| = 1$, να αποδείξετε ότι $|w + 1| = |w|$
δ) Να βρείτε την ελάχιστη τιμή του $|w|$

7.622 Έστω z_1, z_2 οι ρίζες της εξίσωσης $z + \frac{1}{z} = 0$ και θεωρούμε τους μιγαδικούς w για τους οποίους ισχύει η σχέση:

$$|wz_1| + |\overline{w}z_2| = |z_1 - z_2|$$

α) Να βρείτε τους μιγαδικούς z_1, z_2 και να αποδείξετε ότι $z_1^{2n} = z_2^{2n}$, με $n \in \mathbb{N}$
β) Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών w
γ) Αν w_1, w_2 είναι δύο από τους παραπάνω μιγαδικούς w, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{w_1 - w_2}{1 + w_1 w_2} \in \mathbb{I}$$

δ) Να αποδείξετε ότι $4 \leq |w - 3 + 4i| \leq 6$

7.623 Θεωρούμε τους μιγαδικούς z, w για τους οποίους ισχύουν οι σχέσεις:

$$z + w = 2 \text{ και } z - 2\overline{w} = -1 - i$$

α) Να βρείτε τους μιγαδικούς z και w
β) Να αποδείξετε ότι $z^{30} + w^{30} = 0$
γ) Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο της εικόνας του μιγαδικού u για τον οποίο ισχύει:

$$|u - z|^2 + |u - w|^2 = 4$$

δ) Θεωρούμε τον αριθμό:

$$v = \left(u - 1 - \frac{1}{u-1}\right)^4$$

Να αποδείξετε ότι: ι) $v \in \mathbb{R}$ ιι) $v \leq 16$

7.624 Έστω οι μιγαδικοί z, w για τους οποίους ισχύουν οι σχέσεις:

$$|z + 2| = |iz + 2| \text{ και } w = \lambda(-1 + i) + \frac{2+i}{i}, \text{ με } \lambda \in \mathbb{R}$$

α) Να βρείτε τους γεωμετρικούς τόπους των εικόνων των μιγαδικών z και w
β) Να αποδείξετε ότι $|z - w| \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$
γ) Θεωρούμε τους μιγαδικούς u με $|4u + 1 + 3i| = \sqrt{10}$

ι) να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο του u

ιι) να βρείτε τους μιγαδικούς v_1, v_2 των οποίων οι εικόνες είναι τα κοινά σημεία των γεωμετρικών τόπων των μιγαδικών w και u

ιιι) να αποδείξετε ότι $|v_1|^2 + |v_2|^2 = \frac{5}{2}$

7.625 Δίνεται η συνάρτηση $f(z) = \frac{1}{2}(z + i \cdot \overline{z})$, με $z \in \mathbb{C}$
α) Αν είναι $f(z) = z$, να βρείτε το γεωμετρικό τόπο του μιγαδικού z
β) Να αποδείξετε ότι $f(f(z)) = f(z)$
γ) Να αποδείξετε ότι $\frac{f(z) - z}{1 - i} = \frac{1}{2}(Im(z) - Re(z))$

7.626 Έστω η συνάρτηση $f(z) = -iz - (1 + i)\overline{z}$, με $z \in \mathbb{C}$
α) Να υπολογίσετε τους αριθμούς $f(1-i)$ και $f(2+i)$
β) Να λύσετε την εξίσωση $f(z) = f(1 + i)$
γ) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο του z για τον οποίο ισχύει $f(z) = z$
δ) Να αποδείξετε ότι:

ι) $f\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{f(\overline{z})}{z\overline{z}}$ ιι) αν $f(z) \in \mathbb{I}$, τότε $z \in \mathbb{I}$

ιιι) αν $f(z) = f(\overline{z})$, τότε $z \in \mathbb{R}$

7.627 Θεωρούμε τον μιγαδικό αριθμό z για τον οποίο ισχύει η σχέση:

$$4(Re(z))^2 - z^2 - \overline{z}^2 = 2$$

α) Να αποδείξετε ότι $|z| = 1$
β) Αν $z \neq i$ και $u \in \mathbb{C}$, να αποδείξετε ότι ο αριθμός

$$w = \frac{u + iz\overline{u} - z - i}{z - i}$$

είναι φανταστικός
γ) Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των μιγαδικών m για τους οποίους ισχύει $m(z-1) = 3(i-z)$

7.628 Έστω οι μιγαδικοί z για τους οποίους ισχύει η σχέση:

$$Re\left(\frac{z}{z-1}\right) = Im\left(\frac{z}{z-1}\right)$$

α) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο του z
β) Να βρείτε το μιγαδικό z_0 ο οποίος έχει το ελάχιστο μέτρο
γ) Να υπολογίσετε την παράσταση $\left(\frac{z_0}{\sqrt{2}}\right)^{2016}$

7.629 Θεωρούμε τον μιγαδικό $z = 2 + \sqrt{3}\eta\mu\theta - i\sqrt{3}\sigma\upsilon\nu\theta$, με $\theta \in \mathbb{R}$ και τους μιγαδικούς $w \notin \mathbb{R}$ για τους οποίους ισχύει $|w| = \lambda w + \overline{w}$, με $\lambda \in \mathbb{R}$
α) Να αποδείξετε ότι οι εικόνες του z βρίσκονται σε κύκλο με κέντρο το σημείο K(2,0) και ακτίνα $\rho = \sqrt{3}$
β) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο του w
γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $z = w$ έχει ακριβώς δύο λύσεις
δ) Να βρείτε τη μέγιστη τιμή του $|z - \overline{z}|$

7.630 Έστω οι μιγαδικοί z για τους οποίους ισχύει η σχέση:

$$(2z - 3i)^5 - (z - 3i)^5 = 0$$

α) Να αποδείξετε ότι:

ι) $|z - i| = 1$ ιι) αν $z \neq i$, τότε $\left(z - i - \frac{1}{z - i}\right)^5 \in \mathbb{I}$

β) Αν z_1, z_2 είναι δύο από τους παραπάνω μιγαδικούς z με $|z_1 - z_2| = \sqrt{2}$, να αποδείξετε ότι $|z_1 + z_2| \leq \sqrt{14}$

7.631 Δίνεται η συνάρτηση $f(z) = \frac{z + 2i}{z - 2}$, με $z \neq 2$
α) Να βρείτε τον αριθμό $(f(2 - 2i))^{2016}$
β) Αν ο αριθμός $f(z)$ είναι φανταστικός, τότε:

ι) να αποδείξετε ότι οι εικόνες του z βρίσκεται σε κύκλο, του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα

ιι) να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή του $|z|$

ιιι) να αποδείξετε ότι ο αριθμός

$$w = z - 1 + i + \frac{2}{z - 1 + i}$$

είναι πραγματικός, με $-2\sqrt{2} \leq w \leq 2\sqrt{2}$

7.632 Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z για τους οποίους ισχύει $|z - 3i| = |z + 1 - 2i|$
α) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών z
β) Να βρείτε τους μιγαδικούς z_1, z_2 με $Im(z_1) > 0$, των οποίων οι εικόνες απέχουν $\sqrt{10}$ από την εικόνα του $-2i$
γ) Αν $w = \frac{1}{z_1} + \frac{iz_2}{2}$, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο με κορυφές τις εικόνες των $-\overline{w}, w^2, w^3$ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές

7.633 Έστω οι μιγαδικοί $z_1 = 1 - 2i$ και $z_2 = 3 + 4i$
α) Να βρείτε το πραγματικό και το φανταστικό μέρος του $\frac{z_2}{z_1}$
β) Να βρείτε τις τιμές των $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$ για τις οποίες η εξίσωση $x^2 + \beta x + \gamma = 0$ έχει ρίζα τον αριθμό $\frac{z_2}{z_1}$
γ) Θεωρούμε τους μιγαδικούς z για τους οποίους ισχύει $|z - \beta z_1| = \gamma$

ι) Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων του z

ιι) Να αποδείξετε ότι η εικόνα του μιγαδικού $\frac{iz_2}{z_1}$ ανήκει στον παραπάνω γεωμετρικό τόπο

ιιι) Αν $w = \frac{iz - 4 - 27i}{z - \overline{z_2}}$, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{w + 5i}{w - 5i} \in \mathbb{I}$$

7.634 Έστω οι πραγματικοί αριθμοί α, β με $\beta - 3\alpha = 25$ και θεωρούμε τους μιγαδικούς z, w με $w = \alpha + \frac{\beta}{4}i$ και $|iz - 3i - 4| = 5$.
α) Να βρείτε τους γεωμετρικούς τόπους των μιγαδικών z και w
β) Να βρείτε τον μιγαδικό z που έχει το μέγιστο μέτρο
γ) Να βρείτε την ελάχιστη τιμή του $|z - w|$
δ) Να αποδείξετε ότι $1 \leq |z - 3| \leq 9$

7.635 Δίνεται η εξίσωση $z^2 - 2z + \lambda^2 + 3 = 0$, με $\lambda \in \mathbb{R}$
α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση αυτή δεν έχει πραγματικές ρίζες
β) Αν M, N οι εικόνες των ριζών z_1, z_2 της εξίσωσης αυτής και είναι $(OMN) = \sqrt{3}$, τότε:

ι) να βρείτε την τιμή του λ και τις ρίζες z_1, z_2

ιι) να αποδείξετε ότι $z_1^3 = z_2^3 = -8$

ιιι) να αποδείξετε ότι $z_1^{2013} + z_2^{2013} = -2^{2014}$

7.636 Θεωρούμε τον μιγαδικό w για τον οποίο ισχύει η σχέση:

$$(w + \overline{w})(3 - 2i) + (w - \overline{w})(5 - i) = 8 + 6i$$

α) Να βρείτε τον αριθμό w

β) Θεωρούμε τον μιγαδικό αριθμό $z_1 = \left(\dfrac{w}{\sqrt{2}}\right)^{50}$ και τους μιγαδικούς z για τους οποίους ισχύει η σχέση $|z - z_1| = |z - |z_1||$

ι) Να βρείτε το $Re(z_1)$ και το $Im(z_1)$

ιι) Να αποδείξετε ότι $Re(z) = Im(z)$

ιιι) Αν $z \neq 0$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης

$$A = \frac{z}{\overline{z}} + \frac{\overline{z}}{z}$$

7.637 Δίνεται η εξίσωση $z^2 - 2\alpha z + 2\alpha^2 = 0$, με $\alpha > 0$, η οποία έχει ρίζες τους μιγαδικούς z_1, z_2 με $Im(z_1) > 0$
α) Να βρείτε τις ρίζες z_1, z_2 και να αποδείξετε ότι $z_1 = iz_2$
β) Αν $n \in \mathbb{N}$, να αποδείξετε ότι $z_1^{4n+2} + z_2^{4n+2} = 0$
γ) Αν $z_1^4 = -4$, να βρείτε την τιμή του α
δ) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο με κορυφές τις εικόνες των ριζών z_1, z_2 και την αρχή των αξόνων είναι ορθογώνιο και ισοσκελές

7.638 Έστω η συνάρτηση $f(z) = \dfrac{3Re(z) + 4Im(z)}{z}$, με $z \in \mathbb{C}^*$
α) Αν $|f(z)| = 3$, να βρείτε το γεωμετρικό τόπο του μιγαδικού z
β) Αν $Re(z) = \lambda Im(z)$, με $\lambda \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι:

ι) $|f(z)| = \dfrac{|3\lambda + 4|}{\sqrt{\lambda^2 + 1}}$ ιι) $|f(z)| \leq 5$

7.639 Δίνεται ο μιγαδικός $z = \dfrac{\sigma\upsilon\nu\theta - i\eta\mu\theta}{\eta\mu\theta + i\sigma\upsilon\nu\theta}$, με $\theta \in \mathbb{R}$
α) Να αποδείξετε ότι $z = -i$
β) Να βρείτε τις τιμές του $n \in \mathbb{N}$, για τις οποίες είναι:

$$(1 - z)^n = (1 + z)^n$$

γ) Να αποδείξετε ότι $1 + z + z^2 + \cdots + z^{99} = 0$

7.640 Θεωρούμε την εξίσωση $z^2 + 6z + 10 = 0$, η οποία έχει ρίζες τους αριθμούς z_1, z_2, με $Im(z_1) < 0$.
α) Να βρείτε τις ρίζες z_1, z_2 της παραπάνω εξίσωσης
β) Έστω $w \in \mathbb{C}$, ώστε να είναι $|w - z_1| = |w + z_2 - 6i|$, τότε:

ι) να βρείτε το γεωμετρικό τόπο του w

ιι) να βρείτε τον μιγαδικό w ο οποίος έχει το ελάχιστο μέτρο

ιιι) να αποδείξετε ότι $(w - 2)^{2014} \in \mathbb{I}$

7.641 Δίνεται η εξίσωση $2z^2 + 2z + 1 = 0$
α) Να λύσετε την παραπάνω εξίσωση
β) Αν z_1 η ρίζα της εξίσωσης με $Im(z_1) > 0$, να υπολογίσετε τους αριθμούς z_1^2 και z_1^3
γ) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο με κορυφές τις εικόνες των z_1, z_1^2, z_1^3 είναι ορθογώνιο του οποίου να υπολογίσετε το εμβαδό.

7.642 Η εξίσωση $z^2 + \kappa z - \lambda = 0$, με $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$ έχει ρίζες τους μιγαδικούς z_1 και $z_2 = 1 + \dfrac{2}{i^{2013}}$.
α) Να αποδείξετε ότι $\lambda < 0$
β) Να βρείτε τις τιμές των κ, λ
γ) Να αποδείξετε ότι $Im(z_1^{2015} + z_2^{2015}) = 0$ και $Re(z_1^{2015} - z_2^{2015}) = 0$
δ) Να βρείτε την ελάχιστη τιμή της παράστασης $|w - z_1| + |w - z_2|$, με $w \in \mathbb{C}$
ε) Αν $(1 + iu)^n = \dfrac{z_1}{z_2}$, με $n \in \mathbb{N}^*$, να αποδείξετε ότι $u \notin \mathbb{R}$

7.643 Έστω ο μιγαδικός $z = \dfrac{1}{2 + \alpha i}$, με $\alpha \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:
α) $z + \overline{z} = 4z\overline{z}$
β) ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών z είναι κύκλος (C) με κέντρο το σημείο $K\left(\dfrac{1}{4}, 0\right)$ και ακτίνα $\rho = \dfrac{1}{4}$
γ) οι εικόνες των μιγαδικών z και $w = \dfrac{\alpha}{2\alpha - 4i}$ είναι αντιδιαμετρικά σημεία του κύκλου (C)
δ) οι εικόνες των μιγαδικών

$$\frac{1}{2 + i}, \frac{1}{2 - 4i} \text{ και } \frac{1}{2 + 2010i}$$

είναι κορυφές ορθογωνίου τριγώνου

7.644 Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί $z_1 = \eta\mu\theta + i\sigma\upsilon\nu\theta$ και $z_2 = \sigma\upsilon\nu\theta - i\eta\mu\theta$, με $\theta \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:

α) $z_1 = iz_2$ και $|z_1| = |z_2|$
β) αν $w = \frac{z_1}{z_2}$, τότε:

ι) $1 + w^{101} + w^{102} + w^{103} = 0$

ιι) $(1+w)^{100} = (1-w)^{100}$

γ) το τρίγωνο με κορυφές την αρχή των αξόνων και τις εικόνες των z_1, z_2 είναι ορθογώνιο
δ) $4 \leq |z_1 - 3 - 4i| \leq 6$
ε) οι εικόνες των ριζών της εξίσωσης $z^3 + w^2 = 0$ είναι κορυφές ισοπλεύρου τριγώνου
ζ) αν z_3 μια μη πραγματική ρίζα της προηγούμενης εξίσωσης, τότε $z_3^{90} = 1$ και $z_3 + \frac{1}{z_3} = -1$

7.645 Έστω οι μιγαδικοί z, w για τους οποίους ισχύουν οι σχέσεις $|z-2-i| = 1$ και $|w+1+i| = 2$. Να βρείτε:
α) την μέγιστη και την ελάχιστη απόσταση των εικόνων των μιγαδικών z και w
β) την μέγιστη τιμή του $|z + 2w|$
γ) την ελάχιστη τιμή του $|z - 1 + 2i|$

7.646 Έστω οι μιγαδικοί z, w με $|z - w| = |z|$ και $|w| = 1$
α) Να αποδείξετε ότι $Re(z\overline{w}) = \frac{1}{2}$
β) Να βρείτε την τιμή του $\lambda > 0$ για την οποία είναι $w = (1 - 2\lambda i)z$
γ) Για $\lambda = \frac{1}{2}$, να αποδείξετε ότι:

ι) $|z| = \frac{\sqrt{2}}{2}$

ιι) το τρίγωνο με κορυφές τις εικόνες των z, w και την αρχή των αξόνων είναι ορθογώνιο και ισοσκελές

7.647 Έστω $z, w \in \mathbb{C}$, με $w \neq 0$ και $|z + w| = |z - w|$. Να αποδείξετε ότι:
α) ο αριθμός $\frac{z}{w}$ είναι φανταστικός
β) αν $z \neq w$, τότε $\left|\frac{iz}{z-w}\right| + \left|\frac{\overline{w}}{z+w}\right| \geq 1$
γ) αν $w = 1 + i$, τότε η εικόνα του z βρίσκεται στην ευθεία με εξίσωση $y = -x$

7.648 Έστω $z, w \in \mathbb{C}$, με $|z| = |w| = \sqrt{2}$.
α) Να αποδείξετε ότι $\overline{z} = \frac{2}{z}$
β) Να αποδείξετε ότι $|z+w+zw-2| = |z+w-zw+2|$
γ) Να αποδείξετε ότι:

$$z + w + zw - 2 = 0 \Leftrightarrow z + w - zw + 2 = 0$$

δ) Αν $z + w = 2$, να βρείτε τους z, w

7.649 Έστω η συνάρτηση $f(z) = \frac{z - i|z|}{z + i|z|}$
α) Να βρείτε τις τιμές του $z \in \mathbb{C}$ για τις οποίες ορίζεται η συνάρτηση $f(z)$
β) Να βρείτε τον αριθμό $[f(-1)]^{2014}$
γ) Να αποδείξετε ότι $f(z) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z \in \mathbb{I}$

7.650 Έστω η συνάρτηση $f(z) = \frac{z(z-2i)}{|z-2|}$, με $z \in \mathbb{C}-\{2\}$.
Να βρείτε:
α) το μέτρο του μιγαδικού $f(1-i)$
β) το γεωμετρικό τόπο του μιγαδικού z, όταν:

ι) $f(z) \in \mathbb{R}$ ιι) $|f(z)| = |z|$

7.651 Θεωρούμε την εξίσωση $z^2 + \alpha z + \beta = 0$, με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, η οποία έχει ρίζα τον αριθμό $z_1 = \frac{5 + 3\sqrt{3}i}{1 - 2\sqrt{3}i}$
α) Να βρείτε το πραγματικό και το φανταστικό μέρος του μιγαδικού z_1
β) Να αποδείξετε ότι $z_1^3 = 8$
γ) Να βρείτε τις τιμές των α, β
δ) Αν Α, Β είναι οι εικόνες των ριζών της αρχικής εξίσωσης και Γ(2,0), να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο

7.652 Δίνεται η συνάρτηση $f(z) = \frac{iz - 2 + 4i}{z - i}$, με $z \neq i$ και θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς $u = z - i$ και $w = f(z) - i$.
α) Να αποδείξετε ότι $uw = -3 + 4i$
β) Να λύσετε την εξίσωση $z^2 = uw$
γ) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο της εικόνας του z, όταν $f(z) \in \mathbb{R}$

7.653 Για τους μιγαδικούς z, w ισχύουν αντίστοιχα οι σχέσεις:

$$|z - 12 - 6i| = |z - 4| \text{ και } 2|w + i|^2 = |w - i|^2 + 17$$

α) Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων του z και τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων του w
β) Να βρείτε την ελάχιστη τιμή του $|z - w|$

7.654 Οι μη μηδενικοί μιγαδικοί αριθμοί z, w ικανοποιούν τη σχέση:

$$\frac{z}{w} + \frac{w}{z} = 1$$

Να αποδείξετε ότι:
α) $z^3 + w^3 = 0$ β) $|z| = |w|$
γ) το τρίγωνο με κορυφές τις εικόνες των z, w και την αρχή των αξόνων, είναι ισόπλευρο
δ) $\left(\frac{z}{w}\right)^{20} + \left(\frac{w}{z}\right)^{20} = -1$

7.655 Δίνεται ο μιγαδικός $z = x + yi$, με $x, y \in \mathbb{R}$ και θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$f(z) = \left(2 + \frac{3}{2}i\right)z - \frac{5}{2}\overline{z}i$$

α) Να βρείτε τα $Re(f(z))$ και $Im(f(z))$
β) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των μιγαδικών $f(z)$
γ) Να αποδείξετε ότι $|f(z)| = |x - 2y|\sqrt{5}$
δ) Αν $|f(z)| = \sqrt{5}$, να βρείτε το γεωμετρικό τόπο του z

7.656 Έστω $z, w \in \mathbb{C}$, για τους οποίους ισχύουν οι σχέσεις:

$$|zi - 12| = |3\bar{z} - 4i| \text{ και } w = \frac{z-8}{z-2}$$

α) Να βρείτε τα μέτρα των μιγαδικών z και w
β) Να αποδείξετε ότι $\frac{w^2+4}{w} \in \mathbb{R}$
γ) Να βρείτε την ελάχιστη και τη μέγιστη τιμή της παράστασης $|w - 3 + 4i|$

7.657 Δίνεται ο μιγαδικός $z \neq 1$ και θεωρούμε τον μιγαδικό $w = \frac{2 + i \cdot \bar{z}}{1 - \bar{z}}$.
α) Αν $z = 2$, να αποδείξετε ότι $w^{2012} \in \mathbb{R}$
β) Να αποδείξετε ότι $\frac{w-2}{w+i} = \bar{z}$
γ) Αν η εικόνα του z βρίσκεται στον μοναδιαίο κύκλο, να βρείτε τη γραμμή στην οποία βρίσκεται η εικόνα του w
δ) Αν ο w είναι πραγματικός, να βρείτε το γεωμετρικό τόπο του z

7.658 Έστω η συνάρτηση $f(z) = \frac{5 - 12i - 2iz}{z - 2i}$, με $z \neq 2i$
α) Να λύσετε τις εξισώσεις $f(z) = z$ και $f(z) = 5+2i$
β) Αν $f(z) \in \mathbb{R}$, να βρείτε το γεωμετρικό τόπο του z

7.659 Δίνεται η συνάρτηση $f(n) = 1 + i + i^2 + \cdots + i^n$, με $n \in \mathbb{N}^*$
α) Να αποδείξετε ότι $|f(n)| \leq \sqrt{2}$
β) Να βρείτε τις τιμές του n ώστε να είναι $f(n) = 0$

7.660 Δίνεται η συνάρτηση $f(z) = (z - i)(\bar{z} + 1)$, με $z \in \mathbb{C}$
α) Να υπολογίσετε τον αριθμό $\left(\frac{f(-i)}{\overline{f(1)}}\right)^{2015}$
β) Να αποδείξετε ότι $f(-\bar{z}i) = f(z)$, για κάθε $z \in \mathbb{C}$
γ) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο του z, αν είναι $Re(f(z)) = Re(z + \bar{z}i)$

7.661 Έστω η συνάρτηση $f(z) = |z + i|$ και θεωρούμε τους μιγαδικούς z για τους οποίους ισχύει η σχέση $f(z) = 2f(-z)$
α) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο του μιγαδικού z
β) Να αποδείξετε ότι $|3z - 5i| = 4$
γ) Να βρείτε τους μιγαδικούς z που έχουν το ελάχιστο και το μέγιστο μέτρο
δ) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο του μιγαδικού $w = z - 3$

7.662 Έστω οι μιγαδικοί $z \neq 2i$ και $f(z) = \frac{z^3 + 8i}{z - 2i}$
α) Να αποδείξετε ότι $f(z) = z^2 + 2iz - 4$
β) Να βρείτε το μέτρο του μιγαδικού $f(1 + i)$
γ) Να λύσετε τις εξισώσεις:

ι) $f(z) = |z|^2 + 2iz - 4$ ιι) $f(z) = 2iz + \bar{z} - 6$

δ) Αν $|z| = 1$, να αποδείξετε ότι οι εικόνες των μιγαδικών $f(z)$ είναι σημεία του κυκλικού δίσκου με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα $\rho = 7$

7.663 Έστω $z \in \mathbb{C}^*$ και η συνάρτηση $f(z) = \frac{2z - 1}{z^2}$
α) Να λύσετε την εξίσωση $f\left(\frac{1}{z}\right) = 2$
β) Να αποδείξετε ότι $f(z) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$ ή $Re(z) = |z|^2$
γ) Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των μιγαδικών z, για τους οποίους είναι $f(z) \in \mathbb{R}$
δ) Να αποδείξετε ότι οι εικόνες των ριζών της εξίσωσης του πρώτου ερωτήματος δεν είναι σημεία του γεωμετρικού τόπου που βρήκατε στο τρίτο ερώτημα.

7.664 Έστω η συνάρτηση $f(n) = i^n z$, με $n \in \mathbb{N}$ και $z \in \mathbb{C}$
α) Να αποδείξετε ότι:

$$f(4n) + f(4n+1) + f(4n+2) + f(4n+3) = 0$$

β) Αν η εικόνα του μιγαδικού $f(8) - f(3)$ ανήκει σε κύκλο κέντρου K(1,1) και ακτίνα $\rho = 4$, να βρείτε το γεωμετρικό τόπο του z
γ) Αν $z = 1 + i\sqrt{3}$, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο που έχει κορυφές τους μιγαδικούς $0, z, f(4n+3)$ είναι ορθογώνιο, του οποίου να υπολογίσετε το εμβαδό

7.665 Έστω η συνάρτηση $f(z) = \frac{z + 2i}{\bar{z} - 2i}$, με $z \in \mathbb{C} - \{-2i\}$
α) Να αποδείξετε ότι $|f(z)| = 1$, με $z \neq -2i$
β) Αν είναι $\overline{f(z)} = f(\bar{z})$, να αποδείξετε ότι $z \in \mathbb{I}$
γ) Αν $z_0 = 2i^3 - 2f(i)$, τότε:

ι) να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο του w, αν είναι

$$|w + z_0| = \left|\frac{if(z_0)z_0}{1 + i\sqrt{3}}\right|$$

ιι) να βρείτε τους μιγαδικούς w οι οποίοι έχουν το μέγιστο και το ελάχιστο μέτρο

7.666 Δίνεται η συνάρτηση $f(z) = z^2 + 2z + 3$, με $z \in \mathbb{C}$
α) να βρείτε τους $x, y \in \mathbb{R}$, ώστε $f(x - 2yi) = 2$
β) να λύσετε την εξίσωση $f(z) = 0$
γ) να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, ώστε η εξίσωση $f(z) = \alpha z + \beta$, να έχει ρίζα τον $1 - 2i$
δ) αν z_1 η ρίζα της εξίσωσης $f(z) = 2z + 2$, με $Im(z_1) < 0$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $A = z_1^{53} + \frac{1}{z_1^{74}}$

7.667 Δίνεται η εξίσωση $z^2 - 2\sigma\upsilon\nu t \cdot z + 5 - 4\eta\mu t = 0$, με $t \in [0, \pi]$
α) Να βρείτε τις ρίζες z_1, z_2 της παραπάνω εξίσωσης
β) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των z_1, z_2
γ) Να βρείτε τις μέγιστες τιμές των παραστάσεων $|z_1 - z_2|$ και $|z_1 + z_2|$

7.668 Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(z) = \dfrac{2z - i \cdot \overline{z}}{z - 1}$, με $z \neq 1$. Να αποδείξετε ότι:
α) $f(1-i) = 3 + 3i$ β) $(f(1-i))^{2016} \in \mathbb{R}$
γ) το τρίγωνο με κορυφές τις εικόνες των μιγαδικών $f(1-i), f(1+i)$ και την αρχή O των αξόνων είναι ορθογώνιο στο O

7.669 Έστω ο μιγαδικός $z \in \mathbb{C} - \{-1, 0\}$ και ο μιγαδικός $f(z) = \dfrac{z-1}{z+1}$
α) Να υπολογίσετε τον αριθμό $(f(i))^{90}$
β) Να αποδείξετε ότι $f(z) + f\left(\dfrac{1}{z}\right) = 0$
γ) Αν είναι $f(z) = f(\overline{z})$, να αποδείξετε ότι $z \in \mathbb{R}$
δ) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο του z, για τον οποίο ισχύει $|f(z)| = |f(2i)|$

7.670 Έστω οι μιγαδικοί z_1, z_2, w ώστε:

$$|z_1| = |z_2| = 2, z_1^2 + z_2^2 \neq 0 \text{ και } w = \frac{2z_1 z_2}{z_1^2 + z_2^2}$$

α) Να αποδείξετε ότι: ι) $w \in \mathbb{R}$ ιι) $\left|\dfrac{z_1}{z_2} + \dfrac{z_2}{z_1}\right| \leq 2$
β) Αν $w = 2$, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο που έχει κορυφές τις εικόνες των z_1, z_2 και την αρχή των αξόνων είναι ισόπλευρο

7.671 Θεωρούμε την εξίσωση $|2w + 1| - 4w = 1 + 8i$
α) Να βρείτε τη λύση w της παραπάνω εξίσωσης
β) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων του z, για τους οποίους ισχύει η σχέση:

$$z\overline{z} + 4Re(zw) + 2 = -i^{56} - i^{72}$$

γ) Αν οι μιγαδικοί z_1, z_2 ανήκουν στο γεωμετρικό τόπο του προηγούμενου ερωτήματος, να βρείτε τη μέγιστη τιμή του $|z_1 - z_2|$

7.672 Η εξίσωση $3z^2 + \lambda z + \mu = 0$, με $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, έχει ρίζες τους αριθμούς $z_1 = 1 + i$ και z_2. Να αποδείξετε ότι:
α) $\lambda = -6$ και $\mu = 6$
β) $z_1^2 + z_2^2 = 0$ και $z_1^{2016} + z_2^{2016} = 2^{1009}$

7.673 Δίνεται ο μιγαδικός $z \neq 0$, για τον οποίο ισχύει η σχέση $z^3 + |z| = 0$ (1)
α) Να υπολογίσετε το μέτρο του μιγαδικού z
β) Να λύσετε την εξίσωση (1)
γ) Αν z_1, z_2 οι μη πραγματικές ρίζες της εξίσωσης (1), να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $A = z_1^{2013} + z_2^{2013}$

7.674 Έστω οι μιγαδικοί z, w ώστε $|z| = 1$ και $w = \overline{z}^2 + iz$
α) Να εκφράσετε το $|w|$ ως συνάρτηση του $Im(z)$
β) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο της εικόνας του μιγαδικού $u = w - iz$
γ) Να βρείτε τον μιγαδικό z ώστε το $|w|$ να είναι μέγιστο

7.675 Έστω οι μιγαδικοί z, για τους οποίους ισχύει η σχέση $|z|^2 + z(1+i) + \overline{z}(1-i) + 1 = 0$ (1)
α) Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών z
β) Να αποδείξετε ότι $\sqrt{2} - 1 \leq |z| \leq \sqrt{2} + 1$
γ) Αν z_1, z_2 είναι δύο μιγαδικοί που ικανοποιούν τη σχέση (1), να βρείτε τη μέγιστη τιμή της παράστασης $|z_1 - z_2|$

7.676 Έστω ο μιγαδικός $z = x + yi$, με $x, y \in \mathbb{R}$ και $z \neq -2i$. Αν $w = \dfrac{z-2}{z+2i}$, τότε:
α) Να αποδείξετε ότι $Re(w) = \dfrac{x^2 + y^2 - 2x + 2y}{x^2 + (y+2)^2}$ και $Im(w) = \dfrac{-2x + 2y + 4}{x^2 + (y+2)^2}$
β) Αν ο w είναι πραγματικός, να βρείτε:
ι) το γεωμετρικό τόπο του z
ιι) την ελάχιστη τιμή του $|z|$
ιιι) τον μιγαδικό z με το ελάχιστο μέτρο
γ) Αν ο w είναι φανταστικός, να βρείτε:
ι) το γεωμετρικό τόπο του z
ιι) την ελάχιστη και μέγιστη τιμή του $|z|$
ιιι) τους μιγαδικούς z_1, z_2 με το ελάχιστο και μέγιστο μέτρο

7.677 Δίνονται οι μιγαδικοί z, w με $w = \dfrac{z - 2i}{\overline{z} - 2}$
α) Αν $z = 3 - i$, να υπολογίσετε τον αριθμό w^{100}
β) Αν ο w είναι φανταστικός, να βρείτε το γεωμετρικό τόπο της εικόνας του z
γ) Αν ο w είναι φανταστικός και $Re(z) \neq Im(z)$, να βρείτε την ελάχιστη τιμή του $|z|$
δ) Αν $Re(z) = Im(z)$, να βρείτε τον μιγαδικό w

7.678 Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z για τους οποίους ισχύει η σχέση:

$$|z - 2 - 3i|^2 + |i \cdot \overline{z} - 3 - 6i|^2 = 16$$

α) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο του z
β) Να βρείτε το μέτρο $|(4-3i)z - 25|$
γ) Να βρείτε την μέγιστη και την ελάχιστη τιμή του

μέτρου του μιγαδικού z
δ) Θεωρούμε έναν μιγαδικό z_0 που ικανοποιεί τη δοσμένη σχέση και έστω w_1, w_2 οι ρίζες της εξίσωσης:

$$w^2 + 2(|z_0| - 5)w + 9 = 0$$

ι) Να αποδείξετε ότι $w_1, w_2 \notin \mathbb{R}$

ιι) Να βρείτε τα μέτρα των w_1, w_2

ιιι) Να αποδείξετε ότι $\dfrac{w_1 - 3i}{w_1 + 3i} \in \mathbb{I}$

7.679 Έστω $z \in \mathbb{C}$, με $z \neq 1$ και θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$f(z) = \frac{2 + i \cdot \bar{z}}{1 - \bar{z}}$$

α) Να βρείτε το μέτρο του μιγαδικού $f(2)$
β) Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $w = (f(2))^{2014}$ είναι πραγματικός
γ) Να αποδείξετε ότι $\left|\dfrac{f(z) - 2}{f(z) + i}\right| = |z|$
δ) Αν $|z| = 1$, να αποδείξετε ότι η εικόνα M του μιγαδικού $f(z)$, ανήκει σε ευθεία της οποίας να βρείτε την εξίσωση.

7.680 Έστω ο μιγαδικός $z \neq i$ και θεωρούμε τον μιγαδικό $f(z) = \dfrac{iz - 1}{z - i}$
α) Να αποδείξετε ότι $f(f(z)) = z$
β) Αν $f(z) = f(\bar{z})$, να αποδείξετε ότι $z \in \mathbb{R}$
γ) Αν $|f(z)| = 2$, να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών z
δ) Αν $|f(z_1)| = |f(z_2)| = 2$, να αποδείξετε ότι είναι $|z_1 - z_2| \leq \dfrac{8}{3}$

7.681 Δίνεται ο μιγαδικός $z = (2\eta\mu\alpha + 1) + (3 - 2\sigma\upsilon\nu\alpha)i$, με $\alpha \in \mathbb{R}$
α) Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο του z
β) Να βρείτε τους μιγαδικούς z οι οποίοι έχουν το ελάχιστο και το μέγιστο μέτρο
γ) Να βρείτε την ελάχιστη και τη μέγιστη απόσταση του z από την αρχή των αξόνων
δ) Να αποδείξετε ότι $3 \leq |z - 4 + i| \leq 7$

7.682 Έστω οι μιγαδικοί z για τους οποίους ισχύει η σχέση $|z + 8| = 2|2z + 1| \quad (1)$
α) Να αποδείξετε ότι $|z| = 2$
β) Να βρείτε την ελάχιστη και μέγιστη τιμή του μέτρου του μιγαδικού $2z + 1$
γ) Αν z_1, z_2 είναι δύο μιγαδικοί που ικανοποιούν τη σχέση (1), με $z_1 \neq -z_2$, να αποδείξετε ότι ο μιγαδικός $w = \dfrac{z_1^\nu + z_2^\nu}{(z_1 + z_2)^\nu}$ είναι πραγματικός

7.683 Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί α, β με $\alpha > \beta > 0$ και η εξίσωση $\alpha z^2 + 2\beta z + \alpha = 0$, η οποία έχει ρίζες τους αριθμούς z_1 και z_2.
α) Να βρείτε τους z_1 και z_2
β) Να βρείτε τα μέτρα των z_1 και z_2
γ) Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $w = \dfrac{z_1 + z_2}{z_1 - z_2}$ είναι φανταστικός
δ) Αν για τον μιγαδικό u ισχύει $(u - z_1)^\nu = (u - z_2)^\nu$, με $\nu \in \mathbb{N}^*$, να αποδείξετε ότι $u \in \mathbb{R}$

7.684 Έστω οι μιγαδικοί z, w για τους οποίους ισχύουν οι σχέσεις:

$$|z - i| = |2iz - 1| \text{ και } \left|1 + \frac{1+i}{w}\right| = 1$$

α) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο (C_1) του z
β) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο (C_2) του w
γ) Αν Μ, Ν είναι τα κοινά σημεία των (C_1) και (C_2), να αποδείξετε ότι $|\overrightarrow{OM}|^2 + |\overrightarrow{ON}|^2 = 4$

7.685 Έστω οι μιγαδικοί z για τους οποίους ισχύει η σχέση $|z - 2i| = |z|$
α) να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών z
β) από τους παραπάνω μιγαδικούς z, να βρείτε τους μιγαδικούς z_1, z_2 που έχουν μέτρο 2
γ) να αποδείξετε ότι $z_1^4 + z_2^4 = -16$

7.686 Έστω η συνάρτηση $f(z) = \dfrac{z - 3i}{z + 1}$, με $z \neq -1$
α) Αν z_0 είναι η ρίζα της εξίσωσης $f(z) = 2 - 2i$, να υπολογίσετε την παράσταση $A = (z_0^{2016} + i)^{4032}$
β) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο του z, αν είναι:

$$|f(z)| = \left(\frac{1 - \sqrt{3}i}{2}\right)^{300}$$

γ) Να υπολογίσετε την παράσταση $|f(z) - 1| \cdot |z + 1|$
δ) Αν η εικόνα του z κινείται σε κύκλο με κέντρο το σημείο K(-1,0) και ακτίνα $\sqrt{10}$, να βρείτε το γεωμετρικό τόπο της εικόνας του μιγαδικού $f(z)$

7.687 Δίνεται η συνάρτηση $f(z) = \dfrac{z^3 - i}{z + i}$, με $z \neq -i$
α) Να αποδείξετε ότι $f(z) = z^2 - iz - 1$
β) Αν η εξίσωση $f(z) = (2\alpha - i)z - \beta - 21$ έχει ρίζα τον αριθμό $3 + 4i$, να βρείτε:

ι) τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

ιι) τη μέγιστη τιμή του $n \in \mathbb{N}$, με $n < 100$, για την οποία είναι $(\alpha + \beta i)^n = (-5 + 3i)^n$

7.688 Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z, w για τους οποίους ισχύουν οι σχέσεις:

$$|2w+1|-4\overline{w}=1+8i \text{ και } z=w(\lambda-i), \text{ με } \lambda\in\mathbb{R}$$

α) Να βρείτε τον μιγαδικό w
β) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων του z
γ) Να βρείτε την ελάχιστη τιμή του $|z|$
δ) Αν οι μιγαδικοί z_1, z_2 ανήκουν στον παραπάνω γεωμετρικό τόπο, με $z_1 \neq z_2$ και $|z_1|=|z_2|$, να αποδείξετε ότι το άθροισμα z_1+z_2 είναι σταθερό

7.689 Έστω $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ με $z_1+z_2=1$ και $z_1^3+z_2^3=-2$
α) Να βρείτε τους z_1, z_2
β) Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου που έχει κορυφές τις εικόνες των μιγαδικών $0, z_1$ και z_2
γ) Να αποδείξετε ότι $z_1^{100}+z_2^{100}=-1$

7.690 Έστω οι μιγαδικοί z για τους οποίους ισχύει:

$$Re\left(2z+\frac{8}{z}\right)=4Re(z)$$

α) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών z
β) Αν είναι $Re(z)\neq 0$, να αποδείξετε ότι ο αριθμός $w=2z+\dfrac{8}{z}$ είναι πραγματικός και ότι $-8\leq w\leq 8$

7.691 Δίνεται η εξίσωση $z^2+\lambda z+\lambda=0$ (1) με $\lambda\in\mathbb{R}$, η οποία έχει ρίζες τους μιγαδικούς αριθμούς z_1 και z_2
α) Αν $w=\dfrac{z_1+z_2+i}{1+z_1z_2i}$, τότε:

ι) να αποδείξετε ότι $|w|=1$

ιι) να υπολογίσετε τον αριθμό w^{2012}

β) Αν η εξίσωση (1) έχει ρίζα τον αριθμό $\alpha+i$, να βρείτε την τιμή του λ και να λύσετε την εξίσωση αυτή

7.692 Θεωρούμε τους μιγαδικούς $z\neq 0$ και $w=z+\dfrac{\kappa}{z}$, με $\kappa\in\mathbb{R}$. Αν ο μιγαδικός $z_1=1-i\sqrt{3}$ είναι ρίζα της εξίσωσης $w=\lambda$, (1) με $\lambda\in\mathbb{R}$, τότε:
α) να βρείτε τις τιμές των κ, λ και να λύσετε την εξίσωση (1)
β) να αποδείξετε ότι οι ρίζες της εξίσωσης (1) είναι ρίζες της εξίσωσης $z^3+8=0$
γ) να βρείτε τον ελάχιστο θετικό ακέραιο n για τον οποίο ισχύει $(iz_1)^{3n}=i(\overline{z_1})^{3n}$
δ) αν $w\in\mathbb{R}$, να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο της εικόνας του μιγαδικού z

7.693 Έστω οι μιγαδικοί z, w για τους οποίους ισχύουν οι σχέσεις:

$$z+|z+2-i|=6-3i \text{ και } zw=6-8i$$

α) Να αποδείξετε ότι $z=1-3i$
β) Να υπολογίσετε το μέτρο $|iz-w|$
γ) Να αποδείξετε ότι $z^{2014}+w^{2014}=0$
δ) Θεωρούμε τον μιγαδικό $u=\dfrac{\kappa w+z}{w-\kappa z}$, με $\kappa\in\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι $u^{2n}\in\mathbb{R}$, για κάθε $n\in\mathbb{N}$

7.694 Δίνεται η συνάρτηση $f(z)=\dfrac{z^3-i}{z+i}$, με $z\neq -i$.
α) Να αποδείξετε ότι $f(z)=z^2-iz-1$
β) Να βρείτε τις τιμές των $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ για τις οποίες η εξίσωση $f(z)=(\alpha-i)z+\beta i^{2018}$ έχει ρίζα τον αριθμό $3+4i$
γ) Αν ο αριθμός $w=\dfrac{iz+1}{z+i}$ είναι πραγματικός, τότε:

ι) να υπολογίσετε το $|z|$

ιι) να αποδείξετε ότι $|f(z)|\leq 3$

ιιι) να αποδείξετε ότι $\left|\dfrac{f(iz)}{f(i\cdot\overline{z})}\right|=1$

7.695 Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(z)=\dfrac{z+7i}{z-1}$, με $z\neq 1$
α) Να υπολογίσετε τους αριθμούς $f(-3-3i)$ και $(f(-3-3i))^{2011}$
β) Να λύσετε την εξίσωση $w-|w-13+3i|=11+i$
γ) Αν ισχύει $Re(f(z))=Im(f(z))$, να βρείτε:

ι) τον γεωμετρικό τόπο του z

ιι) τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της παράστασης $|z-w_0|$, όπου w_0 είναι η λύση της εξίσωσης του ερωτήματος (β)

7.696 Δίνεται η εξίσωση $z^2-\alpha z+\beta=0$, με $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, η οποία έχει ρίζες τους αριθμούς $z_1=2+i$ και z_2.
α) Να βρείτε τις τιμές των α,β
β) Να αποδείξετε ότι $z_1^{2014}+z_2^{2014}\in\mathbb{R}$
γ) Αν Α, Β, Γ είναι οι εικόνες των μιγαδικών $z_1, z_2, z_3=\dfrac{z_1}{z_2}+\dfrac{17+i}{5}$ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές
δ) Αν $|w-z_1|=|\overline{w}-z_1|$, να αποδείξετε ότι $w\in\mathbb{R}$
ε) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο του μιγαδικού w, για τον οποίο ισχύει $|w-z_2|+|\overline{w}-z_2|=10$

7.697 Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί $z(t)=\dfrac{1}{1+2ti}$, με $t\in\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:
α) $z(t)+\overline{z(t)}=2z(t)\cdot\overline{z(t)}$
β) οι εικόνες των μιγαδικών $z(t)$ ανήκουν σε κύκλο (C), του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα
γ) αν με $t\neq 0$, τότε οι εικόνες των μιγαδικών $z(t)$ και $z\left(-\dfrac{1}{4t}\right)$ είναι αντιδιαμετρικά σημεία του παραπάνω κύκλου (C)

7.698 Θεωρούμε τους μιγαδικούς $z(\alpha) = \dfrac{\alpha}{1+\alpha i}$, με $\alpha \in \mathbb{R}$
α) Να αποδείξετε ότι οι εικόνες των μιγαδικών $z(\alpha)$ βρίσκονται σε κύκλο (C) με κέντρο το σημείο $K\left(0, -\dfrac{1}{2}\right)$ και ακτίνα $\rho = \dfrac{1}{2}$
β) Να βρείτε τους μιγαδικούς $z(\alpha)$ που έχουν το ελάχιστο και το μέγιστο μέτρο
γ) Να αποδείξετε ότι οι εικόνες των μιγαδικών $z(\alpha)$ και $z\left(-\dfrac{1}{\alpha}\right)$ είναι αντιδιαμετρικά σημεία του παραπάνω κύκλου (C)
δ) Να αποδείξετε ότι οι εικόνες των μιγαδικών $z(-1), z(1)$ και $z(2012)$ είναι κορυφές ορθογωνίου τριγώνου

7.699 Έστω $z_1, z_2 \in \mathbb{C}^*$ με $z_1 \neq z_2$ και $z_1 \neq -z_2$. Θεωρούμε τον μιγαδικό

$$w = \frac{z_1 + z_2}{z_1 - z_2}$$

α) Να αποδείξετε ότι: $|w| = 1 \Leftrightarrow \dfrac{z_1}{z_2} \in \mathbb{I}$

β) Αν $|z_1| = |z_2|$, να αποδείξετε ότι $w \in \mathbb{I}$ και

$$\left(\frac{z_1 - z_2}{z_1 + z_2}\right)^{2014} < 0$$

7.700 Δίνεται η συνάρτηση $f(z) = (z+i)(\bar{z}+i)$, όπου $z \in \mathbb{C}$
α) Αν $z_1 = 1+i$, να βρείτε τους μιγαδικούς $z_2 = f(z_1)$ και $z_3 = f(f(z_1))$
β) Αν A, B, Γ είναι οι εικόνες των z_1, z_2, z_3 αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο
γ) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο του z στις περιπτώσεις: ι) $f(z) \in \mathbb{R}$ ιι) $f(z) \in \mathbb{I}$

7.701 Έστω $z \in \mathbb{C}^*$, με $Re\left(\dfrac{1}{z}\right) = \dfrac{1}{4}$. Να αποδείξετε ότι:
α) αν $Im(z) = 1$, να βρείτε το $Re(z)$
β) να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων του z στο μιγαδικό επίπεδο
γ) να βρείτε τη μέγιστη τιμή του $|z|$
δ) αν $z_1, z_2 \in \mathbb{C}^*$, με $Re\left(\dfrac{1}{z_1}\right) = Re\left(\dfrac{1}{z_2}\right) = \dfrac{1}{4}$, να βρείτε τη μέγιστη τιμή του $|z_1 - z_2|$

7.702 Δίνονται οι μιγαδικοί $z \neq i$ και $w = \dfrac{z+i}{z-i}$. Αν $w \in \mathbb{I}$, τότε:
α) Να αποδείξετε ότι η εικόνα του μιγαδικού z βρίσκεται σε κύκλο με κέντρο την αρχή O των αξόνων και ακτίνα $\rho = 1$
β) Έστω z_1, z_2, z_3 τρεις από τους παραπάνω μιγαδικούς z. Να αποδείξετε ότι:

ι) $|z_1 + 2z_2 + 3z_3| = |3z_1z_2 + z_2z_3 + 2z_3z_1|$

ιι) αν $\dfrac{|z_1 - z_2|}{2} = |z_3 - z_1| = 1$, τότε $|z_2 - z_3| = \sqrt{3}$

7.703 Δίνεται η εξίσωση $z^2 - 2z + \lambda^2 + 3 = 0$, με $\lambda \in \mathbb{R}$
α) Να αποδείξετε ότι δεν έχει πραγματικές ρίζες
β) Αν για τις εικόνες M, N των ριζών της είναι $(OMN) = \sqrt{3}$, τότε:

ι) να βρείτε το λ και τις ρίζες z_1, z_2

ιι) να αποδείξετε ότι $z_1^3 = z_2^3 = -8$

ιιι) να αποδείξετε ότι $z_1^{2013} + z_2^{2013} = -2^{2014}$

7.704 α) Να γίνουν οι πράξεις $(z+3+i)(z-4+2i)$
β) Να λύσετε την εξίσωση $z^2 - (1-3i)z = 14 - 2i$
γ) Αν z_1, z_2 οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης, με $Re(z_1) > 0$ και A, B, Γ οι εικόνες των z_1, z_2 και $z_3 = 3+i$ αντίστοιχα, τότε:

ι) να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο

ιι) να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων $M(z)$, για τα οποία ισχύει η σχέση:

$$MA^2 + 2MB^2 = 2M\Gamma^2 + 30$$

7.705 Δίνεται η εξίσωση $z^2 - \alpha z + 9 = 0$, με $\alpha \in \mathbb{R}$ η οποία έχει ρίζες $z_1, z_2 \notin \mathbb{R}$.
α) Να αποδείξετε ότι:

ι) $-6 < \alpha < 6$ ιι) $(z_1^{17} + z_2^{17}) \in \mathbb{R}$

β) Να βρείτε τα μέτρα των z_1, z_2
γ) Να βρείτε την τιμή του α, ώστε $\dfrac{z_1}{z_2} + \dfrac{z_2}{z_1} = -2$
δ) Αν $\alpha = 0$ και $Im(z_1) > 0$, να βρείτε το γεωμετρικό τόπο του w για τον οποίο ισχύει η σχέση:

$$|w - z_1| = 4 + |w - z_2|$$

7.706 Οι διανυσματικές ακτίνες των μιγαδικών $z \neq 0$ και $w = \dfrac{1}{z}$ είναι κάθετες μεταξύ τους.
α) Να αποδείξετε ότι οι εικόνες του z βρίσκονται σε δύο ευθείες κάθετες μεταξύ τους
β) Να αποδείξετε ότι $z^4 < 0$
γ) Αν είναι $\left|\dfrac{z^2 - 1}{z}\right| = \sqrt{2}$, τότε:

ι) να αποδείξετε ότι $|z| = 1$

ιι) να αποδείξετε ότι $Im\left(\dfrac{(z+i)^5}{z^5+i}\right) = 0$

ιιι) να βρείτε το μέτρο του μιγαδικού $u = \dfrac{3}{\bar{z}} - \dfrac{4}{\bar{z}i}$

7.707 Έστω z_1, z_2, z_3 οι ρίζες της εξίσωσης:

$$z^3 + (1-\lambda)z^2 + (1-\lambda)z - \lambda = 0, \text{ με } \lambda \in \mathbb{R}$$

Αν οι εικόνες των z_1, z_2, z_3 είναι σημεία συνευθειακά, να αποδείξετε ότι:
α) $\lambda = -\dfrac{1}{2}$ β) αν $n \in \mathbb{N}$, τότε $(z_1^n + z_2^n + z_3^n) \in \mathbb{R}$

7.708 Έστω οι μιγαδικοί z, w για τους οποίους ισχύουν οι σχέσεις:

$$|w| = 2 \text{ και } z = w + \frac{4i}{\overline{w}}$$

α) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο της εικόνας του z
β) Αν z_1, z_2, z_3 είναι τρεις από τους παραπάνω μιγαδικούς z, με $z_1 + z_2 + z_3 \neq 0$, να αποδείξετε ότι:
ι) $\dfrac{\overline{z_1}}{8} = \dfrac{1}{z_1}, \dfrac{\overline{z_2}}{8} = \dfrac{1}{z_2}$ και $\dfrac{\overline{z_3}}{8} = \dfrac{1}{z_3}$
ιι) $(z_1 + z_2)\left(\dfrac{1}{z_1} + \dfrac{1}{z_2}\right) \leq 4$
ιιι) $\left|\dfrac{z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1}{z_1 + z_2 + z_3}\right| = 2\sqrt{2}$
ιν) $\dfrac{z_1 - z_2}{z_3} + \dfrac{z_2 - z_3}{z_1} + \dfrac{z_3 - z_1}{z_2} \in \mathbb{I}$

(β΄) **β ομάδα**

7.709 Δίνονται οι μιγαδικοί z, w για τους οποίους ισχύουν οι σχέσεις:

$$z - 2i + 4\frac{|z-2i|}{\overline{z} + 2i} = \frac{5}{\overline{z} + 2i} \text{ και } |iw - 2 - 2i| = |i \cdot \overline{w}|$$

α) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών z και w
β) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο της εικόνας του μιγαδικού $\overline{z}$
γ) Να βρείτε την ελάχιστη και τη μέγιστη τιμή των μέτρων $|z - w|$ και $|\overline{z} - \overline{w}|$
δ) Να βρείτε τους μιγαδικούς u και v που βρίσκονται συγχρόνως στους γεωμετρικούς τόπους των w και $\overline{z}$ και να αποδείξετε ότι $|u|^2 + |v|^2 = 10$

7.710 Έστω οι μιγαδικοί w_1, w_2 με $|w_1| = |w_2| = \sqrt{2}$ και $Re(\overline{w_1}w_2) > 0$ και έστω z_1, z_2 οι ρίζες της εξίσωσης $z^2 - |w_1 - w_2|z + 1 = 0$. Να αποδείξετε ότι:
α) $z_1, z_2 \notin \mathbb{R}$
β) $|z_1| = |z_2| = 1$
γ) $(z_1 - z_2)^2 = |w_1 - w_2|^2 - 4$

7.711 Έστω οι μιγαδικοί z, w για τους οποίους ισχύουν οι σχέσεις:

$$|z - 40| = |z - 30i| \text{ και } |w - 3 - 4i| = 1$$

α) Να αποδείξετε ότι $|z| \neq |w|$
β) Να βρείτε την ελάχιστη τιμή του $|z + w|$
γ) Να βρείτε την ελάχιστη τιμή του $|z| - |w|$
δ) Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο της εικόνας του μιγαδικού $u = 6 + 8i - z$

7.712 Έστω οι μιγαδικοί z, w για τους οποίους ισχύουν οι σχέσεις:

$$|z - 1| = |z - i| \text{ και } w = \frac{i-1}{z-i}$$

α) Να βρείτε τους γεωμετρικούς τόπους των εικόνων των μιγαδικών z και w
β) Να βρείτε τους μιγαδικούς z για τους οποίους ισχύει η σχέση $|w^2 - 2i| = 2$
γ) Αν n είναι θετικός ακέραιος ώστε να είναι $|z| - 1 + i^n = (146 - 3n^2)i$, να αποδείξετε ότι $z^{n-3} \in \mathbb{R}$

7.713 Έστω οι μη μηδενικοί μιγαδικοί z, w για τους οποίους ισχύει:

$$2014^{|z|} \cdot z + 2014^{|w|} \cdot w = 2014^{|z+w|} \cdot (z + w)$$

Να αποδείξετε ότι:
α) $|z| = |w| = |z + w|$ ή $\dfrac{z}{w} \in \mathbb{R}$
β) αν Α,Β,Γ είναι αντίστοιχα οι εικόνες των μιγαδικών $z, w, z+w$ αντίστοιχα με Ο, Α, Β μη συνευθειακά, τότε είναι $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{O\Gamma}$

7.714 Έστω οι μιγαδικοί z, w με $z \neq 0$ για τους οποίους ισχύει η σχέση $w^2 - 2|z|w + 2|z|^2 = 0$. Να αποδείξετε ότι:
α) $w \notin \mathbb{R}$ β) $|w|^2 = 2|z|^2$ γ) $w^2 + \overline{w}^2 = 0$
δ) $w^{2n} + \overline{w}^{2n} = 0$, με n περιττός θετικός ακέραιος

7.715 Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(z) = \dfrac{z-i}{z}$, με $z \in \mathbb{C}^*$
α) Αν $f(z) \in \mathbb{R}$, τότε:
ι) να αποδείξετε ότι $z \in \mathbb{I}$
ιι) αν $z^n = 1$, με $n \in \mathbb{N}$, να αποδείξετε ότι $z = \pm i$
β) Αν $f(z) \cdot \overline{f(z)} = 5$, να βρείτε:
ι) τον γεωμετρικό τόπο του z
ιι) την ελάχιστη τιμή του $|f(z) - 1|$
γ) να λύσετε την εξίσωση $z^2 + 4f^2(z) = 0$

7.716 Έστω z_1, z_2 οι ρίζες της εξίσωσης $\dfrac{z}{4} = \dfrac{-2}{z} + 1$
α) Να βρείτε τις ρίζες z_1 και z_2
β) Να αποδείξετε ότι $\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)^{2012} + \left(\dfrac{z_2}{z_1}\right)^{2014} = 0$
γ) Αν $w \in \mathbb{C}$ με $|w - z_1|^2 + |w - z_2|^2 = 16$, τότε:

ι) να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο του w και να αποδείξετε ότι $|w-2|=2$

ιι) αν w_1, w_2 είναι δύο από τους παραπάνω μιγαδικούς w με $|w_1 - w_2| = 4$, να αποδείξετε ότι $|w_1 + w_2| = 4$

ιιι) αν w_1, w_2, w_3 είναι τρεις από τους παραπάνω μιγαδικούς w, να αποδείξετε ότι:

$$\left|\frac{w_1 + w_2 + w_3 - 6}{4}\right| = \left|\frac{1}{w_1 - 2} + \frac{1}{w_2 - 2} + \frac{1}{w_3 - 2}\right|$$

7.717 Ο μιγαδικός z βρίσκεται σε κύκλο με κέντρο το σημείο K(-2,1) και ακτίνα $\rho = 1$ και θεωρούμε τον μιγαδικό $w = 4z + 8$

α) Να υπολογίσετε το μέτρο του μιγαδικού $i\cdot\bar{z}-1+2i$

β) Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο του w

γ) Να αποδείξετε ότι $0 \leq |w| \leq 8$

δ) Να αποδείξετε ότι $w - \overline{w} = \dfrac{|w|^2}{4} \cdot i$

ε) Να βρείτε την ελάχιστη τιμή του μέτρου $|3w^2-16|$

7.718 Έστω $z \in \mathbb{C} - \{\pm i\}$ και $w = \dfrac{z^2 - 2iz - 1}{z^2 + 1}$. Αν ο w είναι φανταστικός, τότε:

α) να αποδείξετε ότι $w = \dfrac{z-i}{z+i}$

β) να αποδείξετε ότι $|z| = 1$

γ) αν z_1, z_2 είναι δύο από τους παραπάνω μιγαδικούς z, να αποδείξετε ότι ο αριθμός

$$v = \frac{(z_1 + z_2)^7}{z_1^7 + z_2^7}$$

είναι πραγματικός

δ) να βρείτε τον μιγαδικό w και την τιμή του $\alpha \in \mathbb{R}$ ώστε να είναι:

$$\frac{w}{i} + w^{11} = \alpha + i$$

7.719 Έστω $z \in \mathbb{C}$ με $(z - 4 + 2i)(\bar{z} - 4 - 6i) \in \mathbb{I}$ και θεωρούμε τον μιγαδικό w για τον οποίο είναι:

$$w - 2z = -4 \cdot i^{2018} - \frac{(1+i)^{32}}{(8i)^5}$$

α) Να αποδείξετε ότι $w = 2z + 4 + 2i$

β) Να βρείτε τους γεωμετρικούς τόπους των μιγαδικών z και w

γ) Να βρείτε την μέγιστη και την ελάχιστη τιμή του $|z - w|$

δ) Αν Α, Β είναι οι εικόνες των μιγαδικών z και w και u ο μιγαδικός με εικόνα το μέσο του ΑΒ, να αποδείξετε ότι $1 \leq |u - 8 + 5i| \leq 3$

7.720 Θεωρούμε τους μιγαδικούς z για τους οποίους ισχύει:

$$|z-2|^2 + z(2+3i) + \bar{z}(2-3i) + 1 = 0$$

α) Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο του z

β) Να αποδείξετε ότι $1 \leq |z| \leq 5$

γ) Θεωρούμε τον μιγαδικό $w = \dfrac{8}{z-3i} - \bar{z}$

ι) Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο του w

ιι) Να αποδείξετε ότι $(z-w)^2 \leq 0$

ιιι) Να αποδείξετε ότι $z = w \Leftrightarrow Im(z) = 3$

iv) Αν Α, Β είναι οι εικόνες των z, w με $z \neq w$, να αποδείξετε ότι το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ είναι κάθετο στον άξονα $x'x$

v) Αν u είναι μιγαδικός αριθμός, με εικόνα στο τμήμα ΑΒ, να αποδείξετε ότι:

$$|u-z| \cdot |u-w| + |u-3i|^2 = 4$$

7.721 Θεωρούμε τους μιγαδικούς u_1, u_2 για τους οποίους είναι $u_1 + u_2 = 3 + 9i$ και εικόνες στις ευθείες $y = -x+7$ και $y = 5$ αντίστοιχα. Έστω ακόμα οι μιγαδικοί z_1, z_2 και w ώστε $z_1^5 = u_1, z_2^5 = u_2$ και $w = \dfrac{u_1}{u_2}$

α) Να βρείτε τους μιγαδικούς u_1 και u_2

β) Να αποδείξετε ότι ο w δεν είναι πραγματικός ούτε φανταστικός

γ) Να αποδείξετε ότι $w^2 \notin \mathbb{R}$

δ) Αν ο w^2 είναι ρίζα της εξίσωσης $z^2 + z + \alpha = 0$, να αποδείξετε ότι $\alpha = 1$

7.722 α) Έστω οι μιγαδικοί z, w με εικόνες τα σημεία Α, Β. Να αποδείξετε ότι τα σημεία Α, Β και η αρχή των αξόνων είναι σημεία συνευθειακά αν και μόνο αν $z\overline{w} \in \mathbb{R}$

β) Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών z για τους οποίους οι εικόνες των μιγαδικών

$$z - i, \frac{1}{\bar{z} - 2}$$

και η αρχή Ο των αξόνων είναι συνευθειακά σημεία

γ) Αν z_0 είναι φανταστικός αριθμός του προηγούμενου ερωτήματος, να βρείτε τον θετικό ακέραιο αριθμό n ώστε να είναι $z_0^n = 5n - 31$

δ) Αν $u \in \mathbb{C}$ με $|u| = 1$, τότε για τους μιγαδικούς z του ερωτήματος (β), να βρείτε την ελάχιστη τιμή του $|u - 2z|$

7.723 Έστω z_1, z_2 οι ρίζες της εξίσωσης $z + \dfrac{1}{z} = -1$ και θεωρούμε τους μιγαδικούς w για τους οποίους ισχύει η σχέση $Re(w^2) = w\overline{w} - 8Re(w)$

α) Να βρείτε τους αριθμούς z_1, z_2 και να αποδείξετε ότι $z_1^3 = z_2^3 = 1$
β) Να αποδείξετε ότι οι εικόνες του w βρίσκονται στην παραβολή $y^2 = 4x$
γ) Να αποδείξετε ότι οι εικόνες των z_1, z_2 και η εστία της παραπάνω παραβολής σχηματίζουν ισόπλευρο τρίγωνο
δ) Αν για τους μιγαδικούς u ισχύει

$$2|u + z_1 z_2| + z_1^{11} + z_2^{11} = 0$$

να αποδείξετε ότι $2|w - u| \geq 1$

7.724 Θεωρούμε τους μιγαδικούς z των οποίων οι εικόνες είναι σε κύκλο με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα $\rho = 1$ και θεωρούμε τους μιγαδικούς

$$w = \frac{2z + i}{iz - 2}$$

α) Να αποδείξετε ότι: ι) $|w| = 1$ ιι) $|z + w| \leq 1$
β) Αν $w \notin \mathbb{R}$, να βρείτε το $\alpha \in \mathbb{R}$ ώστε $w + \dfrac{\alpha}{w} \in \mathbb{R}$
γ) Αν z_1, z_2 είναι δύο από τους παραπάνω μιγαδικούς z με $|z_1 - z_2| = \sqrt{3}$, να αποδείξετε ότι $|z_1 + z_2| = 1$
δ) Να αποδείξετε ότι $|w + 4| + |3iw - 1| \geq 5$

7.725 Θεωρούμε τους μιγαδικούς z, w, u για τους οποίους ισχύουν οι σχέσεις:

$$w = \frac{z - 2}{z - 2i}, \text{ με } z \neq 2i \text{ και } |2u - 3 - 3i| = \sqrt{2}$$

α) αν $w = \alpha + \beta i$, με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι:

$$w^2 \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \alpha = 0 \text{ ή } \beta = 0$$

β) αν $w^2 \in \mathbb{R}$, να βρείτε το γεωμετρικό τόπο του z
γ) να βρείτε το γεωμετρικό τόπο του u
δ) να αποδείξετε ότι η εξίσωση $z = u$ έχει ακριβώς δύο λύσεις

7.726 Θεωρούμε τους μιγαδικούς z για τους οποίους ισχύει η σχέση:

$$|z + 2i| = 1 + 2Im(z)$$

α) να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο του z
β) να αποδείξετε ότι $|z + 2i| - |z - 2i| = 2$
γ) να αποδείξετε ότι $|z^2 + 4| = 2 + |z|^2$ και στη συνέχεια να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών $w = z^2 + 2$
δ) αν z_1, z_2 είναι δύο από τους παραπάνω μιγαδικούς z με $|z_1 - z_2| = \sqrt{3}$, να αποδείξετε ότι $|z_1 + z_2| \geq 1$

7.727 Θεωρούμε τον μιγαδικό z για τον οποίο ισχύουν $z_0^n = 3 + 4i$ και $z_0^{n+1} = 2 + 11i$, με $n \in \mathbb{N}^*$ και θεωρούμε τους μιγαδικούς z για τους οποίους ο μιγαδικός

$$w = \frac{z^n}{z - z_0 + 2}$$

είναι φανταστικός
α) Να βρείτε τους z_0 και n
β) Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών z
γ) Θεωρούμε τους μιγαδικούς $u = w - z - i$

ι) αν $z \notin \mathbb{I}$, να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο του u

ιι) αν u_1, u_2, u_3 είναι τρεις από τους παραπάνω μιγαδικούς u, να αποδείξετε ότι:

$$u_1 + u_2 + 3u_3 \neq 0 \text{ και } \left|\frac{3 + 4i}{u_1 + u_2 + 3u_3}\right| \geq 1$$

7.728 Θεωρούμε το τριώνυμο $f(z) = \alpha z^2 + \beta z + \alpha - 3$, με $z \in \mathbb{C}$ και $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ με $\alpha \neq 0$, το οποίο έχει ρίζα τον αριθμό $-\dfrac{i}{2}$. Επίσης θεωρούμε τους μιγαδικούς:

$$w = \frac{f(z)}{2iz - 1}$$

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha = 4$ και $\beta = 0$
β) Να αποδείξετε ότι $w = -2iz - 1$
γ) Αν $|z - 2| = 1$, τότε:

ι) να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο του z

ιι) να αποδείξετε ότι $2 \leq |z - w| \leq 8$

7.729 Θεωρούμε τους μιγαδικούς z, w, u για τους οποίους ισχύουν οι σχέσεις:

$$2z + |z + 1 + 2i| = 1 + 2i \text{ και } w + \frac{z^{10}}{32}u = 0$$

Να αποδείξετε ότι:
α) $z = -1 + i$
β) οι εικόνες των w, u ισαπέχουν από την αρχή των αξόνων
γ) $|w - u| = \sqrt{2}|w|$
δ) οι εικόνες των w, u και η αρχή των αξόνων είναι κορυφές ορθογωνίου και ισοσκελούς τριγώνου

7.730 Θεωρούμε τους μιγαδικούς z για τους οποίους ισχύει η σχέση:

$$(3z - 2)^5 - (2z - 3)^5 = 0$$

Να αποδείξετε ότι:
α) $|z| = 1$
β) ο αριθμός $w = \dfrac{(z - i)^9}{z^9 - i}$ είναι πραγματικός
γ) $|3z - 1| = |z - 3|$
δ) $|3z - 1| + |2z^2 - z + 6| \geq 1$
ε) οι εικόνες των μιγαδικών $u = z - \dfrac{4}{z}$ ανήκουν σε έλλειψη και επίσης $3 \leq |u| \leq 5$

7.731 Έστω οι μιγαδικοί z, w για τους οποίους ισχύουν οι σχέσεις:

$$\frac{z-2i}{|z-2i|} = \frac{\sqrt{3}}{\overline{z}+2i} \text{ και } w = \frac{5(\lambda - i)}{3-4i}, \text{ με } \lambda \in \mathbb{R}$$

α) Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο του z
β) Να αποδείξετε ότι οι εικόνες των μιγαδικών

$$u = z - 2i + \frac{3}{z-2i}$$

βρίσκονται σε ευθύγραμμο τμήμα του άξονα $x'x$
γ) Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών w και την ελάχιστη τιμή του $|w|$
δ) Να αποδείξετε ότι $5|z-w| \geq 11 - 5\sqrt{3}$

7.732 Θεωρούμε την εξίσωση $z^3 + \alpha z^2 + 2\beta = 0$, η οποία έχει ρίζα τον αριθμό $z_0 = 1+i$ και τους μιγαδικούς w για τους οποίους ισχύουν οι σχέσεις:

$$2Re(w) \neq 1 \text{ και } |w^2 + \alpha w + \beta |w|^2| = |i \cdot \overline{w}|$$

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha = -1$ και $\beta = 1$
β) Να αποδείξετε ότι $w \in \mathbb{R}$
γ) Αν $u = \dfrac{w-7}{w+7}$, να αποδείξετε ότι:

ι) $|u| = 1$ ιι) αν $v = \dfrac{u^2+iu-1}{u^2-iu-1}$, τότε $v \in \mathbb{R}$

ιιι) $|u^2+u-1| \leq \sqrt{5}$

7.733 Θεωρούμε τους μιγαδικούς z, w για τους οποίους ισχύουν οι σχέσεις:

$$z = \frac{2\lambda}{\lambda - i}, \text{ με } \lambda \in \mathbb{R} \text{ και } w = z - 1$$

α) Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο του z
β) Να αποδείξετε ότι $2|z|^2 - 3|z| - 2 \leq 0$
γ) Έστω w_1, w_2 δύο από τους παραπάνω μιγαδικούς w και θεωρούμε τον αριθμό:

$$u = \frac{w_1}{w_2} + \frac{w_2}{w_1}$$

Να αποδείξετε ότι: ι) $u \in \mathbb{R}$ ιι) $u = 2Re(w_1\overline{w_2})$
δ) Αν z_1, z_2 είναι δύο από τους παραπάνω μιγαδικούς z με $|z_1 - z_2| = 2$, να βρείτε το $|z_1 + z_2|$

7.734 Θεωρούμε τους μιγαδικούς z με $|z-i| = 1 + Im(z)$ και θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$f(w) = \frac{w^2+1}{w+i}, \text{ με } w \in \mathbb{C} - \{-i\} \text{ και } |f(w)| = 1$$

α) Να βρείτε τους γεωμετρικούς τόπους των εικόνων των μιγαδικών z και w
β) Να βρείτε τον μιγαδικό z_0 για τον οποίο ισχύουν οι σχέσεις:

$$|z_0 - i| = 1 + Im(z_0) \text{ και } |iz_0 + 1| = 1$$

γ) Θεωρούμε τους μιγαδικούς u για τους οποίους ισχύει η σχέση $(1+i)u + (1-i)\overline{u} = 4$

ι) να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο του u

ιι) να αποδείξετε ότι $|z-u| \geq \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

7.735 Θεωρούμε την εξίσωση $z^2 - \alpha z + 2 = 0$, με $\alpha \in \mathbb{R}$, η οποία έχει ρίζα τους μιγαδικούς $z_1, z_2 \notin \mathbb{R}$
α) Να βρείτε τα μέτρα των z_1, z_2 και τις δυνατές τιμές του α
β) Να βρείτε την τιμή του α για την οποία ισχύει η σχέση:

$$\frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_1} = -2$$

γ) Αν $\alpha = 0$, τότε:

ι) να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των μιγαδικών w για τους οποίους ισχύει η σχέση:

$$|w - z_1| - |w - z_2| = 2, \text{ με } Im(z_1) < 0$$

ιι) να αποδείξετε ότι $|w-1| \geq \dfrac{\sqrt{6}}{2}$

ιιι) να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών w^2

7.736 Έστω οι μιγαδικοί z για τους οποίους ισχύει η σχέση:

$$(2z-i)^7 - (iz+2)^7 = 0$$

Να αποδείξετε ότι:
α) $|z| = 1$
β) οι εικόνες των μιγαδικών $w = 2z - 1$ βρίσκονται σε κύκλο με κέντρο το σημείο K(-1,0) και ακτίνα $\rho = 2$
γ) αν $u = \left(z - \dfrac{1}{z}\right)^{15}$, τότε $u \in \mathbb{I}$ με $|Im(u)| \leq 2^{15}$
δ) $|z^2 - 2z + 3| = |3z^2 - 2z + 1|$
ε) $|2z-1| + |z^2 - 2z + 3| \geq 3$

7.737 Έστω οι μιγαδικοί z, w για τους οποίους ισχύουν οι σχέσεις:

$$|z| = 1, |w| = 3 \text{ και } |z + w| = 4$$

α) Να αποδείξετε ότι $|z-w|=2$

β) Να αποδείξετε ότι $(z+w+1)\cdot\left(\dfrac{1}{z}+\dfrac{9}{w}+1\right)\leq 25$

γ) Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών u για τους οποίους ισχύει η σχέση $2Re(u^2)=|z-w|$

δ) Να αποδείξετε ότι οι εικόνες των μιγαδικών u^2 βρίσκονται στην ευθεία $x=1$

7.738 Έστω οι μιγαδικοί z,w για τους οποίους ισχύουν οι σχέσεις:

$$|iz+2|=|z+4| \text{ και } |4iw+1|-1=4Im(w)$$

α) Να βρείτε τους γεωμετρικούς τόπους των εικόνων των μιγαδικών z και w

β) Να βρείτε την ελάχιστη τιμή του μέτρου $|z-3-4i|$ καθώς και τον μιγαδικό z για τον οποίο προκύπτει η ελάχιστη τιμή

γ) Να αποδείξετε ότι $|z-w|\geq\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

7.739 Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί a,b,c οι οποίοι είναι διαφορετικοί μεταξύ τους ανά δύο και επιπλέον είναι $|a|=|b|=|c|=\rho>0$.

α) Να αποδείξετε ότι ο αριθμός

$$w=\left(1-\frac{a}{c}\right)\left(1-\frac{b}{a}\right)\left(1-\frac{c}{b}\right)$$

είναι φανταστικός

β) Να αποδείξετε ότι $|ab+bc+ca|=\rho|a+b+c|$

γ) Θεωρούμε τον μιγαδικό $z=\lambda b+(1-\lambda)c$, με $\lambda\in\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:

ι) οι εικόνες των b,c,z είναι σημεία συνευθειακά

ιι) η ελάχιστη τιμή του $|z-a|$ είναι $\dfrac{1}{2\rho}|a-b|\cdot|a-c|$

7.740 Έστω $z,w\in\mathbb{C}^*$ και $\alpha\in\mathbb{R}$ ώστε $z^2+w^2=\alpha zw$.

α) Να αποδείξετε ότι $|z|=|w|$ ή $z\overline{w}\in\mathbb{R}$

β) αν οι εικόνες Α, Β των z,w και η αρχή των αξόνων δεν είναι συνευθειακά σημεία, να αποδείξετε ότι:

ι) $-2<\alpha<2$

ιι) το τρίγωνο ΟΑΒ είναι ισοσκελές

ιιι) αν $A\widehat{O}B=45^0$, τότε $\alpha=\sqrt{2}$

7.741 Δίνονται οι μιγαδικοί z,w και ο πραγματικός αριθμός ρ, με $0<\rho\neq 1$, για τους οποίους ισχύουν οι σχέσεις:

$$|z-\rho^2 i|=\rho|z-i| \text{ και } z(w-2i)=2\rho^2+wi$$

α) Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του z είναι κύκλος (C_1) με ακτίνα ρ

β) Να αποδείξετε ότι οι εικόνες του w ανήκουν σε κύκλο (C_2) ο οποίος είναι ομόκεντρος του (C_1), του οποίου να βρείτε την ακτίνα ως συνάρτηση του ρ

γ) Να αποδείξετε ότι $2|z+w+\rho^2 i|=|w+4z-zwi|$

δ) Να αποδείξετε ότι $\dfrac{2z-w}{2z+w}\in\mathbb{I}$

ε) Αν Α, Β οι εικόνες δύο μιγαδικών που ανήκουν στον κύκλο (C_1) και Μ η εικόνα ενός μιγαδικού w που ανήκει στον κύκλο (C_2), να αποδείξετε ότι $\dfrac{1}{3}\leq\dfrac{MA}{MB}\leq 3$

7.742 Ο μιγαδικός z ικανοποιεί τη σχέση $2z^4+\overline{z}=\overline{z}^4+2z$.

α) Να αποδείξετε ότι: ι) $z^4+\overline{z}^4=z+\overline{z}$ ιι) $z^4=z$

β) Να λύσετε την εξίσωση $2z^4+\overline{z}=\overline{z}^4+2z$

γ) Αν z_1,z_2,z_3 οι μη μηδενικές λύσεις της προηγούμενης εξίσωσης, να αποδείξετε ότι ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου με κορυφές τις εικόνες των z_1,z_2,z_3 έχει κέντρο την αρχή Ο των αξόνων

7.743 Θεωρούμε τους μιγαδικούς z για τους οποίους ισχύει η σχέση:

$$\left|\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}\right)^{2013}\cdot z^6\right|=64$$

α) Να αποδείξετε ότι $|z|=2$

β) Αν z_1,z_2 είναι δύο μιγαδικοί που ικανοποιούν τη δοσμένη σχέση, να αποδείξετε ότι:

ι) $\dfrac{z_1+z_2 i}{4-z_1z_2 i}\in\mathbb{I}$ ιι) $(z_1+z_2)\left(\dfrac{1}{z_1}+\dfrac{1}{z_2}\right)\leq 4$

γ) Αν $w\in\mathbb{C}$, ώστε $2w=z-6+8i$, να αποδείξετε ότι:

ι) η εικόνα του μιγαδικού w βρίσκεται σε κύκλο, του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα

ιι) $Re(w)\cdot Im(w)<0$

δ) Αν $u\in\mathbb{C}$, ώστε $z^2=3+2iuz$, να αποδείξετε ότι:

ι) η εικόνα του u βρίσκεται σε έλλειψη, με εστίες τα σημεία $E(\sqrt{3},0)$ και $E'(-\sqrt{3},0)$

ιι) $\dfrac{1}{4}\leq|u|\leq\dfrac{7}{4}$

7.744 Δίνεται ο μιγαδικός αριθμός z για τον οποίο ισχύει η σχέση $2z-i\cdot\overline{z}=3$

α) Να βρείτε τον μιγαδικό z

β) Να αποδείξετε ότι $\left(\dfrac{\overline{z}+iz}{\overline{z}-1}\right)^{2016}=1$

γ) Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς w για τους οποίους ισχύει

$$|w+\overline{z}|=\left|\left(\frac{\sqrt{5}}{2}+\frac{\sqrt{11}}{2}i\right)z\right|$$

ι) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο του w

ιι) Να αποδείξετε ότι $\sqrt{5} \le |w| \le 3\sqrt{5}$

ιιι) Να αποδείξετε ότι υπάρχουν δύο φανταστικοί αριθμοί w_1, w_2 των οποίων οι εικόνες ανήκουν στον παραπάνω γεωμετρικό τόπο

7.745 Έστω ο μιγαδικός z με $|z-2i| = |2zi+1|$. Να αποδείξετε ότι:
α) οι εικόνες του z βρίσκονται σε κύκλο του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα
β) ο αριθμός $\dfrac{z^5+1}{z^5-1}$ είναι φανταστικός
γ) $-1 \le Im(z) \le 1$
δ) $\left|z - \dfrac{1}{z} + 2i\right| + \left|z - \dfrac{1}{z} - 2i\right| = 4$
ε) αν $w \in \mathbb{C}$, με $z\overline{w} \neq -1$, τότε $\left|\dfrac{z+w}{1+z\overline{w}}\right| = 1$

7.746 Δίνεται ο μιγαδικός w και θεωρούμε την εξίσωση $|z|^2 + 2Im(w\overline{z}) + 4 = 0$, η οποία έχει μοναδική λύση ως προς z, τον αριθμό z_0
α) Να βρείτε τη λύση z_0 και το $|w|$
β) Να αποδείξετε ότι $z_0^{2014} + w^{2014} = 0$
γ) Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των μιγαδικών u για τους οποίους ισχύει $|u+2i| - |u-2i| = |z_0|$ και τον μιγαδικό u που έχει το ελάχιστο μέτρο

7.747 Έστω ο μιγαδικός z για τον οποίο ισχύει η σχέση:

$$|z+|z||^2 + |z-|z||^2 + 2z^2 = 0$$

α) Να αποδείξετε ότι $z \in \mathbb{I}$
β) Να βρείτε τον μιγαδικό z για τον οποίο επιπλέον ισχύει η σχέση:

$$1 + z + z^2 + \cdots + z^9 = 1 - i$$

γ) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο του μιγαδικού w για τον οποίο ισχύει:

$$w - wi = \frac{i}{z} - z$$

δ) Για τους μιγαδικούς w του προηγούμενου ερωτήματος, να αποδείξετε ότι $x^2 + |w| \ge 2x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

7.748 Έστω οι μιγαδικοί a, b, c για τους οποίους ισχύουν οι σχέσεις:

$$|a| = |b| = |c| = 1 \text{ και } a + b + c = 1$$

α) Αν $z = (a+\overline{b})(b+\overline{c})(c+\overline{a})$, να αποδείξετε ότι:

ι) $z \in \mathbb{R}$ ιι) $(iz + 2013i^3)^2 \le 0$

β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$A = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$$

γ) Να αποδείξετε ότι:

ι) $\left|\dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a}\right| \le 2$ ιι) $|a+b| + |b+c| + |c+a| \ge 2$

ιιι) $|a+b|^2 + |b+c|^2 + |c+a|^2 = 4$

7.749 Έστω οι μιγαδικοί z, w με $|z-3| = |z+2i|$ και $|w+3| = |w-2i|$.
α) Να αποδείξετε ότι οι εικόνες των z, w βρίσκονται σε δύο παράλληλες ευθείες
β) Να βρείτε τις ελάχιστες τιμές των παραστάσεων:

ι) $|z-w|$ ιι) $|z+w|$ ιιι) $|z-w+i|$

7.750 Έστω $z, w \in \mathbb{C}$ με $z + w = 4 + 6i$ και $|z-w| = 6$. Να αποδείξετε ότι:
α) οι εικόνες των z, w ανήκουν σε κύκλο με κέντρο Κ(2,3) και ακτίνα $\rho = 3$
β) οι εικόνες των z, w είναι αντιδιαμετρικά σημεία
γ) $|z+w| = 2\sqrt{13}$ και $Re(z\overline{w}) > 0$
δ) $|z|^2 + |w|^2 = 44$

7.751 Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z για τους οποίους ισχύει η σχέση:

$$(z-4-3i)^{2014} = \frac{5|z| - 10i}{2 + |z|i}$$

Να αποδείξετε ότι:
α) η εικόνα του z βρίσκεται σε κύκλο του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα
β) $|z - i\sqrt{3}z| + |Re(\overline{z}) + iIm(z)| \le 30$
γ) $|z|^2 + |z-8-6i|^2 = 100$
δ) αν $|w-4+4i| = 2$, τότε υπάρχουν μοναδικοί μιγαδικοί z, w ώστε $|z-w| = 14$

7.752 Θεωρούμε την εξίσωση $x^2 + (\varDelta+2)x + 2\varDelta + 10 = 0$, η οποία έχει μη πραγματικές ρίζες και διακρίνουσα $\varDelta$. Έστω $z, w \in \mathbb{C}^*$ ώστε $\dfrac{z}{w}$ ρίζα της αρχικής εξίσωσης με $Im\left(\dfrac{z}{w}\right) > 0$
α) Να αποδείξετε ότι:

ι) $\left(\dfrac{1}{z} - \dfrac{1}{w}\right)^{2016} = \dfrac{1}{z^{2016}}$

ιι) $1 + \dfrac{z}{w} + \dfrac{z^2}{w^2} + \cdots + \dfrac{z^{19}}{w^{19}} = -1025i$

β) Θεωρούμε τους μιγαδικούς u για τους οποίους είναι:

$$\left|u - \frac{z}{w}\right| = \frac{1}{2}\left|u - 4\frac{z}{w}\right| \quad (1)$$

ι) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο του u

ιι) Αν u_1, u_2 δύο μιγαδικοί που ικανοποιούν τη σχέση (1) και $v = |u_1 + 2u_2| + |2u_1 + u_2|i$, να αποδείξετε ότι η εικόνα του v βρίσκεται σε ημιευθεία η οποία διέρχεται από την αρχή O των αξόνων και την εικόνα του $\dfrac{z}{w}$

7.753 Έστω $z, w \in \mathbb{C}$, για τους οποίους ισχύουν οι σχέσεις:

$$|z| = |w| = \rho > 0 \text{ και } |z^2 + zw + w^2| = \rho^2$$

Να αποδείξετε ότι:
α) αν $\dfrac{z}{w} \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$, τότε $z^{2014} + w^{2014} \in \mathbb{R}$
β) αν $\dfrac{z}{w} \in$, τότε $z^{2013} + w^{2013} = 0$
γ) αν $\dfrac{z}{w} \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$, τότε $|z^{2013} + w^{2013}| = \rho^{2013}\sqrt{2}$

7.754 Θεωρούμε τους μιγαδικούς z, w για τους οποίους ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις:

$$\bar{z}(z + 2) = -|1 - i|^2 z - 3 \text{ και } w = 2z - i$$

α) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών z και $\bar{z}$
β) Να βρείτε τη μέγιστη τιμή του $|z - \bar{z}|$
γ) Αν $|z - \bar{z}| = 2$ και $Im(z) > 0$, να υπολογίσετε την παράσταση

$$\left(\frac{z - \bar{z}}{2}\right)^{2013}$$

δ) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών w και να αποδείξετε ότι η απόσταση των εικόνων των z και w είναι ίση με την απόσταση της εικόνας του z από το σημείο A(0,1)

7.755 Έστω $z, w \in \mathbb{C}^*$, ώστε $zw + \overline{zw} = 0$. Να αποδείξετε ότι:
α) $\left(\dfrac{\bar{z}}{w}\right)^{2014} < 0$
β) οι διανυσματικές ακτίνες των μιγαδικών $\bar{z}, w$ τέμνονται κάθετα
γ) $|z + \overline{w}| = |\bar{z} - w|$
δ) αν επιπλέον είναι $\dfrac{\bar{z}}{w} + \dfrac{\overline{w}}{z} = 2i$, να βρείτε:

ι) την απόσταση της εικόνας του μιγαδικού $\dfrac{\bar{z}}{w}$ από το σημείο A(1,0)

ιι) τον μιγαδικό $\left(\dfrac{\bar{z}}{w}\right)^{2016}$

7.756 Δίνονται οι μιγαδικοί $z \neq -i$ και $w = \dfrac{z-1}{z+i}$. Αν $w \in \mathbb{R}$, τότε:
α) να βρείτε το γεωμετρικό τόπο του z
β) να βρείτε τον μιγαδικό u, αν ισχύει $|z - u| = |z - 2|$

7.757 Έστω η εξίσωση $z^2 + \alpha z + \beta = 0$, με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, έχει ρίζες τους $z_1 = -\dfrac{2}{i}$ και z_2
α) Να βρείτε τους α, β και z_2
β) Να βρείτε το $n \in \mathbb{N}$, ώστε $z_1^n - z_2^n = -16i$
γ) Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων του μιγαδικού z, για τον οποίο ισχύει

$$|z - z_1|^2 + |z - z_2|^2 = 16 \quad (1)$$

δ) Αν για τον μιγαδικό z, ισχύει η σχέση (1), να βρείτε την ελάχιστη και τη μέγιστη τιμή του $|z - 3 - 4i|$

7.758 Έστω οι μιγαδικοί z και $w = z^2 + |z|$
α) Αν $|w| > 2$, να αποδείξετε ότι $|z| > 1$
β) Να λύσετε την εξίσωση $w = 2$
γ) Αν $|z| = 1$, να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων του μιγαδικού w

7.759 Έστω ο μιγαδικός z για τον οποίο ισχύουν:

$$|z^2 - 9z + 20| = |z - 1| \text{ και } |z - 4| = \lambda > 0$$

Να αποδείξετε ότι:
α) $z + \bar{z} = \dfrac{|z|^2 + 16 - \lambda^2}{4}$
β) $(1 - \lambda^2)|z|^2 + (5\lambda^2 - 1)(z + \bar{z}) = 25\lambda^2 - 1$
γ) $|z| \geq 2$

7.760 Δίνονται οι μιγαδικοί z, w με $|w| = 2$ και $z = \dfrac{4 - w}{w - 1}$
α) Να βρείτε το μέτρο του μιγαδικού z
β) Να αποδείξετε ότι:

ι) $|w^2 - 4| \leq 4|w - 1|$

ιι) $|w^4 + 8(2 - w^2)| + 32Re(w) \leq 80$

γ) Να βρείτε τη μέγιστη απόσταση των εικόνων των μιγαδικών z, w

7.761 Έστω οι μιγαδικοί z, w με $z \neq 0$ για τους οποίους ισχύουν οι σχέσεις:

$$w = \frac{2|z| - 6i}{\sqrt{3} + i} \text{ και } |z - w| = 3$$

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο με κορυφές τις εικόνες των z, w και την αρχή των αξόνων είναι ορθογώνιο
β) Να αποδείξετε ότι $z\overline{w} + \bar{z}w > 0$
γ) Αν είναι $z\overline{w} + \bar{z}w = 6$, να αποδείξετε ότι:

ι) $|w| = 2|z|$

ιι) η εικόνα του w βρίσκεται σε κύκλο με κέντρο K(2,0) και ακτίνα $\rho = 4$

7.762 Έστω $z_1, z_2 \in \mathbb{C}^*$, με $\frac{z_1}{z_2} = w$ και $w + \frac{1}{w} = \sqrt{2}$ και $Im(w) > 0$.

α) Να βρείτε τον μιγαδικό w

β) Να βρείτε τις τιμές του $n \in \mathbb{N}^*$, ώστε $z_1^{2n} = z_2^{2n}$

γ) Να αποδείξετε ότι $w^{95} + w^{94} + \cdots + w + 1 = 0$

δ) Αν η εικόνα του μιγαδικού z_2 βρίσκεται στην ευθεία $y = 2x + 1$, να βρείτε την ευθεία στην οποία βρίσκεται η εικόνα του z_1

ε) Αν Α, Β είναι οι εικόνες των z_1, z_2, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΟΑΒ είναι ισοσκελές του οποίου να υπολογίσετε τις γωνίες

7.763 Δίνονται οι μιγαδικοί z_1, z_2, z_3 με εικόνες τα σημεία Α, Β, Γ αντίστοιχα, για τους ισχύουν οι σχέσεις:

$$z_1 + 2z_2 = 3z_3 \text{ και } |z_1| = |z_2| = 1 \text{ και } |z_3| = \sqrt{2}$$

α) Να αποδείξετε ότι:

ι) $Re(z_1\overline{z_2}) = 0$ ιι) $A\widehat{O}B = 90^0$

β) Να υπολογίσετε τα $Re(z_2\overline{z_3})$ και $Re(z_1\overline{z_3})$

γ) Να αποδείξετε ότι τα σημεία Α, Β, Γ είναι συνευθειακά

δ) Να υπολογίσετε τις αποστάσεις ΑΓ και ΒΓ

7.764 Δίνεται η συνάρτηση $f(z) = \frac{z^2+4}{|z-2i|}$, με $z \neq 2i$

α) Να υπολογίσετε το $Im[f(1+i)]$

β) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων του z στο μιγαδικό επίπεδο, για τους οποίους ισχύει $f(z) \in \mathbb{R}$

γ) Να αποδείξετε ότι $|f(z)| = |z + 2i|$

δ) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων του z στο μιγαδικό επίπεδο, για τους οποίους ισχύει

$$|f(z-5i)| + |f(z+i)| = 10 \quad (1)$$

ε) Για τους μιγαδικούς z που ικανοποιούν τη σχέση (1), να βρείτε τους μιγαδικούς με το μέγιστο μέτρο

ζ) Αν οι μιγαδικοί z_1, z_2 ικανοποιούν τη σχέση (1), να αποδείξετε ότι $8 \leq |z_1 - z_2| \leq 10$

7.765 Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(z) = \frac{z+1}{z}$, με $z \neq 0$

α) Να αποδείξετε ότι $f(z) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$

β) Αν ισχύει $f(z)f(\overline{z}) = 2$, να βρείτε:

ι) τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων του z

ιι) τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της παράστασης $|f(z) - 1|$

7.766 Θεωρούμε τους μιγαδικούς $z \neq 0$ για τους οποίους οι εικόνες Α, Β των z και $\frac{1}{z}$ και η αρχή των αξόνων σχηματίζουν ορθογώνιο τρίγωνο με υποτείνουσα την ΑΒ

α) Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο του z

β) Να αποδείξετε ότι $z^2 \in \mathbb{I}$

γ) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών $w = 3z^2 + 2$

δ) Αν επιπλέον για τους μιγαδικούς z ισχύει

$$\left|z - \frac{1}{z}\right| = \sqrt{2}$$

να αποδείξετε ότι οι εικόνες τους σχηματίζουν τετράγωνο

7.767 Δίνονται οι μιγαδικοί $z \neq 0, w = \frac{1}{z}$ και $u = z^2$. Αν οι διανυσματικές ακτίνες των z και w είναι κάθετες μεταξύ τους, τότε:

α) να βρείτε το γεωμετρικό τόπο του z

β) να αποδείξετε ότι $u \in \mathbb{R}$

γ) αν είναι $\left|z - \frac{1}{z}\right| = \sqrt{2}$, να βρείτε το μέτρο του μιγαδικού u

7.768 Έστω ο μιγαδικός z για τον οποίο ισχύει η σχέση:

$$|z - |z||^2 + |z + |z||^2 = 4|z| - 1$$

Να αποδείξετε ότι:

α) $|z| = \frac{1}{2}$ β) $\left|\left|z - \frac{1}{4}\right|^2 - \left|z + \frac{1}{4}\right|^2\right| \leq \frac{1}{2}$

7.769 Έστω z ένας μη πραγματικός και μη φανταστικός αριθμός και έστω Α, Β, Γ είναι αντίστοιχα οι εικόνες των μιγαδικών $z, \overline{z}, \frac{z^2}{\overline{z}}$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α) τα σημεία Α, Β, Γ δεν είναι συνευθειακά

β) το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές

7.770 Δίνεται η συνάρτηση

$$f(z) = |z - i| + |z + i| + |z - 1| + |z + 1|, \text{ με } z \in \mathbb{C}$$

α) Να αποδείξετε ότι:

ι) $f(-z) = f(z)$ και $f(iz) = f(z)$

ιι) $4 \leq f(z) \leq 4(|z| + 1)$

β) Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο του z για τον οποίο ισχύει $f(z) = f\left(\frac{1}{z}\right)$

7.771 Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(z) = \frac{(z-i)(\overline{z}+i)}{z+\overline{z}}$, με $z \in \mathbb{C}$ και $Re(z) \neq 0$

α) Να αποδείξετε ότι:

ι) $f\left(\frac{1}{\overline{z}}\right) = f(z)$ ιι) $f\left(-\frac{1}{iz}\right) \in \mathbb{R}$

β) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο του z για τον οποίο ισχύει η σχέση:

$$Re\left[f\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)\right] = Im\left[f\left(\frac{i}{z}\right)\right] + 2Re(z)$$

7.772 Έστω $\alpha, \beta \in \mathbb{C}^*$ και z_1, z_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης $z^2 + \alpha z + \beta = 0$. Να αποδείξετε ότι:
α) αν $|\alpha| = |\beta| = 1$, τότε $|z_1| \le 1$ και $|z_2| \le 1$
β) αν $|z_1| = |z_2|$, τότε $\frac{\alpha}{\beta} \in \mathbb{R}$
γ) αν $\frac{\alpha}{\beta} \in \mathbb{R}$ και $\frac{z_1}{z_2} \notin \mathbb{R}$, τότε $|z_1| = |z_2|$

7.773 Δίνεται η συνάρτηση $f(z) = \dfrac{i}{|z-2| - |z-1|}$
α) Να βρείτε για ποιές τιμές του z ορίζεται η συνάρτηση $f(z)$
β) Να αποδείξετε ότι $|f(z)| \ge 1$
γ) Αν $f(z) = i$, τότε:

ι) να αποδείξετε ότι $|z-1| + Re(z) = 1$

ιι) να βρείτε τις τιμές του $Re(z)$

ιιι) να βρείτε το γεωμετρικό τόπο του z

7.774 Θεωρούμε τους μιγαδικούς z, για τους οποίους ισχύει η σχέση:

$$z\bar{z} + 3(z - \bar{z})i = 4(z + \bar{z})$$

α) Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών z είναι κύκλος που διέρχεται από την αρχή των αξόνων
β) Να βρείτε την μέγιστη τιμή του $|z|$ και τον μιγαδικό z_1 με το μέγιστο μέτρο
γ) Να προσδιορίσετε τα $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$, ώστε ο μιγαδικός z_1 να είναι λύση της εξίσωσης $z^2 + 4\beta z + 4\gamma = 0$
δ) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο του μιγαδικού $w \ne 5i$, για τον οποίο ισχύει η σχέση:

$$\left(\frac{\bar{z} - 4 + 3i}{\overline{w - 5i}}\right)^{2014} = 5^{2014}$$

7.775 Δίνονται οι μιγαδικοί $z_1 = \alpha + \beta i$ και $z_2 = \gamma + \delta i$, με $\alpha, \beta, \gamma, \delta > 0$ και $|z_1| = |z_2| = 1$. Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης $x^2 - 2|z_1 - z_2|x + 2 = 0$, να αποδείξετε ότι:
α) οι αριθμοί x_1, x_2 δεν είναι πραγματικοί
β) ισχύει ότι $|x_1| = |x_2| = \sqrt{2}$
γ) ισχύει ότι $|x_1 - x_2|^2 + 4|z_1 - z_2|^2 = 8$
δ) ο μιγαδικός $w = \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1}$ είναι πραγματικός και να βρείτε τη μικρότερη τιμή του

7.776 Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί z, w για τους οποίους ισχύουν οι σχέσεις:

$$|z|^2(4+3i) + 5iz^2 = 0 \text{ και } |w|^2(4+3i) + 5iw^2 = 0$$

α) Να αποδείξετε ότι $|z+w|^2(4+3i) + 5i(z+w)^2 = 0$
β) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο του μιγαδικού αριθμού $u = \frac{1}{z} + 1$, με $z \ne 0$

7.777 Έστω οι μιγαδικοί z για τους οποίους ισχύει η σχέση:

$$Re\left(z + \frac{4}{z}\right) = 2Re(z) \ (1)$$

α) Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο του z
β) Αν $Re(z) \ne 0$, τότε:

ι) να αποδείξετε ότι ο μιγαδικός $w = z + \frac{4}{z}$ είναι πραγματικός, με $-4 \le w \le 4$

ιι) να βρείτε το γεωμετρικό τόπο του μιγαδικού $u = z + 3 + 4i$

ιιι) να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή του μέτρου του u
γ) Αν z_1, z_2, z_3 είναι μιγαδικοί που ικανοποιούν τη σχέση (1) και δεν είναι φανταστικοί, να αποδείξετε ότι:

$$|z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1| = 2|z_1 + z_2 + z_3|$$

7.778 Δίνεται η εξίσωση $z = 2\left(\sqrt{2} - \frac{2}{z}\right)$
α) Να βρείτε:

ι) τις ρίζες z_1, z_2 της παραπάνω εξίσωσης

ιι) τις τιμές του $n \in \mathbb{N}^*$, ώστε $z_1^n + z_2^n = 0$

ιιι) τις τιμές των $x, y \in \mathbb{R}$, για τις οποίες ισχύει:

$$\frac{1}{x+yi} + (-i)^{2015} = i^{-16} + \frac{1}{z_1^2} + \frac{1}{z_2^2}$$

β) Έστω $w \in \mathbb{C}$, ώστε $|w - z_1^2| = |w - z_2^4|$. Να βρείτε:

ι) το γεωμετρικό τόπο του w

ιι) το μιγαδικό w_0 που έχει το ελάχιστο μέτρο

ιιι) την ελάχιστη τιμή του $|w + 7 - i|$

7.779 Έστω $z \in \mathbb{C}$ ώστε $1 + 2|z|^2 = |z^2 + 1|^2 + 2|z+1|^2$
α) Να αποδείξετε ότι:

ι) ο z δεν είναι πραγματικός

ιι) $(z + \bar{z} + 1)^2 + (z\bar{z} - 1)^2 = 0$

ιιι) $z^2 + z + 1 = 0$
β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης

$$A = z^{2012} + z^{2014} + 2013$$

7.780 Έστω $z_1, z_2, ..., z_8$ οι μιγαδικοί για τους οποίους ισχύει η σχέση:

$$z^8+z^4i-1=(z-z_1)(z-z_2)\cdots(z-z_8)$$

Να αποδείξετε ότι:

α) οι εικόνες των μιγαδικών $z_1, z_2, ..., z_8$ είναι σημεία του ίδιου κύκλου (C)

β) $\left(z_1+z_2+\cdots+z_8+\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}+\cdots+\frac{1}{z_8}\right)\in\mathbb{R}$

γ) $|z_1+z_2+\cdots+z_8|=\left|\frac{i}{z_1}+\frac{i}{z_2}+\cdots+\frac{i}{z_8}\right|$

δ) $\left|\frac{z_1^2+i}{z_1}+\frac{z_2^2+i}{z_2}+\cdots+\frac{z_8^2+i}{z_8}\right|\leq 2|z_1+z_2+\cdots+z_8|$

ε) Αν $M_1, M_2, ..., M_8$ οι εικόνες των $z_1, z_2, ..., z_8$ αντίστοιχα και M τυχαίο σημείο του κύκλου (C), να αποδείξετε ότι:

$$(MM_1)(MM_2)\cdots(MM_8)\leq 3$$

7.781 Έστω Α, Μ, Ν οι εικόνες των μιγαδικών i, z, iz αντίστοιχα. Αν τα σημεία Α, Μ, Ν είναι συνευθειακά, τότε:

α) να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΟΜΝ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές

β) να αποδείξετε ότι υπάρχει $\lambda\in\mathbb{R}$, ώστε να είναι $i-z=\lambda i(z-1)$

γ) να αποδείξετε ότι ο μιγαδικός $w=\frac{i-z}{1-z}$ είναι φανταστικός

δ) να βρείτε το γεωμετρικό τόπο του σημείου Μ, ώστε τα σημεία Α, Μ, Ν να είναι συνευθειακά

7.782 Έστω οι μιγαδικοί z, w με $|z|=1$ και $w=2z+1$.

α) Να βρείτε τη γραμμή (C) πάνω στην οποία ανήκουν οι εικόνες του w

β) Να βρείτε την ελάχιστη τιμή του $|w|$

γ) Να αποδείξετε ότι το σημείο $N(-1,0)$ και οι εικόνες των z, w είναι σημεία συνευθειακά

δ) Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή του $|z-w|$

ε) Αν οι μιγαδικοί w_1, w_2 βρίσκονται στη γραμμή (C) και είναι $|w_1-w_2|=4$, να βρείτε το $|w_1+w_2|$

7.783 Έστω οι μιγαδικοί z, w με $|z-2|=1$ και $|w-i|=4$. Να βρείτε:

α) τη μέγιστη και την ελάχιστη απόσταση των εικόνων των μιγαδικών z και w

β) τη μέγιστη τιμή του μέτρου $|z+w|$

γ) τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της παράστασης $|2z-3w-4+3i|$

7.784 Δίνεται ο μιγαδικός αριθμός $z=2+\lambda+i\sqrt{3-\lambda^2}$, με $-\sqrt{3}\leq\lambda\leq\sqrt{3}$

α) Να αποδείξετε ότι το μέτρο του μιγαδικού $\frac{z+1}{z-1}$ είναι ανεξάρτητο του λ

β) Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο της εικόνας του μιγαδικού z

γ) Από τους παραπάνω μιγαδικούς z, έστω z_1 αυτός που έχει μέτρο $\sqrt{3}$. Να λύσετε την εξίσωση:

$$w+|w+2-i|+3i=|z_1+1|^2$$

7.785 Έστω οι μιγαδικοί z, w με $w=\frac{z+\alpha i}{iz+\alpha}$, όπου $\alpha\in\mathbb{R}^*$ και $z\neq\alpha i$.

α) Να αποδείξετε ότι ο w είναι φανταστικός αν και μόνο αν ο z είναι φανταστικός

β) Αν $w\notin\mathbb{I}$ και είναι $w=\overline{z}$, να βρείτε το γεωμετρικό τόπο (C) του z

γ) Αν $z_1, z_2\in(C)$, τότε:

ι) να αποδείξετε ότι $|z_1+z_2-2i|\leq 2\sqrt{2}$

ιι) αν $z_1-z_2=2(1+i)$, να βρείτε τους z_1, z_2

7.786 Έστω ο μιγαδικός $z\neq i$ και θεωρούμε τη συνάρτηση $f(z)=\frac{iz-2+4i}{z-i}$

α) Αν $Im(f(z))=0$, να βρείτε το γεωμετρικό τόπο της εικόνας του z

β) Αν $u=z-i$ και $w=f(z)-i$, να βρείτε το μέτρο του μιγαδικού uw

γ) Αν η εικόνα του z είναι σε κύκλο με κέντρο $K(0,1)$ και ακτίνα $\rho>0$, να αποδείξετε ότι η εικόνα του $f(z)$ είναι σε κύκλο με το ίδιο κέντρο. Πότε οι δύο κύκλοι συμπίπτουν;

7.787 Ο μιγαδικός w βρίσκεται σε κύκλο κέντρου $K(-2,1)$ και ακτίνα $\rho=1$. Θεωρούμε τον μιγαδικό $z=4w+8$.

α) Να υπολογίσετε το μέτρο $|\overline{w}i-1+2i|$

β) Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο του z

γ) Να αποδείξετε ότι: ι) $0\leq|z|\leq 8$ ιι) $z-\overline{z}=\frac{|z|^2}{4}i$

7.788 Έστω $z, w\in\mathbb{C}$, ώστε $w-2z=-4i^{2014}-\frac{(1+i)^{32}}{(8i)^5}$.

Αν ο αριθμός $(z-4+2i)(\overline{z}-4-6i)$ είναι φανταστικός, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι $w=2z+4+2i$

β) Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών z και w

γ) Αν u είναι το μέσο των εικόνων των z, w να αποδείξετε ότι $1\leq|u-8+5i|\leq 3$

7.789 Έστω $z\in\mathbb{C}^*$ και ο φανταστικός αριθμός w για τους οποίους ισχύει $5z=(3+4w)|z|$.

α) Να αποδείξετε ότι $w=\pm i$

β) Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο του z

7.790 Δίνεται ο μιγαδικός z για τον οποίο ισχύει η σχέση:

$$z^{100}+z^{99}+z^{98}+\cdots+z+1=0$$

Να αποδείξετε ότι: α) $z^{101} = 1$ β) $z + \frac{1}{z} \in \mathbb{R}$

7.791 Έστω οι μιγαδικοί z για τους οποίους ισχύει η σχέση $(\bar{z})^{2010} z^{2013} = 1$ (1)
α) Να αποδείξετε ότι $|z| = 1$ και $\bar{z} = z^2$
β) Να λύσετε την εξίσωση (1)
γ) Έστω ο μιγαδικός z_0, με $Im(z_0) > 0$, που είναι λύση της εξίσωσης (1) και έστω ο μιγαδικός

$$w = \frac{\lambda + z_0}{\lambda - z_0}, \text{ με } \lambda \in \mathbb{R}$$

Να βρείτε:

ι) το $|w|$ ως συνάρτηση του λ

ιι) το λ, ώστε ο w να έχει το μέγιστο μέτρο

7.792 Έστω ο μιγαδικός $z = 6 + \sigma\upsilon\nu(\pi t) + [8 + \eta\mu(\pi t)]i$, με $t \geq 0$
α) Να βρείτε το $|z - 6 - 8i|$
β) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων του z
γ) Να βρείτε τη μικρότερη και τη μεγαλύτερη απόσταση της εικόνας του z από την αρχή των αξόνων
δ) Να εξετάσετε αν υπάρχει $t \geq 0$, ώστε η εικόνα του z να βρίσκεται στη διχοτόμο της πρώτης και τρίτης γωνίας των αξόνων
ε) Για $t = 0$ να βρείτε το $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε ο αριθμός $w = z + 1 + \frac{\lambda}{z+1}$ να είναι πραγματικός

7.793 Δίνονται οι μιγαδικοί $z = 2011 + i$ και $w = 1 - 2011i$. Να αποδείξετε ότι:
α) $\frac{z}{w} = i$ β) $z^{2011} + iw^{2011} = 0$
γ) αν Α, Β είναι οι εικόνες των μιγαδικών z^{2011} και w^{2011} αντίστοιχα, τότε το τρίγωνο ΟΑΒ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές

7.794 Δίνονται οι μιγαδικοί z, w με $|z| = |w| = |z - w| = 1$. Αν $u = \frac{z}{w}$, να αποδείξετε ότι:
α) $\bar{u} = \frac{1}{u}$ β) $u^3 = -1$ γ) $|z^{2012} + w^{2012}| = 1$

7.795 Έστω ο μιγαδικός $z \neq -i$ και $w = \frac{iz+1}{z+i}$
α) Αν η εικόνα του w είναι εξωτερικό σημείο του μοναδιαίου κύκλου, να αποδείξετε ότι $Im(z) < 0$ και $Im(z) \neq -1$
β) Αν η εικόνα του z στο μιγαδικό επίπεδο δεν είναι εξωτερικό σημείο του κύκλου με κέντρο $O(0,0)$ και ακτίνα 2, να βρείτε που βρίσκεται η εικόνα του w
γ) Αν $w \in \mathbb{R}$, να βρείτε το γεωμετρικό τόπο του z

7.796 Έστω ο μιγαδικός z, ώστε $3z\bar{z}^7 + 2\bar{z}z^7 = 5$. Να αποδείξετε ότι:
α) $z\bar{z}^7 = 1$ β) $|z| = 1$ γ) $z + \frac{1}{z} \in \mathbb{R}$

7.797 Δίνονται οι μιγαδικοί α, β, γ οι οποίοι είναι διαφορετικοί μεταξύ τους ανά δύο και ικανοποιούν τη σχέση $\alpha\bar{\beta} + \beta\bar{\gamma} + \gamma\bar{\alpha} = 1$. Να αποδείξετε ότι:
α) ο αριθμός $w = \frac{\beta - \alpha}{\gamma - \alpha}$ είναι πραγματικός
β) οι εικόνες των α, β, γ είναι σημεία συνευθειακά

7.798 Έστω ο μιγαδικός $z = \lambda(1+i) + 1 - i$, με $\lambda \in \mathbb{R}$
α) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο της εικόνας του z
β) Να βρείτε την τιμή του λ, ώστε ο μιγαδικός z να έχει το ελάχιστο μέτρο
γ) Να βρείτε τους $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ως συνάρτηση του λ, ώστε να ισχύει $z = \frac{\alpha + \beta i}{1+i}$
δ) Αν $|z| = 2\sqrt{2}$ και $\lambda > 0$, να βρείτε τον μικρότερο θετικό ακέραιο αριθμό ν, ώστε ο μιγαδικός z^ν να είναι πραγματικός

7.799 Έστω $\nu \in \mathbb{N}^*$ και $z \in \mathbb{C}$, ώστε να ισχύουν οι σχέσεις:

$$z^\nu = 3 + 4i \text{ και } z^{\nu+1} = 2 + 11i$$

Να βρείτε:
α) τους ν και z
β) τις τιμές του $\mu \in \mathbb{N}^*$, ώστε να είναι $z^\mu = (-1+2i)^\mu$

7.800 Έστω $z, w \in \mathbb{C}$ με $|z| = |w| = 2$ και $z^2 + w^2 \neq 0$. Θεωρούμε τον μιγαδικό $u = \frac{2zw}{z^2 + w^2}$. Να αποδείξετε ότι:
α) ο u είναι πραγματικός β) $|u| \geq 1$
γ) αν $u = 2$, τότε το τρίγωνο με κορυφές τις εικόνες των $0, z, w$ είναι ισόπλευρο

7.801 Έστω ο μιγαδικός z ώστε $3z^7 + 7\bar{z}^7 = 10$. Να αποδείξετε ότι:
α) $z^7 = \bar{z}^7 = 1$ β) οι εικόνες του z είναι ομοκυκλικά σημεία
γ) αν $z \neq 1$, τότε ο αριθμός $w = \frac{1-z}{1+z}$ είναι φανταστικός

7.802 Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z για τους οποίους ισχύει η σχέση:

$$|z + i\sqrt{2}| = 1 + \sqrt{2} Im(z)$$

α) Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο του z
β) Αν z_1, z_2 είναι δύο από τους παραπάνω μιγαδικούς z με $|z_1 + z_2| = \sqrt{3}$, να αποδείξετε ότι $|z_1 - z_2| \geq 1$
γ) Να αποδείξετε ότι $|z + i\sqrt{2}| - |z - i\sqrt{2}| = 2$
δ) Να αποδείξετε ότι $|z^2 + 2| = |z|^2$
ε) Να αποδείξετε ότι οι εικόνες των μιγαδικών z^2 βρίσκονται στην ευθεία $x = -1$

7.803 Έστω οι μιγαδικοί z, w για τους οποίους ισχύουν οι σχέσεις:

$$|z|^2 + z\overline{w} = 1 \text{ και } |w|^2 + \overline{z}w = 3$$

α) Να αποδείξετε ότι $|z + w| = 2$
β) Να αποδείξετε ότι οι εικόνες των z, w βρίσκονται σε κύκλους με κέντρα την αρχή των αξόνων
γ) Να βρείτε την απόσταση των εικόνων των μιγαδικών z, w
δ) Να αποδείξετε ότι οι εικόνες των z, w και η αρχή των αξόνων είναι σημεία συνευθειακά

7.804 Θεωρούμε τον μιγαδικό $z \neq 0$ και έστω η συνάρτηση $f(n) = (i^n - 1)z$, με $n \in \mathbb{N}^*$
α) Να αποδείξετε ότι $f(n)f(n+1)f(n+2)f(n+3) = 0$
β) Αν $f(3) = -1 - 3i$, να βρείτε τον μιγαδικό z
γ) Αν $z = 2 + i$, να βρείτε το μέτρο του μιγαδικού $w = f(n+1) - f(n)$

7.805 Η εξίσωση $z^2 + \alpha z + \beta = 0$, με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, έχει ρίζες τους αριθμούς $z_1 = 3 + 2i$ και z_2
α) Να βρείτε τις τιμές των α, β
β) Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $w = z_1^{\nu} + z_2^{\nu}$, με $\nu \in \mathbb{N}^*$ είναι πραγματικός
γ) Να βρείτε την ελάχιστη τιμή της παράστασης $f(u) = |u - z_1| + |u - z_2|$, με $u \in \mathbb{C}$
δ) Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων $M(\kappa, \lambda)$, αν η εικόνα του μιγαδικού $\kappa z_1 + \lambda z_2$ βρίσκεται στην ευθεία $y = x$

7.806 Έστω οι μιγαδικοί z_1, z_2 και ο ακέραιος $\nu > 1$, ώστε $z_1^{\nu} = 2 + i$ και $z_2^{\nu} = 1 + 2i$. Αν $w = \dfrac{z_1}{z_2}$, να αποδείξετε ότι:
α) ο w δεν είναι πραγματικός β) $\dfrac{w+1}{w-1} \in \mathbb{I}$
γ) $|z - w| + |z + w| \geq 2$, για κάθε $z \in \mathbb{C}$

7.807 Έστω οι μιγαδικοί $z = \dfrac{25(\lambda + i)}{4 + 3i}$, όπου $\lambda \in \mathbb{R}$
α) Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών z
β) Να βρείτε τον μιγαδικό z_0 με το ελάχιστο μέτρο
γ) Να βρείτε τις τιμές του $\mu \in \mathbb{R}$, ώστε $z + \dfrac{\mu}{z} \in \mathbb{R}$

7.808 Θεωρούμε τον μιγαδικό αριθμό $z = x + yi$, με $x, y \in \mathbb{R}$ και έστω $f(z) = (1 + i\sqrt{3})z + \sqrt{3}$
α) Να βρείτε τους αριθμούς $Re(f(z))$ και $Im(f(z))$ ως συνάρτηση των x και y.
β) Αν ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του $f(z)$ είναι η ευθεία $y = \sqrt{3}x + 1$, να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων του z.
γ) Αν M, N, P είναι αντίστοιχα οι εικόνες των $z, f(z)$ και i, να βρείτε:
ι) τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε $f(z) - i = (\alpha + \beta i)(z - i)$
ιι) το λόγο $\dfrac{PN}{PM}$

7.809 Έστω $z, w \neq 0$ μιγαδικοί, ώστε $|z + w| = |z - w|$ και A, B είναι αντίστοιχα οι εικόνες τους στο μιγαδικό επίπεδο. Να αποδείξετε ότι:
α) $A\widehat{O}B = 90^0$ β) $|z + w|^2 = |z|^2 + |w|^2$
γ) ο αριθμός $\dfrac{z}{w}$ είναι φανταστικός

7.810 Έστω $z, w \in \mathbb{C}^*$, με $|w|(z - \overline{z}) + (w\overline{w} - 12)(z + \overline{z})i = 0$. Να αποδείξετε ότι:
α) ο z δεν είναι φανταστικός αριθμός
β) η εικόνα M του z κινείται σε ευθεία που διέρχεται από το σημείο $O(0, 0)$
γ) αν η εικόνα M του z κινείται στη διχοτόμο της πρώτης και τρίτης γωνίας των αξόνων, να αποδείξετε ότι η εικόνα N του w κινείται σε κύκλο κέντρου $O(0, 0)$ και ακτίνα 3.

7.811 Θεωρούμε την εξίσωση: $z^3 - 4z^2 + 6z - 4 = 0$. Να βρείτε:
α) τις ρίζες z_1, z_2, z_3 της παραπάνω εξίσωσης
β) τον γεωμετρικό τόπο της εικόνας του μιγαδικού z για τον οποίο ισχύει:

$$|z - z_1|^2 + |z - z_2|^2 + |z - z_3|^2 = 18$$

7.812 Θεωρούμε τον μιγαδικό αριθμό z και τη συνάρτηση $f(z) = |z| - i \cdot \overline{z}$
α) Να λύσετε την εξίσωση $f(z) = 2 - i$
β) Αν $|f(|z|)| = \sqrt{2}$, να βρείτε το $|z|$
γ) Αν $|z| = 1$, να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων του $f(z)$

7.813 Δίνεται η εξίσωση $z\overline{z} + 4Re[(1 - 2i)z] + 4 = 0$
α) Να αποδείξετε ότι έχει άπειρες λύσεις
β) Αν z_1, z_2 είναι δύο λύσεις της παραπάνω εξίσωσης, να αποδείξετε ότι $|z_1 - z_2| \leq 8$
γ) Αν t_1, t_2 είναι οι τιμές των μιγαδικών για τις οποίες η παράσταση $|z_1 - z_2|$ γίνεται μέγιστη, να αποδείξετε ότι:

$$|t_1 + t_2|^{2n} + |10(t_1 - t_2)|^n = 2^{4n+1}5^n, \text{ για κάθε } n \in \mathbb{N}^*$$

7.814 Αν z_1, z_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης $z^2 - 2z + 2 = 0$ και A, B, Γ οι εικόνες των μιγαδικών $z_1, z_2, z_1 + z_2$ αντίστοιχα, τότε:
α) να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές
β) να βρείτε το μιγαδικό z για τον οποίο ισχύει η σχέση:

$$|z - z_1| = |z - z_2| = |z - z_1 - z_2|$$

γ) Να βρείτε την εξίσωση του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ΑΒΓ

7.815 Έστω $\phi \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$ και A, B αντίστοιχα οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών:

$$z_1 = \sigma\upsilon\nu\phi + i\eta\mu\phi \text{ και } z_2 = -\sigma\upsilon\nu\phi + i\eta\mu\phi$$

α) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των z_1, z_2

β) Να αποδείξετε ότι $\sqrt{2} \leq |z_1 - z_2| \leq 2$

γ) Θεωρούμε τον μιγαδικό w για τον οποίο ισχύουν:

$$|w| \leq 1 \text{ και } |w - z_1| = |w - z_2|$$

ι) Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο του w

ιι) Να αποδείξετε ότι $w^{2016} \leq 1$

ιιι) Αν τα σημεία O, A, B είναι συνευθειακά, να αποδείξετε ότι:

$$|nz_1 + z_2| + |z_1 + nz_2| = 2n - 2, \text{ για κάθε } n \in \mathbb{N}^*$$

7.816 Έστω $z, w \in \mathbb{C}$, ώστε $zw = 1$ και η εικόνα του z κινείται στην ευθεία $(\epsilon): 2x + y - 1 = 0$

α) Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο του w

β) Να βρείτε τα κοινά σημεία των δύο γεωμετρικών τόπων

γ) Να αποδείξετε ότι $|z| \geq \frac{\sqrt{5}}{5}$

7.817 Έστω $z_1, z_2 \in \mathbb{C}^*$ ώστε $\frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_1} = 1$. Να αποδείξετε ότι:

α) $z_1^3 + z_2^3 = 0$ β) $|z_1| = |z_2|$ γ) το τρίγωνο με κορυφές τις εικόνες των $0, z_1, z_2$ είναι ισόπλευρο.

7.818 Έστω $z \in \mathbb{C}^*$ και $w = z + \frac{4}{z}$ με $Re(w) = 2Re(z)$.

α) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο του z

β) Αν $Re(z) \neq 0$, τότε:

ι) να αποδείξετε ότι $w \in \mathbb{R}$ και $-4 \leq w \leq 4$

ιι) να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των μιγαδικών $u = iz + 4 - 3i$ και την ελάχιστη τιμή του $|u|$

7.819 Έστω οι μιγαδικοί z, w, με $Im(z) > 0$, για τους οποίους ισχύουν οι σχέσεις:

$$z|w| + w|z| = 40 \text{ και } zw = 25$$

α) Να βρείτε τους γεωμετρικούς τόπους των z, w

β) Να βρείτε τον μιγαδικό $u = z - i$ ο οποίος έχει το ελάχιστο μέτρο

γ) Να αποδείξετε ότι υπάρχουν μιγαδικοί z, w ώστε ο αριθμός $z^n - w^n$, με $n \in \mathbb{N}^*$, να είναι φανταστικός.

7.820 Έστω $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, ώστε $z_1^2 + z_2^2 = 0$. Να αποδείξετε ότι:

α) $z_1^{10} + z_2^{10} = 0$ β) $z_1^{2n} + z_2^{2n} = 0$, όπου $n \in \mathbb{N}$ με n περιττός γ) $|z_1 - z_2| = \sqrt{2}|z_1| = \sqrt{2}|z_2|$

7.821 Έστω οι μιγαδικοί z, w ώστε $w = 2zi$. Αν A, B είναι οι εικόνες των z, w αντίστοιχα, τότε:

α) αν το σημείο B κινείται στον κύκλο κέντρου $O(0,0)$ και ακτίνα 4, να αποδείξετε ότι το σημείο A κινείται επίσης σε κύκλο

β) να αποδείξετε ότι το τρίγωνο OAB είναι ορθογώνιο.

7.822 Αν $z \notin \mathbb{R}$ και $z^3 = 1$, να αποδείξετε ότι:

α) ο αριθμός $z - \frac{1}{z}$ είναι φανταστικός β) $|z + 1| = 1$

γ) $(iz)^{2010} + (1 + z^2)^{2009} - (iz)^{2008} = 0$

7.823 Αν z_1, z_2, z_3 ώστε $|z_1| = 1, |z_2| = 2$ και $|z_3| = 4$, να αποδείξετε ότι:

α) $z_1 + z_2 + z_3 \neq 0$

β) $8|z_1 + z_2 + z_3| = |16z_1z_2 + z_2z_3 + 4z_3z_1|$

γ) Θεωρούμε τον μιγαδικό

$$z_0 = \frac{16z_1z_2 + z_2z_3 + 4z_3z_1}{z_1 + z_2 + z_3}$$

και τους μιγαδικούς w για τους οποίους ισχύει η σχέση $|(3 + 4i)w + 4 - 3i| = |z_0| - 3$. Να βρείτε:

ι) τον γεωμετρικό τόπο του w

ιι) την ελάχιστη και μέγιστη τιμή της παράστασης $|iw - 2 + 3i|$

7.824 Έστω οι μιγαδικοί $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ με $|z_1| = \sqrt{2}, z_2 \neq 3i$ και $(z_3 + 2)^8 = 16(z_3 + 1)^8$. Αν ο αριθμός $w = \frac{z_2 + 3i}{z_2 - 3i}$ είναι φανταστικός, τότε:

α) Να βρείτε τα μέτρα των z_2 και z_3

β) Να αποδείξετε ότι:

ι) $z_1 + z_2 + z_3 \neq 0$

ιι) $6|z_1 + z_2 + z_3| = |2z_1z_2 + 2z_2z_3 + 9z_3z_1|$

7.825 Δίνονται οι μιγαδικοί z_1, z_2, z_3 ώστε να είναι:

$$z_1^2 = 1 + \sqrt{3}i, \quad z_2^3 = 26 + \sqrt{53}i \quad \text{και} \quad z_3^4 = 3 + \sqrt{7}i$$

α) Να βρείτε τα μέτρα τους

β) Να αποδείξετε ότι $z_1 + z_2 + z_3 \neq 0$

γ) Να αποδείξετε ότι

$$\left|\frac{2z_1z_2 + 2z_2z_3 + 9z_3z_1}{z_1 + z_2 + z_3}\right| = 6$$

7.826 Έστω $\lambda \in \mathbb{R}$ και $z \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$, ώστε $|z| = \overline{z} + \lambda z$

α) Να αποδείξετε ότι $\lambda = 1$

β) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών z

γ) Να βρείτε την ελάχιστη τιμή του $|z - i|$

δ) Να αποδείξετε ότι $z^3 \in \mathbb{R}$

7.827 Θεωρούμε τους μιγαδικούς z για τους οποίους ισχύει η σχέση:

$$(1+iz)^{2012} = \frac{2+3i}{\sqrt{5}+2\sqrt{2}i}$$

Να αποδείξετε ότι:
α) οι εικόνες $M(z)$ κινούνται σε κύκλο (C)
β) ο z δεν είναι πραγματικός
γ) η ελάχιστη τιμή του $|z-w|$, όπου $|w-2|=|w-4|$, είναι 2

7.828 Έστω $z \in \mathbb{C}^*$, ώστε $z+\frac{1}{z}=-1$. Να αποδείξετε ότι:
α) $z \neq 1$ β) $z^3=1$ γ) $|z+1|=|z|=1$
δ) $z^{50}+\frac{1}{z^{50}}=z^{100}+\frac{1}{z^{100}}$

7.829 Έστω z_1, z_2 οι ρίζες της εξίσωσης $z^2-z+1=0$.
α) Να υπολογίσετε την παράσταση $w=\frac{z_1+z_2-i}{iz_1z_2-1}$
β) Αν Α, Β, Ρ είναι οι εικόνες των z_1, z_2, w αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΡΑΒ είναι ισοσκελές.
γ) Να αποδείξετε ότι: $(z_1^{10}+z_2^{10})\left(\frac{1}{z_1^{10}}+\frac{1}{z_2^{10}}\right)=1$

7.830 Θεωρούμε τον μιγαδικό z για τον οποίο ισχύει η σχέση $z+\frac{k^2}{z}=k$, όπου $k>0$. Να αποδείξετε ότι:
α) $|z|=2Re(z)=k$ β) $z^2+|z|\overline{z}=0$ γ) $\left(\frac{z}{\overline{z}}\right)^{2013}=1$

7.831 Έστω οι μιγαδικοί x, y, z με $|x|=|y|=|z|=\rho>0$ και $x+y=z$. Να αποδείξετε ότι:
α) $x \neq y$ και $x \neq z$
β) $x^2+xy+y^2=0$ και $x^3=y^3$
γ) ο αριθμός $\frac{x}{y}$ είναι ρίζα της εξίσωσης $w^2+w+1=0$, την οποία να λύσετε
δ) $x^{2012}+y^{2012}+z^{2012}=0$

7.832 Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί z, για τους οποίους ισχύει $|z-1|=1+Re(z)$ και η συνάρτηση $f(z)=z^2-z$.
α) Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών z, είναι η παραβολή $y^2=4x$
β) Να προσδιορίσετε τους μιγαδικούς αριθμούς z, για τους οποίους ισχύει $|f(z)|=3|\overline{z}|$

7.833 Έστω οι μιγαδικοί $z=\alpha+\beta i$, όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ και $w=z^2+|z|^2$. Αν Α, Β είναι εικόνες των z, w αντίστοιχα, τότε:
α) Να βρεθούν οι συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ συναρτήσει των α, β
β) Να αποδείξετε ότι τα σημεία O, A, B είναι συνευθειακά
γ) Αν το σημείο A κινείται στην ευθεία με εξίσωση $y=1$, να βρείτε το γεωμετρικό τόπο του σημείου B
δ) Αν το σημείο B κινείται στην ευθεία με εξίσωση $y=1$, να βρείτε το γεωμετρικό τόπο του σημείου A

7.834 Έστω $z_1, z_2 \in \mathbb{C}^*$, ώστε $z_1^2+z_1z_2+z_2^2=0$. Να αποδείξετε ότι:
α) $z_1 \neq z_2$ και $z_1^3-z_2^3=0$
β) $|z_1|=|z_2|=\frac{|z_1-z_2|}{\sqrt{3}}=|z_1+z_2|$
γ) η γωνία των διανυσματικών ακτίνων των z_1, z_2 ισούται με 120^0

7.835 Θεωρούμε την εξίσωση:

$$(z^3-1)-i\sqrt{3}(z^2+z+1)=0 \quad (1)$$

α) Να λύσετε την εξίσωση (1)
β) Αν z_1, z_2, z_3 οι ρίζες της εξίσωσης (1) και Α, Β, Γ είναι οι εικόνες τους αντίστοιχα στο μιγαδικό επίπεδο, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές και να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου αυτού

7.836 Έστω z_1, z_2 οι ρίζες της εξίσωσης $z^2+\alpha z+1=0$, με $\alpha \in (-2,2)$.
α) Να αποδείξετε ότι ο μιγαδικός $u=\frac{z_1}{z_2}+\frac{z_2}{z_1}$, ισούται με α^2-2
β) Αν w είναι μιγαδικός με $w \neq -2i$, ώστε να ισχύει η σχέση

$$z_1(w+2i)^2+z_2(\overline{w}-2i)=0$$

να αποδείξετε ότι: ι) $|w+2i|=1$ ιι) $|w-iu| \leq 1+\alpha^2$

7.837 Θεωρούμε τους μιγαδικούς z_1, z_2, z_3 για τους οποίους ισχύουν οι σχέσεις:

$$|z_1|=|z_2|=|z_3|=1, \quad z_1+z_2+z_3=1 \text{ και } z_1z_2z_3=1$$

α) Να αποδείξετε ότι:
ι) $\frac{1}{z_1}=\overline{z_1}, \quad \frac{1}{z_2}=\overline{z_2}$ και $\frac{1}{z_3}=\overline{z_3}$
ιι) $\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}+\frac{1}{z_3}=1$ και $z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1=1$
β) Να λύσετε την εξίσωση $(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)=0$

7.838 Έστω $z, w \in \mathbb{C}$, ώστε να είναι $\overline{z}w=i$.
α) Να αποδείξετε ότι:
ι) αν ισχύει $|w+1|=|w|$, τότε $|z-i|=1$
ιι) αν ισχύει $|w-i|=\sqrt{2}$, τότε $|z-1|=\sqrt{2}|z|$
β) Να βρεθούν οι γεωμετρικοί τόποι C_1 και C_2 των εικόνων Μ των μιγαδικών z, για τους οποίους ισχύουν αντίστοιχα οι σχέσεις $|z-i|=1$ και $|z-1|=\sqrt{2}|z|$
γ) Αν οι εικόνες M_1 και M_2 των μιγαδικών z_1 και z_2 κινούνται στους C_1 και C_2 αντίστοιχα, να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή του μέτρου $|z_1-z_2|$

7.839 Έστω z_1, z_2 οι ρίζες της εξίσωσης $z^2 - \alpha z + 9 = 0$, με $\alpha \in \mathbb{R}$ και $z_1, z_2 \notin \mathbb{R}$.
α) Να βρείτε τα $|z_1|$ και $|z_2|$
β) Αν ισχύει $\dfrac{z_1}{z_2} + \dfrac{z_2}{z_1} = -2$ να βρείτε την τιμή του α
γ) Για $\alpha = 0$, να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων του z, για τον οποίο ισχύει η σχέση

$$|z - z_1| + |z - z_2| = 10$$

7.840 Έστω $z_1, z_2 \notin \mathbb{R}$, οι ρίζες της εξίσωσης $z^2 + \alpha = z$, με $\alpha \in \mathbb{R}$
α) Να αποδείξετε ότι $\alpha > 0$ β) Αν $|z_1| = 1$, τότε:
ι) να βρείτε το α
ιι) να βρείτε τους z_1 και z_2
ιιι) να λύσετε την εξίσωση $(z - z_1)^2 + (z - z_2)^2 = 0$

7.841 Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί $z_1 = \lambda(2 - i)$ και $z_2 = \dfrac{1}{z_1}$, όπου $\lambda \in \mathbb{R}$.
α) Να βρείτε την εικόνα M του μιγαδικού που αντιστοιχεί στο μέσο του τμήματος με άκρα τους τις εικόνες των μιγαδικών z_1, z_2
β) Να αποδείξετε ότι το σημείο M, ανήκει στην υπερβολή με εξίσωση

$$\frac{5x^2}{4} - 5y^2 = 1$$

7.842 Έστω $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ με $|z_1| = |z_2| = |z_3| = \rho > 0$, για τους οποίους ισχύουν οι σχέσεις:

$$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = 0 \text{ και } |z_1 + z_2 + z_3| = \rho^2$$

Να αποδείξετε ότι:
α) $|z_1 + z_2 + z_3|^2 = 2|z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1|$ β) $\rho = 2$
γ) $|z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1| = 8$

7.843 Θεωρούμε τον μιγαδικό αριθμό z και τη συνάρτηση $f(z) = |z| + iz$. Να αποδείξετε ότι:
α) $f(|z|) = (1 + i)|z|$ και $|f(|z|)| = \sqrt{2}|z|$
β) αν ισχύει $|f(|z|)| = 2\sqrt{2}$, τότε $|z| = 2$
γ) αν $z, w \in \mathbb{C}$, τότε $|f(z) - f(w)| \leq 2|z - w|$

7.844 Έστω οι μιγαδικοί z_1, z_2 για τους οποίους ισχύουν οι σχέσεις:

$$z_1^2 + z_2^2 = 2(z_1 - 3)(z_2 + 3) - 7 \text{ και } Im(z_1 - z_2) > 0$$

α) Να αποδείξετε ότι:
ι) $(z_1 - z_2)^2 - 6(z_1 - z_2) + 25 = 0$
ιι) $z_1 - z_2 = 3 + 4i$
β) Αν ο μιγαδικός z_2 κινείται σε κύκλο κέντρου $O(0,0)$ και ακτίνας 5, να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος του μιγαδικού z_1

7.845 Δίνονται τα σύνολα:

$$A = \{z \in \mathbb{C} / |z| = 1\} \text{ και } B = \{w \in \mathbb{C} / w = z + \frac{2}{z}, z \in A\}$$

α) Να εκφράσετε γεωμετρικά το σύνολο A
β) Να βρείτε τη μέγιστη τιμή της παράστασης $K = |z_1 - z_2|$, με $z_1, z_2 \in A$
γ) Αν $z_1, z_2 \in A$, με $|z_1 - z_2| = 2$, να υπολογίσετε την παράσταση $|z_1 + z_2 - 2012i|$
δ) Να αποδείξετε ότι το σύνολο B αποτελείται από τα σημεία μιας έλλειψης και να βρείτε την μέγιστη τιμή του $|z - w|$, όπου $z \in A$ και $w \in B$

7.846 Έστω $z, w \in \mathbb{C}^*$, ώστε $w^2 = \overline{z}$ και $z^2 = -\overline{w}$
α) Να αποδείξετε ότι: ι) $|z| = |w| = 1$ ιι) $z = -w$
β) Να βρείτε τους μιγαδικούς z και w

7.847 Έστω ο μιγαδικός z, με $|z| = 1$ και $|1 - z| = x$. Να αποδείξετε ότι:
α) $x \in [0, 2]$ β) $z + \overline{z} = 2 - x^2$ γ) $|1 + z^2| = |z + \overline{z}|$
δ) $\sqrt{2} \leq |1 - z| + |1 + z^2| \leq 4$

7.848 Δίνεται ο μιγαδικός z, με $|z| = 1$ και $|1 + z| = x$. Να αποδείξετε ότι:
α) $x \in [0, 2]$ β) $Re(z) = \dfrac{x^2 - 2}{2}$
γ) $|z^2 - z + 1| = |x^2 - 3|$ δ) $\sqrt{3} - x \leq |z^2 - z + 1| \leq \dfrac{13}{4} - x$

7.849 Η εικόνα του μιγαδικού w βρίσκεται σε κύκλο με κέντρο το σημείο $K(-1, 0)$ και ακτίνα $\rho = 1$ και θεωρούμε τον μιγαδικό $z = \dfrac{1 + 2w}{1 - w}$.
α) Να αποδείξετε ότι η εικόνα του z βρίσκεται σε κύκλο (C) με κέντρο $O(0, 0)$ και ακτίνα 1
β) Αν z_1, z_2, z_3 τρείς μιγαδικοί του κύκλου (C), να αποδείξετε ότι:
ι) ο αριθμός $u = \dfrac{z_1 + z_2}{z_3} + \dfrac{z_2 + z_3}{z_1} + \dfrac{z_3 + z_1}{z_2}$ είναι πραγματικός
ιι) αν επιπλέον είναι $z_1 + z_2 + z_2 = 0$, τότε

$$Re\left(\frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_3} + \frac{z_3}{z_1}\right) = -\frac{3}{2}$$

7.850 Έστω οι μιγαδικοί z, w ώστε $z - \overline{z} = 4i$ και $w + \overline{w} = -2$.
α) Να αποδείξετε ότι $|z + iw| \geq 1$
β) Αν είναι $z + iw = -2 + i$ και M, N είναι οι εικόνες των z, w αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι η μεσοκάθετος του MN διέρχεται από σταθερό σημείο

7.851 Έστω $z \in \mathbb{C}$, με $|4 + z| - |4 - z| = 6$
α) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο του z
β) Να αποδείξετε ότι:
ι) $Re(z) \geq 3$ ιι) $|4 + z|^2 - |4 - z|^2 \geq 48$
γ) Να βρείτε την ελάχιστη τιμή του $|z|$

7.852 Έστω a, b, c είναι τρεις μη μηδενικοί μιγαδικοί και διάφοροι μεταξύ τους ανά δύο και θεωρούμε τους μιγαδικούς:

$$z_1 = \frac{a}{b-c}, z_2 = \frac{b}{c-a} \text{ και } z_3 = \frac{c}{a-b}$$

α) Αν δύο από τους z_1, z_2, z_3 είναι φανταστικοί, να αποδείξετε ότι:

ι) και ο τρίτος είναι φανταστικός

ιι) αν A, B, C είναι οι εικόνες των a, b, c αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι το ορθόκεντρο του τριγώνου ABC είναι η αρχή O των αξόνων

β) αν $z_1 = z_2$, τότε είναι:

$$|(|a| - |b|)(|a| + |b|)| \leq |a^2 + b^2| \leq (|a| + |b|)|c|$$

8 Θέματα εξετάσεων

(α΄) 2003

8.853 Δίνονται οι μιγαδικοί $z = \alpha + \beta i$ και $w = 3z - i \cdot \bar{z} + 4$. Να αποδείξετε ότι:

α) $Re(w) = 3\alpha - \beta + 4$ και $Im(w) = 3\beta - \alpha$

β) αν οι εικόνες του w στο μιγαδικό επίπεδο κινούνται στην ευθεία $y = x - 12$, να αποδείξετε ότι οι εικόνες του z κινούνται στην ευθεία $y = x - 2$

γ) Να βρείτε ποιός από τους παραπάνω μιγαδικούς z έχει το ελάχιστο μέτρο

(Ημερήσια)

8.854 α) Να περιγράψετε γεωμετρικά το σύνολο (Σ) των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z που ικανοποιούν τις σχέσεις $|z| = 2$ και $Im(z) \geq 0$

β) Να αποδείξετε ότι, αν η εικόνα του μιγαδικού αριθμού z κινείται στο σύνολο (Σ), τότε η εικόνα του μιγαδικού $w = \dfrac{1}{2}\left(z + \dfrac{4}{z}\right)$ κινείται σε ευθύγραμμο τμήμα το οποίο βρίσκεται στον άξονα $x'x$

(Ημερήσια επαναληπτικές)

8.855 Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί $z = x + yi$, όπου $x, y \in \mathbb{R}$ και $w = \dfrac{i(i+z)}{i-z}$, με $z \neq i$. Να αποδείξετε ότι:

α) $w = \dfrac{2x}{x^2 + (y-1)^2} + \dfrac{1 - x^2 - y^2}{x^2 + (y-1)^2} i$

β) Αν ο w είναι πραγματικός αριθμός, τότε η εικόνα του z στο μιγαδικό επίπεδο, ανήκει σε κύκλο κέντρου $O(0,0)$ και ακτίνας $\rho_1 = 1$

γ) Αν ο z είναι πραγματικός αριθμός, τότε η εικόνα του w ανήκει σε κύκλο κέντρου $O(0,0)$ και ακτίνας $\rho_2 = 1$

(Εσπερινά)

8.856 Δίνεται η συνάρτηση $f(z) = \dfrac{z+i}{z}$, με $z \neq 0$

α) Αν $|f(z)| = |f(\bar{z})|$, να αποδείξετε ότι ο z είναι πραγματικός

β) Αν $|f(z)| = 1$, να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων του z στο μιγαδικό επίπεδο

γ) Αν $Re(f(z)) = 2$, να αποδείξετε ότι οι εικόνες του μιγαδικού αριθμού z, βρίσκονται σε κύκλο του οποίου να προσδιορίσετε το κέντρο και την ακτίνα

(Ομογενείς)

(β΄) 2004

8.857 Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς $z = x + yi$, όπου $x, y \in \mathbb{R}$, για τους οποίους ισχύει η σχέση:

$$\left(\frac{z+\bar{z}}{2}\right)^2 + \left(\frac{z-\bar{z}}{2i}\right)^2 i = \alpha + (1-\alpha)i$$

Να αποδείξετε ότι:

α) αν $Im(z) = 0$, τότε $\alpha = 1$

β) αν $\alpha = 0$, τότε $z^2 + 1 = 0$

γ) για τον πραγματικό αριθμό α, ισχύει $0 \leq \alpha \leq 1$

δ) οι εικόνες M των μιγαδικών αριθμών z, ανήκουν σε κύκλο του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα.

(Εσπερινά)

8.858 Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς $z = x + yi$, όπου $x, y \in \mathbb{R}$, για τους οποίους υπάρχει $\kappa \in \mathbb{R}$, ώστε να ισχύει $x = 3 - \kappa$ και $y = 2\kappa + 1$. Να αποδείξετε ότι:

α) αν $3Re(z) + 4Im(z) = 3$, τότε $\kappa = -2$

β) αν $|z - 1| = \sqrt{5}$, τότε $|z| = \sqrt{10}$

γ) οι εικόνες M των μιγαδικών αυτών αριθμών z στο μιγαδικό επίπεδο ανήκουν σε ευθεία, της οποίας να βρείτε την εξίσωση

(Εσπερινά επαναληπτικές)

8.859 Έστω οι μιγαδικοί $z \neq \pm i$ και $w = \dfrac{z}{z^2+1}$

α) Να αποδείξετε ότι αν ο w είναι πραγματικός, τότε ο z είναι πραγματικός ή $|z| = 1$

β) Να λύσετε την εξίσωση $\dfrac{z}{z^2+1} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

γ) Αν z_1, z_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης του ερωτήματος (β), να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης

$$K = \frac{(z_1 z_2)^3 - i}{4 + (z_1 + z_2)^2}$$

(Ομογενείς)

(γ') 2005

8.860 Έστω οι μιγαδικοί z_1, z_2, z_3 με $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 3$. Να αποδείξετε ότι:
α) $\overline{z_1} = \dfrac{9}{z_1}$
β) ο αριθμός $w = \dfrac{z_1}{z_2} + \dfrac{z_2}{z_1}$ είναι πραγματικός
γ) $|z_1 + z_2 + z_3| = \dfrac{1}{3}|z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1|$

(Ημερήσια)

8.861 α) Να βρείτε τους μιγαδικούς z_1, z_2 για τους οποίους ισχύουν οι σχέσεις:

$$z_1 + z_2 = 4 + 4i \text{ και } 2z_1 - \overline{z_2} = 5 + 5i$$

β) Για τους μιγαδικούς αριθμούς z, w ισχύουν:

$$|z - 1 - 3i| \leq \sqrt{2} \text{ και } |w - 3 - i| \leq \sqrt{2}$$

ι) να αποδείξετε ότι υπάρχουν μοναδικοί μιγαδικοί αριθμοί z, w έτσι, ώστε $z = w$

ιι) να βρείτε τη μέγιστη τιμή του $|z - w|$

(Ημερήσια επαναληπτικές)

8.862 Αν $\lambda \in \mathbb{R}$ και $\kappa > 0$, θεωρούμε τους μιγαδικούς:

$$z = \lambda^2 - 2 + (3 - 2\lambda)i \text{ και } w = \kappa + 4i$$

Για τους μιγαδικούς z, w ισχύουν $Re(z) + Im(z) = 0$ και $|w| = 5$, να αποδείξετε ότι:
α) $z = -1 + i$ και $\kappa = 3$
β) υπάρχει $\mu \in \mathbb{R}$, για το οποίο ισχύει $z + \mu\bar{z} = 3i - w$

(Εσπερινά)

8.863 Δίνεται ο μιγαδικός $z = \dfrac{x + 3}{2 - i}$, με $x \in \mathbb{R}$
α) Να βρείτε την τιμή του x ώστε ο z να είναι φανταστικός
β) Αν $x = -6$, να αποδείξετε ότι ο z είναι πραγματικός
γ) Αν $x = 4$, να βρείτε το μέτρο του $\bar{z}$

(Εσπερινά επαναληπτικές)

8.864 Δίνονται οι μιγαδικοί $z_1 = 3 + i$ και $z_2 = 1 - 3i$.
α) Να αποδείξετε ότι:
ι) $\dfrac{z_1}{z_2} = i$ ιι) $|iz_1 + z_2|^2 = 0$ ιιι) $z_1^{2006} + z_2^{2006} = 0$
β) Θεωρούμε τον μιγαδικό αριθμό

$$w = \frac{kz_1 - iz_2}{z_2 - kz_2}, \text{ όπου } k \in \mathbb{R} \text{ και } k \neq -1$$

Να αποδείξετε ότι $Im(w) = -1$

(Ομογενείς)

(δ') 2006

8.865 Δίνονται οι μιγαδικοί z_1, z_2, z_3 με:

$$|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1 \text{ και } z_1 + z_2 + z_3 = 0$$

α) Να αποδείξετε ότι:
ι) $|z_1 - z_2| = |z_2 - z_3| = |z_3 - z_1|$
ιι) $|z_1 - z_2|^2 \leq 4$ και $Re(z_1\overline{z_2}) \geq -1$
β) Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων των z_1, z_2, z_3 στο μιγαδικό επίπεδο καθώς και το είδος του τριγώνου που αυτές σχηματίζουν.

(Ημερήσια)

8.866 Δίνεται η εξίσωση $z^2 - 4z + 13 = 0$ (1)
α) Να λύσετε την εξίσωση (1)
β) Αν z_1, z_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης (1), να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$A = |z_1|^2 - 2|z_1z_2| + \sqrt{13}|\overline{z_2}| + i^{2006}$$

γ) Αν $z_1 = 2 + 3i$, τότε να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των μιγαδικών z, για τους οποίους ισχύει η σχέση $|z - z_1| = 5$

(Εσπερινά)

8.867 Έστω $z \in \mathbb{C}$, ώστε $(5z - 1)^5 = (z - 5)^5$
α) Να αποδείξετε ότι $|5z - 1| = |z - 5|$ και $|z| = 1$
β) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών $w = 5z + 1$

(Ομογενείς)

(ε') 2007

8.868 Δίνεται ο μιγαδικός αριθμός $z = \dfrac{2 + \alpha i}{\alpha + 2i}$, με $\alpha \in \mathbb{R}$
α) Να αποδείξετε ότι η εικόνα του μιγαδικού z ανήκει στον κύκλο με κέντρο $O(0, 0)$ και ακτίνα $\rho = 1$
β) Αν z_1, z_2 οι μιγαδικοί που προκύπτουν από τον παραπάνω τύπο για $\alpha = 0$ και $\alpha = 2$ αντίστοιχα, τότε:

ι) να βρείτε την απόσταση των εικόνων των μιγαδικών z_1 και z_2

ιι) να αποδείξετε ότι $z_1^{2n} = (-z_2)^n$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$

(Ημερήσια)

8.869 Δίνονται οι μιγαδικοί $z = \alpha + \beta i$ και $w = \dfrac{2 - \bar{z}}{2 + \bar{z}}$, με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ και $\beta \neq 0$. Αν $w - z \in \mathbb{R}$, τότε:
α) να αποδείξετε ότι $w - z = 1$
β) να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων του z
γ) αν ο z^2 είναι φανταστικός και $\alpha\beta > 0$, να βρείτε τον z και να αποδείξετε ότι:

$$(z+1+i)^{20}-(\overline{z}+1-i)^{20}=0$$

(Ημερήσια επαναληπτικές)

8.870 Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς:

$$z=(\lambda-2)+2\lambda i,\text{ όπου } \lambda\in\mathbb{R}$$

α) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών z

β) Αν $z+\overline{z}=2$, να βρείτε το $Re\left(\frac{1}{z}\right)$

γ) Αν $|z|=2$ και $Im(z)\neq 0$, να βρείτε την τιμή του λ

(Εσπερινά)

8.871 Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z για τους οποίους ισχύει $|z-1+i|=|iz|$.

α) Να βρείτε:

ι) το γεωμετρικό τόπο των εικόνων Μ των μιγαδικών αριθμών z

ιι) ποια από τα σημεία Μ απέχουν από την αρχή Ο(0,0) απόσταση ίση με $\sqrt{5}$

β) Αν $Re(z)=0$, τότε να αποδείξετε ότι $z=-i$

(Εσπερινά επαναληπτικές)

8.872 Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί $z_1=i, z_2=1$ και $z_3=1+i$.

α) Να αποδείξετε ότι $|z_1|^2+|z_2|^2=|z_3|^2$

β) Αν για το μιγαδικό z ισχύει $|z-z_1|=|z-z_2|$, τότε:

ι) να αποδείξετε ότι $Re(z)=Im(z)$

ιι) αν $z\neq 0$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $A=\frac{z}{\overline{z}}+\frac{\overline{z}}{z}$

(Ομογενείς)

(ϛ΄) 2008

8.873 Αν για τους μιγαδικούς z,w ισχύουν οι σχέσεις

$$|(i+2\sqrt{2})z|=6 \text{ και } |w-(1-i)|=|w-(3-3i)|$$

τότε να βρείτε:

α) το γεωμετρικό τόπο των μιγαδικών z

β) το γεωμετρικό τόπο των μιγαδικών w

γ) την ελάχιστη τιμή του $|w|$

δ) την ελάχιστη τιμή του $|z-w|$

(Ημερήσια)

8.874 Δίνεται οτι ο μιγαδικός $z_1=\frac{1+i\sqrt{3}}{2}$, είναι ρίζα της εξίσωσης $z^2+\beta z+\gamma=0$, όπου $\beta,\gamma\in\mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τις τιμές των β και γ

β) Να αποδείξετε ότι $z_1^3=-1$

γ) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο του μιγαδικού w για τον οποίο ισχύει η σχέση

$$|w-4+3i|=|z_1-\overline{z_1}|$$

δ) Να βρείτε την μέγιστη και την ελάχιστη τιμή του μέτρου του μιγαδικού w

(Ημερήσια επαναληπτικές)

8.875 Δίνεται η εξίσωση $3z^2+\lambda z+\mu=0$, με $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$. Αν ο αριθμός $z_1=1+i$ είναι ρίζα της εξίσωσης, να αποδείξετε ότι:

α) $\lambda=-6,\mu=6$ και να βρείτε τη δεύτερη ρίζα z_2 της παραπάνω εξίσωσης

β) $z_1^2+z_2^2=0$ και $z_1^{2008}+z_2^{2008}=2^{1005}$

(Εσπερινά)

8.876 Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί $z=\kappa+(\kappa+1)i$, με $\kappa\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του z είναι η ευθεία $y=x+1$

β) Ποιοι από αυτούς τους μιγαδικούς αριθμούς έχουν $|z|=1$;

γ) Αν για τους πραγματικούς αριθμούς α,β ισχύει

$$\alpha^2+\beta^2+8=(1-i)^4\beta-(1+i)^4\alpha$$

να αποδείξετε ότι $\alpha=2$ και $\beta=-2$

(Ομογενείς)

(ζ΄) 2009

8.877 Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς

$$z=(2\lambda+1)+(2\lambda-1)i,\text{ με } \lambda\in\mathbb{R}$$

α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας πάνω στην οποία βρίσκονται οι εικόνες των μιγαδικών z, για τις διάφορες τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$

β) Από τους παραπάνω μιγαδικούς αριθμούς, να αποδείξετε ότι ο μιγαδικός αριθμός $z_0=1-i$ έχει το μικρότερο δυνατό μέτρο

γ) Να βρείτε τους μιγαδικούς αριθμούς w, για τους οποίους ισχύει η σχέση: $|w|^2+\overline{w}-12=z_0$

(Ημερήσια)

8.878 Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς ζ για τους οποίους ισχύει:

$$(2-i)z+(2+i)\overline{z}-8=0$$

α) Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z οι οποίοι ικανοποιούν την παραπάνω εξίσωση
β) Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό αριθμό z_1 και τον φανταστικό αριθμό z_2 οι οποίοι ικανοποιούν την παραπάνω εξίσωση
γ) Για τους αριθμούς z_1, z_2 που βρέθηκαν στο προηγούμενο ερώτημα, να αποδείξετε ότι:

$$|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 40$$

(Ημερήσια επαναληπτικές)

8.879 Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί:

$$z_1 = 2 + 3i \text{ και } z_2 = (1 - i)^2 + 3i^{2009} + 1$$

α) Να αποδείξετε ότι $z_2 = 1 + i$
β) Να βρείτε το μέτρο του μιγαδικού $\overline{z_1} - z_2$
γ) Να γράψετε τον μιγαδικό $\dfrac{z_1}{z_2}$ στη μορφή $\kappa + \lambda i$, με $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$

(Εσπερινά)

8.880 Δίνεται ο μιγαδικός $z = \dfrac{1}{1+i} - \dfrac{i(i-3)}{2}$
α) Να αποδείξετε ότι $-\overline{z} = -1 + i, z^2 = 2i$ και $z^3 = -2 + 2i$
β) Αν Α, Β, Γ είναι αντίστοιχα οι εικόνες των $-\overline{z}, z^2, z^3$ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές
γ) Να αποδείξετε ότι: $|z^3 - z^2|^2 = |z^2 + \overline{z}|^2 + |z^3 + \overline{z}|^2$

(Ομογενείς)

(η΄) 2010

8.881 Δίνεται η εξίσωση $z + \dfrac{2}{z} = 2$, όπου $z \in \mathbb{C}^*$
α) Να βρείτε τις ρίζες z_1, z_2 της εξίσωσης
β) Να αποδείξετε ότι $z_1^{2010} + z_2^{2010} = 0$
γ) Αν $w \in \mathbb{C}$ ώστε $|w - 4 + 3i| = |z_1 - z_2|$, να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων του w στο μιγαδικό επίπεδο
δ) Να αποδείξετε ότι $3 \leq |w| \leq 7$

(Ημερήσια)

8.882 Έστω $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, για τους οποίους ισχύουν οι σχέσεις $z_1 + z_2 = -2$ και $z_1 z_2 = 5$
α) Να βρείτε τους μιγαδικούς z_1 και z_2
β) Έστω $w \in \mathbb{C}$, ώστε $|w - z_1|^2 + |w - z_2|^2 = |z_1 - z_2|^2$
Να βρείτε:

ι) το γεωμετρικό τόπο του w

ιι) τους μιγαδικούς w, ώστε $2Re(w) + Im(w) = 0$

(Ημερήσια επαναληπτικές)

8.883 Έστω ο μιγαδικός αριθμός $z = x + yi$, με $x, y \in \mathbb{R}$, για τον οποίο ισχύει $2z - i \cdot \overline{z} = 3$
α) Να βρείτε τον μιγαδικό z
β) Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών w για τους οποίους ισχύει η σχέση $|w + z| = |z^2|$
γ) Αν $u = \dfrac{\overline{z} + iz}{\overline{z} - 1}$, να αποδείξετε ότι $u^{2010} = -1$

(Εσπερινά)

8.884 Θεωρούμε την εξίσωση $z^2 - 6z + \gamma = 0$, με $\gamma \in \mathbb{R}$, η οποία έχει ρίζες τους μιγαδικούς αριθμούς z_1, z_2 με $Im(z_1) > 0$ και $|z_1| = 5$
α) Να αποδείξετε ότι $\gamma = 25$
β) Να βρείτε τις ρίζες z_1, z_2 της παραπάνω εξίσωσης
γ) Αν για τον μιγαδικό αριθμό w ισχύει $|w - z_1| = |w - z_2|$, να αποδείξετε ότι $w \in \mathbb{R}$
δ) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης

$$(z_1 - 2 - 3i)^8 + (z_2 - 4 + 5i)^8$$

(Εσπερινά επαναληπτικές)

8.885 Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί z για τους οποίους ισχύει $|z| = |z - 2i|$
α) Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z στο μιγαδικό επίπεδο είναι η ευθεία με εξίσωση $y = 1$
β) Από τους παραπάνω μιγαδικούς αριθμούς z, να βρείτε εκείνους που έχουν μέτρο ίσο με $\sqrt{2}$
γ) Έστω z_1, z_2 οι μιγαδικοί αριθμοί που βρήκατε στο προηγούμενο ερώτημα, να αποδείξετε ότι $z_1^4 + z_2^4 = -8$

(Ομογενείς)

(θ΄) 2011

8.886 Έστω οι μιγαδικοί z και w με $z \neq 3i$, οι οποίοι ικανοποιούν τις σχέσεις:

$$|z - 3i| + |\overline{z} + 3i| = 2 \text{ και } w = z - 3i + \frac{1}{z - 3i}$$

α) Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο του z
β) Να αποδείξετε ότι $\overline{z} + 3i = \dfrac{1}{z - 3i}$
γ) Να αποδείξετε ότι ο w είναι πραγματικός αριθμός και ότι $-2 \leq w \leq 2$
δ) Να αποδείξετε ότι $|z - w| = |z|$

(Ημερήσια)

8.887 Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί z, w οι οποίοι ικανοποιούν αντίστοιχα τις σχέσεις:

$$|z-i| = 1 + Im(z) \text{ και } w(\overline{w}+3i) = i(3\overline{w}+i)$$

α) Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z είναι η παραβολή με εξίσωση $x^2 = 4y$
β) Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών w είναι ο κύκλος με κέντρο το σημείο Κ(0,3) και ακτίνα $\rho = 2\sqrt{2}$
γ) Να βρείτε τα σημεία Α και Β του μιγαδικού επιπέδου, τα οποία είναι εικόνες των μιγαδικών αριθμών z, w με $z = w$
δ) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΚΑΒ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές και στη συνέχεια, να βρείτε τον μιγαδικό αριθμό u με εικόνα στο μιγαδικό επίπεδο το σημείο Λ, έτσι ώστε το τετράπλευρο ΚΑΛΒ να είναι τετράγωνο

(Ημερήσια επαναληπτικές)

8.888 Δίνονται οι μιγαδικοί $z \neq 0$ και $w = z + \dfrac{4}{z}$
α) Να βρείτε τους μιγαδικούς z_1, z_2 για τους οποίους είναι $w = 2$
β) Για τους μιγαδικούς z_1, z_2 που βρήκατε στο προηγούμενο ερώτημα, να αποδείξετε ότι $z_1^3 = z_2^3 = -8$
γ) Αν z_1, z_2 είναι οι μιγαδικοί αριθμοί του πρώτου ερωτήματος, τότε να αποδείξετε ότι οι εικόνες των μιγαδικών z_1, z_2 και $z_3 = \dfrac{z_1^3}{4}$ είναι κορυφές ισόπλευρου τριγώνου
δ) Αν $|z| = 2$, να αποδείξετε ότι $w \in \mathbb{R}$

(Ομογενείς)

(ι′) 2012

8.889 Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z και w για τους οποίους ισχύουν οι σχέσεις:

$$|z-1|^2 + |z+1|^2 = 4 \text{ και } |w - 5\overline{w}| = 12$$

α) Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών z είναι κύκλος με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα $\rho = 1$
β) Αν z_1, z_2 είναι δύο από τους παραπάνω μιγαδικούς z, με $|z_1 - z_2| = \sqrt{2}$, να βρείτε το $|z_1 + z_2|$
γ) Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών w είναι η έλλειψη με εξίσωση $4x^2 + 9y^2 = 36$ και στη συνέχεια να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή του $|w|$
δ) Να αποδείξετε ότι $1 \leq |z - w| \leq 4$

(Ημερήσια)

8.890 Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς $z \neq -1$, για τους οποίους ο αριθμός $w = \dfrac{z-1}{z+1}$ είναι φανταστικός. Να αποδείξετε ότι:
α) $|z| = 1$ και $\left(z - \dfrac{1}{z}\right)^4 \in \mathbb{R}$
β) $\left(\dfrac{1}{z_1} + \dfrac{1}{z_2}\right)(z_1 + z_2) \leq 4$, όπου z_1, z_2 είναι δύο από τους παραπάνω μιγαδικούς z
γ) Οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών u, για τους οποίους ισχύει $u - iu = \dfrac{i}{w} - w$, με $w \neq 0$, ανήκουν στην υπερβολή $x^2 - y^2 = 1$

(Ημερήσια επαναληπτικές)

8.891 Θεωρούμε τους μιγαδικούς z και w για τους οποίους ισχύουν οι επόμενες σχέσεις:

$$|z-3|^2 + |z+3|^2 = 36 \text{ και } |2w-1| = |w-2|$$

α) Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z στο επίπεδο, είναι κύκλος με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα $\rho = 3$
β) Αν z_1, z_2 είναι δύο από τους παραπάνω μιγαδικούς, με $|z_1 - z_2| = 3\sqrt{2}$, να βρείτε το $|z_1 + z_2|$
γ) Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών w στο επίπεδο, είναι κύκλος με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα $\rho = 1$

(Εσπερινά)

8.892 Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z για τους οποίους ισχύει $|iz - 1| = 1$
α) Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z είναι ο κύκλος που έχει κέντρο το σημείο Κ (0,-1) και ακτίνα $\rho = 1$
β) Για τους παραπάνω μιγαδικούς αριθμούς z, να αποδείξετε ότι $|z| \leq 2$
γ) Αν z_1, z_2 είναι δύο από τους παραπάνω μιγαδικούς αριθμούς z με $|z_1 - z_2| = \sqrt{2}$ και Α, Β οι εικόνες των z_1, z_2 αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΚΑΒ, όπου Κ(0,-1), είναι ορθογώνιο.

(Ομογενείς)

(ια′) 2013

8.893 Θεωρούμε τους μιγαδικούς z για τους οποίους ισχύει:

$$(z-2)(\overline{z}-2) + |z-2| = 2$$

α) Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών z, είναι κύκλος με κέντρο K(2,0) και ακτίνα $\rho = 1$. Στη συνέχεια, για κάθε μιγαδικό z που ανήκει στον παραπάνω γεωμετρικό τόπο, να αποδείξετε ότι $|z| \leq 3$
β) Αν οι μιγαδικοί αριθμοί z_1, z_2 που ανήκουν στον παραπάνω γεωμετρικό τόπο είναι ρίζες της εξίσωσης $w^2 + \beta w + \gamma = 0$, με $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$ και είναι $|Im(z_1) - Im(z_2)| = 2$, να αποδείξετε ότι $\beta = -4$ και $\gamma = 5$
γ) Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ οι οποίοι ανήκουν στον γεωμετρικό τόπο του ερωτήματος (α). Αν ο μιγαδικός αριθμός ν ικανοποιεί τη σχέση:

$$\nu^3 + \alpha_2\nu^2 + \alpha_1\nu + \alpha_0 = 0$$

να αποδείξετε ότι $|\nu| < 4$

(Ημερήσια)

8.894 Θεωρούμε τους μιγαδικούς z για τους οποίους ισχύει:

$$(z-2)(\overline{z}-2) + |z-2| = 2$$

α) Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών z, είναι κύκλος με κέντρο K(2,0) και ακτίνα $\rho = 1$. Στη συνέχεια, για κάθε μιγαδικό z που ανήκει στον παραπάνω γεωμετρικό τόπο, να αποδείξετε ότι $|z| \leq 3$
β) Αν οι μιγαδικοί αριθμοί z_1, z_2 που ανήκουν στον παραπάνω γεωμετρικό τόπο είναι ρίζες της εξίσωσης $w^2 + \beta w + \gamma = 0$, με $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$ και είναι $|Im(z_1) - Im(z_2)| = 2$, να αποδείξετε ότι $\beta = -4$ και $\gamma = 5$
γ) Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς:

$$z_1 = 2+i, z_2 = 2-i \text{ και } u = \left(\frac{z_1+i}{z_2-i}\right)^{2013}$$

Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου με κορυφές τις εικόνες των μιγαδικών z_1, z_2 και u

(Εσπερινά)

8.895 Θεωρούμε τους μιγαδικούς z, w για τους οποίους η εξίσωση

$$2x^2 - |w-4-3i|x = -2|z|, \text{ με } x \in \mathbb{R}$$

έχει μια διπλή ρίζα τη $x = 1$
α) Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των z στο μιγαδικό επίπεδο είναι κύκλος με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα $\rho_1 = 1$, καθώς επίσης ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των w στο μιγαδικό επίπεδο είναι κύκλος με κέντρο K(4,3) και ακτίνα $\rho_2 = 4$
β) Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικός μιγαδικός αριθμός, η εικόνα του οποίου ανήκει και στους δύο παραπάνω γεωμετρικούς τόπους
γ) Για τους παραπάνω μιγαδικούς αριθμούς z, w του ερωτήματος (β), να αποδείξετε ότι $|z-w| \leq 10$ και $|z+w| \leq 10$
δ) Από τους παραπάνω μιγαδικούς αριθμούς z του ερωτήματος (β), να βρείτε εκείνους, για τους οποίους ισχύει $|2z^2 - 3z - 2z\overline{z}| = 5$

(Ημερήσια-Εσπερινά επαναληπτικές)

8.896 Θεωρούμε τους μιγαδικούς z για τους οποίους ισχύει η σχέση:

$$Re\left(\frac{1}{z-1}\right) = \frac{1}{2}$$

α) Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών z είναι κύκλος με κέντρο το σημείο $K(2,0)$ και ακτίνα $\rho = 1$ εκτός από ένα σημείο του
β) Αν z_1, z_2 είναι δύο από τους παραπάνω μιγαδικούς z, να αποδείξετε ότι:

$$|z_1 + z_2 - 4| \leq 2$$

γ) Να βρείτε τους μιγαδικούς z αν είναι $|z| = \sqrt{5}$

(Ομογενείς)

9 Προχωρημένα θέματα

(α') εύρεση μιγαδικών

9.897 Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των μιγαδικών z για τους οποίους ισχύει η σχέση $|z-|z+1|| = |z+|z-1||$

9.898 Να βρείτε τους μιγαδικούς z, για τους οποίους ισχύουν οι σχέσεις:
α) $z^3 + |z|^2 z - 2|z|^3 = 0$ β) $\left|z + \frac{1}{z}\right| = \left|z^2 + \frac{1}{z^2}\right| = 2$

9.899 Σε κάθε μία από τις παρακάτω περιπτώσεις, να βρείτε τους μιγαδικούς αριθμούς a, b, c για τους οποίους ισχύουν οι σχέσεις:
α) $|a| = |b| = 1$ και $a^2 + b^2 = 1$
β) $|a| = |b| = |c| = 1$ και $a^2 + b^2 + c^2 = 0$
γ) $|a| = |b| = |c|$ και $a + b + c = abc = 1$
δ) $a + b + c = ab + bc + ca = abc = 1$
ε) $a + b + c = 1$ και $|a+b| = |b+c| = |c+a| = \frac{2}{3}$
ζ) $|a| = |b| = |c|$ και $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} = 1$

9.900 Να βρείτε τους μιγαδικούς z για τους οποίους ι-σχύουν οι σχέσεις $z^{2012}+z+1=0$ και $|z|=1$

9.901 Να βρείτε τους μιγαδικούς z για τους οποίους ι-σχύει $|1+z^{2n+1}|\le 1$, για κάθε $n\in\mathbb{N}$

9.902 Να βρείτε τους μιγαδικούς z,w για τους οποίους ισχύουν οι σχέσεις:

$$|z+w+1|=|z+1|=1 \text{ και } |zw(z+w)|=2(|z|+|w|)$$

(β΄) **ταυτότητες**

9.903 Αν $a,b,c\in\mathbb{C}$, ώστε $|a-b|=|b-c|=|c-a|$, να αποδείξετε ότι $a^2+b^2+c^2=ab+bc+ca$

9.904 Έστω $z_1,z_2,z_3\in\mathbb{C}^*$ με $|z_1|=|z_2|=|z_3|$ και

$$Re\left(\frac{z_1}{z_2}\right)=Re\left(\frac{z_2}{z_3}\right)=Re\left(\frac{z_3}{z_1}\right)=-2$$

Να αποδείξετε ότι $z_1+z_2+z_3=0$

9.905 Έστω $a,b,c\in\mathbb{C}$ για τους οποίους ισχύουν οι σχέσεις:

$$|a|=|b|=|c|=1 \text{ και } a+b+c=abc$$

Να αποδείξετε ότι $|a^3+b^3+c^3|=1$

9.906 Αν $z\in\mathbb{C}$ και $\epsilon^3=1$, με $\epsilon\neq 1$, να αποδείξετε ότι:

$$|z-1|^2+|z-\epsilon|^2+|z-\epsilon^2|^2=3(1+|z|^2)$$

9.907 Οι μιγαδικοί a,b,c είναι διαφορετικοί μεταξύ τους ανά δύο και ικανοποιούν τη σχέση:

$$a+c-2b=\lambda i(a+b-2c), \text{ με } \lambda\in\mathbb{R}$$

Να αποδείξετε ότι $|b+c-2a|=3|b-c|$

9.908 Έστω $x,y\in\mathbb{C}^*$ ώστε $x^2+xy+y^2=0$. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$\left(\frac{x}{x+y}\right)^{2020}+\left(\frac{y}{x+y}\right)^{2020}$$

9.909 Έστω οι μιγαδικοί a,b,c για τους οποίους ισχύει η σχέση $Im(\overline{a}b)=Im(\overline{b}c)=Im(\overline{c}a)\neq 0$. Να αποδείξετε ότι:

$$|a-b|^2+|b-c|^2+|c-a|^2=3(|a|^2+|b|^2+|c|^2)$$

9.910 Έστω οι μιγαδικοί a,b,c για τους οποίους ισχύουν οι σχέσεις $|a|=|b|=|c|=2$ και $a+b+c=6$. Να αποδείξετε ότι $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}=3$

9.911 Έστω οι μιγαδικοί a,b,c με $|a|=|b|=|c|=1$ και $3(a^2+b^2)c-2(a^2+c^2)b=10abc$. Να αποδείξετε ότι $a=b=-c$

9.912 Έστω $a,b,c\in\mathbb{C}$ με $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0$. Αν $\epsilon^3=1$, με $\epsilon\neq 1$, να αποδείξετε ότι:

$$(a+\epsilon b+\epsilon^2c)(a+\epsilon^2b+\epsilon c)=0$$

9.913 Δίνονται οι μιγαδικοί a,b,c, για τους οποίους ι-σχύουν οι σχέσεις:

$$|a|=|b|=|c|>0 \text{ και } \frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\in\mathbb{R}$$

Να αποδείξετε ότι τουλάχιστον δύο από τους μιγαδικούς a,b,c είναι ίσοι μεταξύ τους.

9.914 Δίνονται οι μιγαδικοί a,b,c με $|a|=|b|=|c|=1$, για τους οποίους ισχύουν οι σχέσεις:

$$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0 \text{ και } |a+b+c|\neq 3$$

Να αποδείξετε ότι:
α) $(a+b+c)^2=3(ab+bc+ca)$
β) $a+b+c=0$

9.915 Θεωρούμε τον μιγαδικό z για τον οποίο ισχύει η σχέση:

$$11z^{10}+10iz^9+10iz-11=0$$

Να αποδείξετε ότι:

α) $|z|=1$ β) $\left(\frac{2z-zi-2i+1}{1+zi}\right)^2\le 0$

γ) $Re(z)=\frac{|z+1|^2-2}{2}$ δ) $|z^2-3z+1|=5-|z+1|^2$

9.916 Δίνονται οι μιγαδικοί z_1,z_2,z_3, με $z_1+z_2+z_3\neq 0$ για τους οποίους ισχύουν οι σχέσεις:

$$|z_1|=|z_2|=|z_3|=1 \text{ και } z_1^2+z_2^2+z_3^2=0$$

Να αποδείξετε ότι:
α) $|z_1+z_2+z_3|=|z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1|$ β) $|z_1+z_2+z_3|=2$

9.917 Έστω $z_1,z_2,z_3\in\mathbb{C}$, με $|z_1|=|z_2|=|z_3|$ για τους οποίους ισχύει η σχέση:

$$|z_1+z_2-z_3|=|z_1-z_2+z_3|=|-z_1+z_2+z_3|$$

Να αποδείξετε ότι $z_1^3=z_2^3=z_3^3$

9.918 Αν $a,b,c\in\mathbb{C}$ με $|a|=|b|=|c|=1$, να αποδείξετε ότι:

$$(a+b+c+ab+bc+ca)^2=abc|a+b+c+ab+bc+ca|^2$$

9.919 Έστω $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$, με $\alpha+\beta+\gamma=0$. Να αποδείξετε ότι:

α) αν $|\alpha|=|\beta|=|\gamma|$, τότε είναι:

ι) $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=0$ ιι) $\alpha^3=\beta^3=\gamma^3$

β) αν $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=0$, τότε είναι:

$$|\alpha|+\epsilon|\beta|+\epsilon^2|\gamma|=0, \text{ με } \epsilon^2+\epsilon+1=0$$

9.920 Έστω $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$, ώστε να είναι:

$$z_1+z_2+z_3=Re(z_1\overline{z_2}+z_2\overline{z_3}+z_3\overline{z_1})=0$$

Να αποδείξετε ότι $z_1=z_2=z_3=0$

9.921 Έστω $\alpha, \beta, \gamma>0$ και θεωρούμε τους μιγαδικούς $z_1=\alpha+i, z_2=\beta+i$ και $z_3=\gamma+i$, για τους οποίους ισχύει $Re(z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1)=-2$. Να αποδείξετε ότι:

α) $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=1$

β) $\alpha|z_2z_3|^2+\beta|z_3z_1|^2+\gamma|z_1z_2|^2=2|z_1z_2z_3|$

9.922 Έστω $a, b, c \in \mathbb{C}$, με $b \neq c$, για τους οποίους ισχύουν οι σχέσεις:

$$|a-b|=|c-a| \text{ και } |a|=|b|=|c|=|a+b+c|=1$$

Να αποδείξετε ότι $|a+b|\cdot|c+a|=2$

9.923 Έστω $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ με $|z_1|=|z_2|=|z_3|=1$ και $z_1+z_2+z_3=z_1z_2z_3=1$. Να αποδείξετε ότι:

$$z_1^2+z_2^2+z_3^2=\frac{1}{z_1^2}+\frac{1}{z_2^2}+\frac{1}{z_3^2}=-1$$

9.924 Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχουν $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$, με $|z_1|=|z_2|=|z_3|=1$ και να είναι

$$z_1^2+z_2^2+z_3^2=z_1^3+z_2^3+z_3^3=0$$

9.925 Έστω $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ για τους οποίους ισχύουν οι σχέσεις:

$$z_1+z_2+z_3=z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1=0$$

Να αποδείξετε ότι $|z_1|=|z_2|=|z_3|$

9.926 Έστω $a, b, c \in \mathbb{C}$, για τους οποίους ισχύουν οι σχέσεις $|a|=|b|=|c|=1$ και $a+b+c \neq 0$. Αν είναι $a^2+b^2+c^2=0$, να αποδείξετε ότι:

α) $|a^2+b^2|=|b^2+c^2|=|c^2+a^2|$ β) $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=0$

γ) οι εικόνες των μιγαδικών

$$a, b, c, abc \text{ και } \frac{ab+bc+ca}{a+b+c}$$

είναι σημεία ομοκυκλικά

δ) $|a+b+c|=2$

9.927 Έστω $u, v, w \in \mathbb{C}$, τέτοιοι ώστε:

$$|u|=|v|=|w|=|u+v+w|$$

Να αποδείξετε ότι $(u+v)(v+w)(w+u)=0$

9.928 Αν $z, w \in \mathbb{C}$, ώστε $|z|=|w|=|z^2+zw+w^2|=1$. Να αποδείξετε ότι $|z^n+w^n| \in \{0, \sqrt{2}, 2\}$, όπου $n \in \mathbb{N}$

9.929 Έστω $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$, για τους οποίους ισχύουν οι σχέσεις:

$$|z_1|=|z_2|=|z_3|=1 \text{ και } z_1^3+z_2^3+z_3^3+z_1z_2z_3=0$$

Να αποδείξετε ότι $|z_1+z_2+z_3| \in \{1, 2\}$

9.930 Έστω $z, w \in \mathbb{C}$, με $|z+w|=|z|=|w|=1$. Αν n είναι θετικός ακέραιος ώστε $z^n=w^n$, να αποδείξετε ότι ο n είναι πολλαπλάσιο του 3

9.931 Έστω $z \in \mathbb{C}$ με $|z|=1$ και $z^n+z+1=0$, με $n \in \mathbb{N}$. Να αποδείξετε ότι: α) $z^3=1$ β) $n=3k+2$, με $k \in \mathbb{N}$

9.932 Θεωρούμε τον μιγαδικό z και τους $m, n \in \mathbb{N}$, ώστε να ισχύουν οι σχέσεις $z^m=1$ και $(1+z)^n=1$. Να αποδείξετε ότι ο m είναι πολλαπλάσιο του 3 και ο n είναι πολλαπλάσιο του 6

9.933 Αν $z, w \in \mathbb{C}$, με $zw=-1$, να αποδείξετε ότι:

$$|z+w+2i|+|z+w-2i|=2|z|+2|w|$$

9.934 Έστω οι μιγαδικοί z_1, z_2, z_3 ώστε να ισχύουν οι σχέσεις:

$$|2z_1-z_2-z_3|=|z_2-z_3| \text{ και } |2z_2-z_1-z_3|=|z_1-z_3|$$

Να αποδείξετε ότι $z_1=z_2$

9.935 Έστω οι μιγαδικοί a, b, c με $|a|=|b|=|c|=1$ και $a+b+c=0$. Να αποδείξετε ότι:

α) $ab+bc+ca=a^2+b^2+c^2=a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2=0$

β) $a^2=bc, b^2=ca, c^2=ab$ και $a^3=b^3=c^3$

9.936 Θεωρούμε τους μιγαδικούς a, b, c για τους οποίους ισχύουν οι σχέσεις:

$$|a|=|b|=|c|=\left|\frac{a+b+c-abc}{ab+bc+ca-1}\right|=\rho>0$$

Να αποδείξετε ότι $\rho=1$ ή ότι δύο από τους a, b, c είναι αντίθετοι

9.937 Αν $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$, ώστε $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$ και $z_1 + z_2 + z_3 = 0$, να αποδείξετε ότι:

$$z_1\overline{z_2} + \overline{z_1}z_2 + 1 = 0$$

9.938 Θεωρούμε τους μιγαδικούς z_1, z_2, z_3 ώστε

$$|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1 \text{ και } z_1 + z_2 + z_3 = 1$$

Να αποδείξετε ότι $z_1 = 1$ ή $z_2 = 1$ ή $z_3 = 1$

9.939 Αν $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$, να αποδείξετε ότι:

$$|z_1| = |z_2 + z_3|, |z_2| = |z_3 + z_1|, |z_3| = |z_1 + z_2| \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z_1 + z_2 + z_3 = 0$$

9.940 Έστω οι μιγαδικοί z, w ώστε να είναι $|z^n - w^n| = 1$, για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$. Να αποδείξετε ότι $zw = 0$

9.941 Έστω $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$, με $z_1 + z_2 + z_3 \neq 0$, για τους οποίους ισχύουν οι σχέσεις:

$$|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1 \text{ και } z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = 0$$

Να αποδείξετε ότι $|z_1^n + z_2^n + z_3^n| \in \{0, 1, 2, 3\}$, με $n \in \mathbb{N}$ και $n \geq 2$

9.942 Οι μιγαδικοί αριθμοί z_1, z_2, z_3 είναι διαφορετικοί μεταξύ τους ανα δύο και είναι $|z_1| = |z_2| = |z_3|$. Αν οι αριθμοί $z_1 + z_2z_3, z_2 + z_3z_1$ και $z_3 + z_1z_2$ είναι πραγματικοί, να αποδείξετε ότι $z_1z_2z_3 = 1$

(γ′) **εξισώσεις**

9.943 Αν $a, b \in \mathbb{R}$ και οι εικόνες των ριζών της εξίσωσης $x^2 + ax + b = 0$, ανήκουν στον μοναδιαίο κύκλο, να αποδείξετε ότι το ίδιο συμβαίνει και με τις ρίζες της εξίσωσης $x^2 + |a|x + |b| = 0$

9.944 Θεωρούμε την εξίσωση $a^2z^2 + abz + c^2 = 0$, με $a, b, c \in \mathbb{C}^*$ και $\dfrac{b}{c} \in \mathbb{R}$. Αν z_1, z_2 οι ρίζες της εξίσωσης, να αποδείξετε ότι $|z_1| = |z_2|$ ή $\dfrac{z_1}{z_2} \in \mathbb{R}$

9.945 Δίνεται η εξίσωση $az^2 + bz + c = 0$, με $a, b, c \in \mathbb{R}$ και $a \neq 0$, η οποία έχει ρίζες τους μιγαδικούς $\dfrac{z_1}{z_2}$ και $1 + \dfrac{z_1}{z_2}$, με $z_1, z_2 \in \mathbb{C}^*$ ώστε $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$. Να αποδείξετε ότι $ac > 0$ και $ab < 0$

9.946 Αν $a, b \in \mathbb{C}^*$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$az^3 + bz^2 + \overline{b}z + \overline{a} = 0$$

έχει τουλάχιστον μία ρίζα με μέτρο 1

9.947 Οι μη μηδενικοί μιγαδικοί a, b, c έχουν ίσα μέτρα και είναι τέτοιοι ώστε η εξίσωση $az^2 + bz + c = 0$ να έχει ρίζα με μέτρο 1. Να αποδείξετε ότι $b^2 = ac$

9.948 Έστω $a, b \in \mathbb{C}$ με $b \neq 0$ και z_1, z_2 οι ρίζες της εξίσωσης $z^2 + az + b^2 = 0$. Αν είναι $\dfrac{a}{b} \in \mathbb{R}$ και $\dfrac{z_1}{z_2} \notin \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι $|z_1| = |z_2|$

9.949 Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί a, b με $b \neq 0$. Να αποδείξετε ότι οι ρίζες της εξίσωσης $z^4 + az^2 + b = 0$ με είναι κορυφές ρόμβου με κέντρο την αρχή των αξόνων αν και μόνο αν $\dfrac{a^2}{b} \leq 0$

9.950 Να λύσετε την εξίσωση:

$$|\sqrt{2}(z - |z + \sqrt{2}|) + 1| = |\sqrt{2}(z + |z|) + 1|$$

9.951 Δίνεται η εξίσωση $z^4 + az^3 + bz + 1 = 0$, όπου $-1 < a, b < 1$.

α) Να αποδείξετε ότι δεν έχει πραγματικές ρίζες

β) Αν για τις ρίζες z_1, z_2, z_3, z_4 ισχύει η σχέση

$$(1 + z_1^2)(1 + z_2^2)(1 + z_3^2)(1 + z_4^2) = 4$$

να αποδείξετε ότι:

ι) $a = b$

ιι) οι εικόνες των ριζών της εξίσωσης είναι σημεία του κύκλου $x^2 + y^2 = 1$

(δ′) **γεωμετρικές προτάσεις**

9.952 Έστω Α, Β είναι οι εικόνες των μιγαδικών z, w αντίστοιχα, για τους οποίους ισχύει $|w + iz|^2 = w^2 + z^2$. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΟΑΒ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές ή τα σημεία Α, Β ανήκουν στον άξονα $x'x$.

9.953 Έστω οι μιγαδικοί a, b, c με εικόνες τα σημεία A, B, C αντίστοιχα που ανήκουν στον κύκλο $(O, 2)$ και είναι $AB = BC = CA$. Να αποδείξετε ότι:

α) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{0}$

β) αν Κ είναι η εικόνα του μιγαδικού z με $|z| = 2\sqrt{2}$, τότε είναι $|\overrightarrow{KA}|^2 + |\overrightarrow{KB}|^2 + |\overrightarrow{KC}|^2 = 36$

9.954 Δίνονται τα μοναδιαία διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ με $\widehat{(\vec{\alpha}, \vec{\beta})} = \theta \in \mathbb{R}$. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο της εικόνας του μιγαδικού $z = |\vec{\alpha} + \vec{\beta}| + i|\vec{\alpha} - \vec{\beta}|$

9.955 Έστω οι μιγαδικοί z, w ώστε $|z| = |w| = \dfrac{\sqrt{2}}{2}|z - w|$. Να αποδείξετε ότι $z^2 + w^2 = 0$

9.956 Αν οι μιγαδικοί a, b, c είναι κορυφές τριγώνου ABC, να αποδείξετε ότι:

$$(ABC) = \frac{1}{2}|Im(a\overline{b} + b\overline{c} + c\overline{a})|$$

9.957 Έστω οι μιγαδικοί a, b, c με $|a| = |b| = |c|$ και εικόνες τα σημεία Α, Β, Γ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι το ορθόκεντρο του τριγώνου ΑΒΓ είναι εικόνα του μιγαδικού $a + b + c$

9.958 Αν οι εικόνες των μιγαδικών α, β, γ είναι κορυφές τριγώνου ΑΒΓ, να αποδείξετε ότι το ίχνος Δ της διχοτόμου ΑΔ είναι η εικόνα του μιγαδικού $z = \dfrac{\beta + \lambda\gamma}{1 + \lambda}$, με $\lambda = \dfrac{|\alpha - \beta|}{|\alpha - \gamma|}$

9.959 Έστω ο μιγαδικός $z = \alpha + \beta i$, με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ για τον οποίο ισχύει η σχέση:

$$\frac{\alpha^2}{\sigma\upsilon\nu^2\theta} - \frac{\beta^2}{\eta\mu^2\theta} = 1, \text{ με } 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$$

Να αποδείξετε ότι $|z|^2 + |z^2 - 1| = \sigma\upsilon\nu 2\theta$

9.960 Έστω ο μιγαδικός $z = \alpha + \beta i$, με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ για τον οποίο ισχύει η σχέση:

$$\frac{\alpha^2}{\sigma\upsilon\nu^2\theta} + \frac{\beta^2}{\eta\mu^2\theta} = 1, \text{ με } 0 < \theta < \frac{\pi}{4}$$

Να αποδείξετε ότι $|z|^2 + |z^2 - \sigma\upsilon\nu 2\theta| = 1$

9.961 Έστω οι μιγαδικοί z, w για τους οποίους ισχύουν οι σχέσεις:

$$3z^2 - 2zw + 2w^2 = 0 \text{ και } Re\left(\frac{z-2}{z+2}\right) = 0$$

Αν A, B, O είναι οι εικόνες των μιγαδικών $z, w, 0$ αντίστοιχα, να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου OAB

9.962 Θεωρούμε τους μιγαδικούς $z_0, z_1, z_2, ..., z_n$ με $n \geq 3$ οι οποίοι έχουν ίσα μέτρα και είναι διαφορετικοί μεταξύ τους ανά δύο. Να αποδείξετε ότι οι εικόνες των μιγαδικών

$$\frac{1}{z_1 - z_0}, \frac{1}{z_2 - z_0}, \frac{1}{z_3 - z_0}, ..., \frac{1}{z_n - z_0}$$

είναι συνευθειακά σημεία

9.963 Έστω οι μιγαδικοί $z_1, z_2, ..., z_n$, με $n \in \mathbb{N}^*$. Αν είναι:

$$|z_1| = |z_2| = \cdots = |z_n| = 1 \text{ και } |z_1 + z_2 + \cdots + z_n| = n$$

να αποδείξετε ότι $z_1 = z_2 = \cdots = z_n$

9.964 Οι μιγαδικοί αριθμοί a, b, c, d είναι διαφορετικοί μεταξύ τους ανά δύο και ικανοποιούν τις σχέσεις:

$$|a| = |b| = |c| = |d| \text{ και } a + b + c + d = 0$$

Να αποδείξετε ότι οι a, b, c, d είναι κορυφές ορθογωνίου παραλληλογράμμου

9.965 Έστω $z, w, u \in \mathbb{C}$ ώστε $|z| = 3, |w| = 4, |u| = 5$ και $z + w + u = 0$.
α) Να αποδείξετε ότι $16z^2 + 9w^2 = 0$
β) Να υπολογίσετε τα μήκη των πλευρών του τριγώνου, με κορυφές τις εικόνες των z, w, u

9.966 Οι μιγαδικοί z, a, b, c, d με $z = a + b + c + d$ είναι διαφορετικοί μεταξύ τους ανά δύο και ικανοποιούν τις σχέσεις $|z - a| = |a|, |z - b| = |b|, |z - c| = |c|$ και $|z - d| = |d|$.
α) Να αποδείξετε ότι $z = 0$
β) Αν $|a| = |b| = |c| = |d|$, τότε είναι:

ι) $\overline{a}b + a\overline{b} = \overline{c}d + c\overline{d}$

ιι) το τετράπλευρο με κορυφές τις εικόνες των a, b, c, d είναι ορθογώνιο

9.967 Έστω $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$, ώστε να ισχύουν:

$$|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1 \text{ και } z_1 + z_2 + z_3 = 0$$

Να αποδείξετε ότι $|z_1 - z_2| = |z_2 - z_3| = |z_3 - z_1| = \sqrt{3}$

9.968 Θεωρούμε τους μιγαδικούς a, b, c για τους οποίους ισχύουν οι σχέσεις:

$$a + b + c = 0 \text{ και } a^2 + b^2 + c^2 = 0$$

Να αποδείξετε ότι:
α) $ab + bc + ca = 0$ β) $a^2 = bc$ γ) $|a| = |b| = |c|$
δ) $|a - b| = |b - c| = |c - a| = \sqrt{3}|a|$

9.969 Οι μη μηδενικοί μιγαδικοί a, b, c, d είναι διαφορετικοί μεταξύ τους ανά δύο, έχουν την ιδιότητα $a + b + c = \lambda(c - d)$, με $\lambda \in \mathbb{R}$ και ικανοποιούν τη σχέση:

$$|a| = |b| = |c| = |d| = \frac{|c - d|}{2}$$

α) Να αποδείξετε ότι οι εικόνες A, B, C των a, b, c αντίστοιχα είναι κορυφές ισοσκελούς τριγώνου
β) Να βρείτε την τιμή του λ για την οποία το τρίγωνο ABC είναι ισόπλευρο

9.970 Οι μιγαδικοί z_1, z_2, z_3 είναι διαφορετικοί μεταξύ τους ανά δύο και οι εικόνες τους A, B, C αντίστοιχα είναι σημεία του μοναδιαίου κύκλου $(O, 1)$. Αν $k \in \{-2, 0, 1\}$ και ισχύει η σχέση:

$$(a+b+kc)\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}+(b+c+ka)\overline{z_2}\cdot\overline{z_3}+(c+a+kb)\overline{z_3}\cdot\overline{z_1} = 0$$

να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ABC είναι ισόπλευρο

9.971 Έστω οι μιγαδικοί z_1, z_2, z_3 οι οποίοι είναι διαφορετικοί μεταξύ τους ανα δύο και ικανοποιούν τη σχέση:

$$|z_1 - z_2|(2z_3 - z_1 - z_2) + |z_2 - z_3|(2z_1 - z_2 - z_3)+$$

$$+|z_3 - z_1|(2z_2 - z_3 - z_1) = 0$$

Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο με κορυφές τις εικόνες των z_1, z_2, z_3 είναι ισόπλευρο.

9.972 Θεωρούμε τους μιγαδικούς a, b, c οι οποίοι είναι διαφορετικοί μεταξύ τους ανά δύο. Σε κάθε μία από τις παρακάτω περιπτώσεις, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο με κορυφές τις εικόνες των a, b, c είναι ισόπλευρο.
α) $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$
β) $a^2 = bc$ και $b^2 = ca$ γ) $(a - b)^2 = (b - c)(c - a)$
δ) $a + b + c = 0$ και $|a| = |b| = |c|$
ε) $|a| = |b| = |c| = 1$ και $|a+b|^2+|b+c|^2+|c+a|^2 = 3$
ζ) $a^2 + b^2 + c^2 = 0$ και $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$
η) $a + \epsilon b + \epsilon^2 c = 0$ και $\epsilon^2 + \epsilon + 1 = 0$
θ) $c - a = \omega(b - a)$ και $\omega^2 - \omega + 1 = 0$
ι) $\dfrac{1}{a-b} + \dfrac{1}{b-c} + \dfrac{1}{c-a} = 0$ κ) $a\overline{b} = b\overline{c} = c\overline{a}$

9.973 Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί a, b, c οι οποίοι είναι διαφορετικοί ανά δύο και είναι $a^3 = b^3 = c^3$. Να αποδείξετε ότι:
α) οι a, b, c είναι μη μηδενικοί και έχουν ίσα μέτρα
β) $a^2 + ab + b^2 = 0$ και $a + b + c = 0$
γ) οι εικόνες των a, b, c σχηματίζουν ισόπλευρο τρίγωνο
δ) οι εικόνες των a^2, b^2, c^2 σχηματίζουν ισόπλευρο τρίγωνο

9.974 Θεωρούμε τους πραγματικούς αριθμούς α, β, γ ώστε να είναι:

$$\eta\mu\alpha + \eta\mu\beta + \eta\mu\gamma = \sigma\upsilon\nu\alpha + \sigma\upsilon\nu\beta + \sigma\upsilon\nu\gamma = 0$$

Έστω επίσης $z_1 = \sigma\upsilon\nu\alpha + i\eta\mu\alpha, z_2 = \sigma\upsilon\nu\beta + i\eta\mu\beta$ και $z_3 = \sigma\upsilon\nu\gamma + i\eta\mu\gamma$. Να αποδείξετε ότι:
α) $z_1^{31} + z_2^{31} + z_3^{31} = 0$
β) $(z_1z_2)^{32} + (z_2z_3)^{32} + (z_3z_1)^{32} = 0$

9.975 Θεωρούμε τους μιγαδικούς a, b, c οι οποίοι είναι διαφορετικοί μεταξύ τους ανά δύο, έχουν την ιδιότητα $|a| = |b| = |c| = 1$ και ικανοποιούν τη σχέση:

$$\frac{1}{2+|a+b|} + \frac{1}{2+|b+c|} + \frac{1}{2+|c+a|} = 1$$

Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο με κορυφές τις εικόνες των a, b, c είναι ισόπλευρο.

9.976 Θεωρούμε τους μιγαδικούς a, b, c οι οποίοι είναι διαφορετικοί μεταξύ τους ανά δύο, έχουν την ιδιότητα $|a| = |b| = |c| = 1$ και ικανοποιούν τη σχέση:

$$\frac{ab}{(a-b)^2} + \frac{bc}{(b-c)^2} + \frac{ca}{(c-a)^2} = -1$$

Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο με κορυφές τις εικόνες των a, b, c είναι ισόπλευρο.

9.977 Έστω $a, b, c \in \mathbb{C}$ με $|a| = |b| = |c| = 1$ και εικόνες τα σημεία A, B, C αντίστοιχα. Αν ισχύει:

$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA} = 0$$

να αποδείξετε ότι:

$$(a+b)^2c + (b+c)^2a + (c+a)^2b = 6abc$$

9.978 Έστω $a, b, c \in \mathbb{C}$ με $|a| = |b| = |c| = 1$ και εικόνες τα σημεία A, B, C αντίστοιχα. Αν ισχύει:

$$ab(a+b) + bc(b+c) + ca(c+a) = 0$$

να αποδείξετε ότι:

$$(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})^2 = \overrightarrow{OA}^2 + \overrightarrow{OB}^2 + \overrightarrow{OC}^2$$

9.979 Έστω $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}^*$, με εικόνες τα σημεία Α, Β, Γ αντίστοιχα. Αν το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με $\widehat{\Gamma} = 90^0$, να αποδείξετε ότι:
α) $\dfrac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} \in \mathbb{I}$ β) $z_1^2 + z_2^2 + 2z_3^2 = 2z_3(z_1 + z_2)$

9.980 Έστω $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{C}^*$, οι οποίοι ανά δύο δεν είναι αντίθετοι, έχουν ίσα μέτρα και είναι:

$$|z_1 - z_4| \cdot |z_2 + z_3| = |z_1 + z_4| \cdot |z_2 - z_3|$$

Να αποδείξετε ότι οι εικόνες των z_1, z_2, z_3, z_4 είναι κορυφές τραπεζίου.

9.981 Έστω οι μιγαδικοί z_1, z_2, z_3 οι οποίοι είναι διαφορετικοί μεταξύ τους ανά δύο, με $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$ και ισχύει:

$$z_3 = (\eta\mu\theta)z_1 + (\sigma\upsilon\nu\theta)z_2, \text{ με } \theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

Αν Α, Β, Γ είναι οι εικόνες των z_1, z_2, z_3 αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:
α) $A\widehat{O}B = \frac{\pi}{2}$ β) $A\widehat{\Gamma}B = \frac{3\pi}{4}$

9.982 Έστω οι μιγαδικοί a, b, c με $|a| = |b| = |c| = 1$ και $a + b + c = 1$. Να αποδείξετε ότι:
α) $ab + bc + ca = abc$ β) $(1 - a)(1 - b)(1 - c) = 0$
γ) $\frac{1}{a^{2013}} + \frac{1}{b^{2013}} + \frac{1}{c^{2013}} = 1$
δ) αν οι a, b, c είναι διαφορετικοί μεταξύ τους ανά δύο, τότε οι εικόνες τους σχηματίζουν ορθογώνιο τρίγωνο

9.983 Δίνονται οι μη μηδενικοί μιγαδικοί a, b, c για τους οποίους ισχύουν οι σχέσεις:

$$|a| = |b| = |c| \text{ και } Re\left(\frac{a}{b}\right) = Re\left(\frac{b}{c}\right) = Re\left(\frac{c}{a}\right) = -\frac{1}{2}$$

Να αποδείξετε ότι:
α) $a + b + c = 0$ β) $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$
γ) $a^3 = b^3 = c^3$ δ) το τρίγωνο με κορυφές τις εικόνες των a, b, c είναι ισόπλευρο

9.984 Έστω οι μιγαδικοί z_1, z_2, z_3, με $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$, για τους οποίους ισχύει:

$$|2z_1 + z_2 + z_3|^2 + |z_1 + 2z_2 + z_3|^2 + |z_1 + z_2 + 2z_3|^2 = 3$$

Να αποδείξετε ότι:
α) $z_1 + z_2 + z_3 = 0$
β) $Re(z_1\overline{z_2}) = Re(z_2\overline{z_3}) = Re(z_3\overline{z_1}) = -\frac{1}{2}$
γ) $|z_1 - z_2| = |z_2 - z_3| = |z_3 - z_1| = \sqrt{3}$

9.985 Οι μιγαδικοί a, b, c είναι κορυφές τριγώνου ABC. Αν $z \in \mathbb{C}$ με $z \neq a+b+c$, να αποδείξετε ότι οι εικόνες των μιγαδικών $a^2 - za - bc, b^2 - zb - ca, c^2 - zc - ab$ είναι κορυφές τριγώνου που είναι όμοιο με το ABC

9.986 Έστω οι μιγαδικοί a, b, c ώστε

$$|a| = |b| = |c| = R > 0 \text{ και } |a + b|^2 + |b + c|^2 = 4R^2$$

Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο ή οι γωνίες $\widehat{A}$ και $\widehat{\Gamma}$ διαφέρουν κατά 90^0.

9.987 Αν $z \in \mathbb{C}^* - \mathbb{R}$ να αποδείξετε ότι οι εικόνες των μιγαδικών $z, \frac{1}{z}, 1$ και -1 είναι σημεία ομοκυκλικά

9.988 Έστω οι μιγαδικοί a, b, c, d οι οποίοι είναι διαφορετικοί μεταξύ τους ανά δύο και είναι $|a| = |b| = |c| = |d|$. Σε κάθε μία από τις παρακάτω περιπτώσεις, να αποδείξετε ότι οι εικόνες των μιγαδικών a, b, c, d είναι κορυφές τετραγώνου:
α) $Re(a\overline{b}) = Re(b\overline{c}) = Re(c\overline{d}) = 0$
β) $ab+ac+ad+bc+bd+cd = 0$ και $a+b+c+d = 0$

9.989 Έστω οι μιγαδικοί a, b, c με $|a| = |b| = |c| = 1$, οι οποίοι ικανοποιούν τη σχέση:

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} + 3i\sqrt{3} = \frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c}$$

Να αποδείξετε ότι $a + b + c = 0$

9.990 Έστω οι μη μηδενικοί μιγαδικοί z_1, z_2, z_3 για τους οποίους ισχύουν οι σχέσεις $z_1 + z_2 + z_3 = 0$ και $4z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = 0$. Να αποδείξετε ότι οι εικόνες των z_1, z_2, z_3 είναι κορυφές ορθογωνίου και ισοσκελούς τριγώνου, του οποίου το κέντρο βάρους είναι η αρχή των αξόνων.

9.991 Έστω $a, b, c \in \mathbb{C}$, για τους οποίους ισχύουν οι σχέσεις:

$$|a| = |b| = |c| \text{ και } |a + b| + |a + c| = |a - b| + |a - c|$$

Να αποδείξετε ότι $b + c = 0$

9.992 Έστω οι μιγαδικοί a, b, c, d, e, f για τους οποίους ισχύουν: $|a| = |b| = |c| = r$ και $|d| = |e| = |f| = R$, με $0 < r < R$. Επίσης είναι $a + b + c = d + e + f$ και $a^2 + b^2 + c^2 = d^2 + e^2 + f^2$. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα με κορυφές τις εικόνες των μιγαδικών a, b, c και d, e, f είναι ισόπλευρα

(ε΄) αλγεβρικές ανισότητες

9.993 Αν $z \in \mathbb{C}$ με $|z^2 + 2z| = 1$, να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή του $|z|$

9.994 Αν $z \in \mathbb{C}$ με $|4z - 3i| \leq 1$, να βρείτε την ελάχιστη τιμή του $\left|\overline{z} + \frac{1}{z}\right|$

9.995 Αν $z \in \mathbb{C}$ με $|z| = 1$, να αποδείξετε ότι ισχύει η σχέση $|z^2 + iz + 1| \leq \sqrt{5}$

9.996 Θεωρούμε τους μη μηδενικούς μιγαδικούς z για τους οποίους ισχύει η σχέση:

$$\left|z + \frac{1}{z}\right| = \left|z^3 + \frac{1}{z^3}\right| = r > 0$$

α) Να αποδείξετε ότι $\sqrt{2} \leq r \leq 2$
β) Αν $r = 2$, να βρείτε τους μιγαδικούς z που ικανοποιούν τη δοσμένη σχέση

9.997 Αν $a, b, c \in \mathbb{C}$, να αποδείξετε ότι:

$$|a+b|^2+|b+c|^2+|c+a|^2 \geq |a+b+c|^2+Im(ab+bc+ca)$$

9.998 Αν $a,b,c,d \in \mathbb{C}$ με $c,d \neq 0$ και $|c|^2+|d|^2 \leq 1$, να αποδείξετε ότι:

$$|a+b|^2 \leq \left|\frac{a}{c}\right|^2 + \left|\frac{b}{d}\right|^2$$

9.999 Αν $w_1,w_2,...,w_n \in \mathbb{C}^*$ με $|w_1|^2+|w_2|^2+\cdots+|w_n|^2 \leq 1$, τότε για κάθε $z_1,z_2,...,z_n \in \mathbb{C}$ να αποδείξετε ότι:

$$\left|\frac{z_1}{w_1}\right|^2+\left|\frac{z_2}{w_2}\right|^2+\cdots+\left|\frac{z_n}{w_n}\right|^2 \geq |z_1+z_2+\cdots+z_n|^2$$

9.1000 Αν $z_1,z_2,...,z_n \in \mathbb{C}$, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{|\sum z_i|}{1+|\sum z_i|} \leq \sum \frac{|z_i|}{1+|z_i|}$$

9.1001 Έστω $z \in \mathbb{C}$ ώστε $z^5+2z^3+z-2=0$. Να αποδείξετε ότι $\frac{1}{2} < |z| < 2$

9.1002 Έστω $a,b,c,z \in \mathbb{C}$ ώστε $|a|=|b|=|c|>0$ και $az^2+bz+c=0$. Να αποδείξετε ότι:

$$\frac{\sqrt{5}-1}{2} \leq |z| \leq \frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

9.1003 Αν $z \in \mathbb{C}$, ώστε $|z|=1$ και $n \in \mathbb{N}^*$, να αποδείξετε ότι:

$$|1-z^2|+|1+z^3|+|1-z^4|+|1+z^5|+\cdots+|1-z^{2n}|+$$

$$+|1+z^{2n+1}| \geq n|z+1|$$

9.1004 Αν m,n είναι θετικοί ακέραιοι και $z \in \mathbb{C}$, να αποδείξετε ότι:

$$|1+z^m|+|1+z^n|+|1+z^{m+n}| \geq 2$$

9.1005 Έστω $a,b \in \mathbb{C}^*$ με $a \neq b$. Να αποδείξετε ότι ισχύει η σχέση $|za+\overline{a}| \geq |zb+\overline{b}|$ για κάθε $z \in \mathbb{C}$ με $|z|=1$ αν και μόνο αν υπάρχει $\kappa \in [-1,1]$ ώστε να είναι $b=\kappa a$

9.1006 Αν $z \in \mathbb{C}$, να αποδείξετε ότι:

$$|z+2|+|z+3|+|z+11| \leq |z|+|z+4|+|z+12|$$

9.1007 Αν $z \in \mathbb{C}$ με $|z|=1$, να αποδείξετε ότι:

$$\sqrt{2} \leq |1-z|+|1+z^2| \leq 4$$

9.1008 Έστω $a,b,c \in \mathbb{C}^*$ ώστε $|az^2+bz+c| \leq 1$, για κάθε $z \in \mathbb{C}$ με $|z| \leq 1$. Να αποδείξετε ότι $|a|,|b|,|c| \leq 1$

9.1009 Να αποδείξετε ότι ο μιγαδικός z ικανοποιεί τη σχέση $|z|-Re(z) \leq \frac{1}{2}$ αν και μόνο αν υπάρχουν μιγαδικοί a,b τέτοιοι ώστε $z=ab$ και $|a-\overline{b}| \leq 1$

9.1010 Αν $z,w \in \mathbb{C}$ με $|z^3+w^3| \leq 2$ και $|zw| \leq 1$, να αποδείξετε ότι $|z+w| \leq 2$

9.1011 Έστω $\epsilon^3=1$ με $\epsilon \neq 1$ και θεωρούμε το σύνολο:

$$A=\{z \in \mathbb{C}/|z-1| \leq 1, |z-\epsilon| \leq 1, |z-\epsilon^2| \leq 1\}$$

α) Να αποδείξετε ότι $|z| \leq 1$
β) Να βρείτε όλα τα στοιχεία του συνόλου A

9.1012 Έστω $p,q \in \mathbb{C}$ με $|p|+|q|<1$. Αν z_1,z_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης $z^2+pz+q=0$, να αποδείξετε ότι $|z_1|<1$ και $|z_2|<1$

9.1013 Έστω $a,b,c \in \mathbb{R}^*$ και $z \in \mathbb{C}-\mathbb{R}$ με $|z|=1$ ώστε $az^2+b\overline{z}+c=0$. Να αποδείξετε ότι:

$$-3 < \frac{c}{a} < 1 \text{ και } -2 < \frac{b}{a} < 2$$

9.1014 Έστω οι μιγαδικοί z_1,z_2,z_3 για τους οποίους ισχύουν οι σχέσεις:

$$|z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1|=\alpha \text{ και } |z_1z_2z_3|=\beta \text{ με } \alpha,\beta>0$$

Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\kappa \in \{1,2,3\}$ ώστε να είναι $|z_\kappa| \leq \frac{3\beta}{\alpha}$

9.1015 Έστω οι μιγαδικοί $z \neq 0$ για τους οποίους ισχύει η σχέση $\left|z+\frac{1}{z}\right|=\alpha>0$. Να βρείτε την ελάχιστη και τη μέγιστη τιμή του $|z|$

9.1016 Έστω οι μιγαδικοί a,b,c για τους οποίους ισχύουν οι σχέσεις:

$$|a|^2 \leq Re(b\overline{c}), |b|^2 \leq Re(c\overline{a}) \text{ και } |c|^2 \leq Re(a\overline{b})$$

Να αποδείξετε ότι $a=b=c$

9.1017 Αν $z \in \mathbb{C}$, να αποδείξετε ότι $|1+z|+|1+z+z^2| \geq 1$

9.1018 Αν $z,w \in \mathbb{C}$, να αποδείξετε ότι:

$$max\{|z|,|w|\} \leq |z+w|+\sqrt{|zw|}$$

9.1019 Έστω $z_1,z_2,...,z_n \in \mathbb{C}$ με $|z_1|=|z_2|=\cdots=|z_n|=\rho>0$ και θεωρούμε τον μιγαδικό:

$$w=(z_1+z_2+\cdots+z_n)\left(\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}+\cdots+\frac{1}{z_n}\right)$$

α) Να αποδείξετε ότι $w \in \mathbb{R}$
β) Να βρείτε τη μέγιστη τιμή του w

9.1020 Αν $z, w \in \mathbb{C}$ και $n \in \mathbb{N}^*$, να αποδείξετε ότι:

$$|z+w|^n \leq 2^{n-1}(|z|^n + |w|^n)$$

9.1021 Έστω ότι z_1, z_2, z_3, z_4 είναι οι ρίζες της εξίσωσης $z^4 + 2z^3 + 6z^2 + 4z + 8 = 0$. Να βρείτε την ελάχιστη τιμή της παράστασης

$$|w - z_1| + |w - z_2| + |w - z_3| + |w - z_4|, \text{ με } w \in \mathbb{C}$$

9.1022 Αν $z \in \mathbb{C}$ με $|z| \leq \dfrac{1}{3}$, να αποδείξετε ότι:

$$Re(z) \cdot Re\left(\frac{1}{1-z}\right) + Im(z) \cdot Im\left(\frac{1}{1-z}\right) \leq \frac{1}{2}$$

9.1023 Αν $z \in \mathbb{C} - \{1\}$ με $z^n = 1$ και $n \in \mathbb{N}$ με $n \geq 2$, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{2}{n-1} \leq |z-1| \leq 2$$

9.1024 Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:
α) $|z-a| + |z-b| = b - a$, με $a, b \in \mathbb{R}$ και $b > a$
β) $|z| + |z-1| + |z-2| + |z-3| = 4$

9.1025 Έστω οι μιγαδικοί z_1, z_2, z_3 για τους οποίους ισχύουν οι σχέσεις $z_1 + 2z_2 + 3z_3 = 0$ και $|z_1| \leq |z_2| \leq |z_3|$. Να αποδείξετε ότι $3z_1z_2 + z_2z_3 + 2z_3z_1 = 0$

9.1026 Αν $z \in \mathbb{C}^*$, με $\left|z + \dfrac{1}{z}\right| < \sqrt{2}$ και $\left|z^3 + \dfrac{1}{z^3}\right| < \sqrt{2}$, να αποδείξετε ότι $\left|z^2 + \dfrac{1}{z^2}\right| > \sqrt{3}$

9.1027 Έστω $z \in \mathbb{C}$, με $|z^2+z+1| = |z+1|$. Να αποδείξετε ότι $Re(z) \in \left[-1, \dfrac{1}{3}\right]$

9.1028 Έστω $\lambda > 0$ και θεωρούμε τους μιγαδικούς a, b, c για τους οποίους είναι $|a + \lambda b| \leq |c|$, $|b + \lambda c| \leq |a|$ και $|c + \lambda a| \leq |b|$. Να αποδείξετε ότι:
α) $\lambda \leq 1$
β) αν $\lambda = 1$ και $|a| = |b| = |c|$, τότε $a^3 = b^3 = c^3$

9.1029 Αν $a, b, c \in \mathbb{C}$, να αποδείξετε ότι:

$$\left|\sqrt{a^2+b^2+c^2}\right| \leq max\{|a|+|b|, |b|+|c|, |c|+|a|\}$$

9.1030 Έστω $a, b, c \in \mathbb{R}^*$ και $z \in \mathbb{C}$ ώστε $az^2 + bz + c = 0$. Να αποδείξετε ότι $|z| < \dfrac{2|c|}{|b|}$

9.1031 Έστω $a, b, c \in \mathbb{C}$ με $|a| = |b| = |c| = 1$. Να αποδείξετε ότι:

$$3 \leq |a+b-c| + |b+c-a| + |c+a-b| \leq 6$$

9.1032 Αν $z, w \in \mathbb{C}$, με $|z| < |w|$, να αποδείξετε ότι:

$$|1+z| - |1+w| \leq 1 + \frac{|z|}{|w|}$$

9.1033 Αν $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$, να αποδείξετε ότι:

$$|z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2 \geq Re(\overline{z_1}z_2 + \overline{z_2}z_3 + \overline{z_3}z_1) +$$

$$+\frac{1}{6}\left(|z_1 - z_2| + |z_2 - z_3| + |z_3 - z_1|\right)^2$$

9.1034 Έστω $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$, με $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$. Να αποδείξετε ότι:

$$Re\left(\frac{z_1}{z_2}\right) + Re\left(\frac{z_2}{z_3}\right) + Re\left(\frac{z_3}{z_1}\right) \geq -\frac{3}{2}$$

9.1035 Αν $z, w \in \mathbb{C}$, με $z + w \neq 0$, να αποδείξετε ότι:

$$|z| + |w| \leq |z+w| + \frac{2|zw|}{|z+w|}$$

9.1036 Αν για τους μιγαδικούς $z_1, z_2, z_3, ..., z_n$, με $n \geq 2$ ισχύει:

$$\left|\frac{z_1+i}{iz_1+1}\right| + \left|\frac{z_2+i}{iz_2+1}\right| + \cdots + \left|\frac{z_n+i}{iz_n+1}\right| < 2$$

να αποδείξετε ότι το πολύ ένας από αυτούς είναι πραγματικός αριθμός

9.1037 Έστω $x, y, z \in \mathbb{C}$ με $x + y + z = 0$, να αποδείξετε ότι:
α) $|x-y|^2 + |y-z|^2 + |z-x|^2 = 3(|x|^2 + |y|^2 + |z|^2)$
β) $2(|x-y| + |y-z| + |z-x|) \geq 3(|x| + |y| + |z|)$

9.1038 Αν $z, w \in \mathbb{C}$, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{i}{2}(\bar{z}w - z\overline{w}) \leq min\{|z|, |w|\} \cdot |z-w|$$

9.1039 Αν $a, b, c \in \mathbb{C}$, να αποδείξετε ότι:

$$|a-b|\sqrt{1+|c|^2} + |b-c|\sqrt{1+|a|^2} \geq |c-a|\sqrt{1+|b|^2}$$

9.1040 Έστω οι μιγαδικοί $z_1, z_2, ..., z_n$, με $n \in \mathbb{N}$ και $n \geq 2$. Να αποδείξετε ότι:

$$|z_1|^2 + |z_2|^2 + \cdots + |z_n|^2 \geq Re(z_1z_2 + z_2z_3 + \cdots + z_nz_1)$$

9.1041 Αν $a, b \in \mathbb{C}$, να αποδείξετε ότι:

$$|ab+1| + |a+b| \geq \sqrt{|a^2-1| \cdot |b^2-1|}$$

9.1042 Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί a, b, c ώστε να είναι:

$$|a| = |b| = |c| = 2 \text{ και } a + b + c = 1$$

α) Να αποδείξετε ότι $(a + \overline{b})(b + \overline{c})(c + \overline{a}) \in \mathbb{R}$
β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης

$$K = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$$

γ) Να αποδείξετε ότι: $|a + b| + |b + c| + |c + a| \geq 3$

9.1043 Έστω $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$, ώστε: $|z_1| = |z_2| = |z_3| = \rho > 0$ και $z_1 + z_2 + z_3 \neq 0$. Να αποδείξετε ότι:

$$Re\left(\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3}\right) \cdot Re\left(\frac{1}{z_1 + z_2 + z_3}\right) \geq 0$$

9.1044 Έστω $z, w \in \mathbb{C}^*$, με $|z+w| = |z-w|$. Να αποδείξετε ότι:
α) $\dfrac{z}{w} \in I$ β) $\left|\dfrac{iz}{z - w}\right| + \left|\dfrac{\overline{w}}{z + w}\right| \geq 1$

9.1045 Αν $z \in \mathbb{C}^*$, να αποδείξετε ότι:

$$\left|\frac{1}{z} + i\right| + |z + i| > \left|z + \frac{1}{z}\right|$$

9.1046 Έστω $z \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$, ώστε $z^n + nz + \alpha = 0$, με $n \in \mathbb{N}^*$ και $\alpha \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι $|z| \geq 1$

9.1047 Έστω $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, ώστε $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$. Για κάθε $z, w \in \mathbb{C}$, να αποδείξετε ότι:

$$|z|^2 + |w|^2 - |z^2 + w^2| \leq \frac{2|\alpha z + \beta w|^2}{\alpha^2 + \beta^2} \leq |z|^2 + |w|^2 + |z^2 + w^2|$$

9.1048 Θεωρούμε τον μιγαδικό z για τον οποίο ισχύει η σχέση:

$$z^n \sigma\upsilon\nu(n\theta) + z^{n-1}\sigma\upsilon\nu[(n-1)\theta] + \cdots + z\sigma\upsilon\nu\theta = 1$$

όπου $\theta \in \mathbb{R}$ και $n \in \mathbb{N}^*$. Να αποδείξετε ότι $|z| > \dfrac{1}{2}$

9.1049 Έστω $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n > 0$, ώστε να είναι:

$$\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} + \cdots + \frac{1}{\alpha_n} = 1$$

Για κάθε $z_1, z_2, ..., z_n \in \mathbb{C}$, να αποδείξετε ότι:

$$|z_1 + z_2 + \cdots + z_n|^2 \leq \alpha_1|z_1|^2 + \alpha_2|z_2|^2 + \cdots + \alpha_n|z_n|^2$$

9.1050 Αν $z \in \mathbb{C}$, με $|z^2 + 1| = 2|z + 1|$, να αποδείξετε ότι $|z| \leq \sqrt{7}$

9.1051 Αν $z \in \mathbb{C}$ με $|z| = 1$, να αποδείξετε ότι

$$\sqrt{3} \leq |1 + z| + |1 - z + z^2| \leq \frac{13}{4}$$

9.1052 Αν $z, w \in \mathbb{C}$, να αποδείξετε ότι:

$$2|z| \cdot |w| \cdot |z - w| \geq (|z| + |w|) \cdot |z|w| - w|z||$$

9.1053 Αν $a, b, c \in \mathbb{C}$, να αποδείξετε ότι:

$$|a - b| + |b - c| + |c - a| + |a + b + c| \geq |a| + |b| + |c|$$

9.1054 Αν $a, b, c \in \mathbb{C}$, να αποδείξετε ότι:

$$|a + b| + |b + c| + |c + a| \leq |a + b + c| + |a| + |b| + |c|$$

9.1055 Έστω οι μιγαδικοί $z_1, z_2, z_3, ..., z_n$ για τους οποίους ισχύει η σχέση:

$$|z_1| = 4|z_2| = 9|z_3| = \cdots = n^2|z_n|$$

Να αποδείξετε ότι:

$$z_1 + z_2 + z_3 + \cdots + z_n = 0 \Leftrightarrow z_1 = z_2 = z_3 = \cdots = z_n = 0$$

9.1056 Αν $a, b, c \in \mathbb{C}^*$, οι οποίοι είναι διαφορετικοί μεταξύ τους ανά δύο, να αποδείξετε ότι:

$$\left|\frac{a + b}{a - b}\right| + \left|\frac{b + c}{b - c}\right| + \left|\frac{c + a}{c - a}\right| \geq \sqrt{3}$$

9.1057 Αν $a \geq b \geq c > 0$ και $z \in \mathbb{C}$ με $az^2 + bz + c = 0$, να αποδείξετε ότι $|z| \leq 1$

(ϛ΄) γεωμετρικές ανισότητες

9.1058 Αν $z \in \mathbb{C}$, να βρείτε την ελάχιστη τιμή της παράστασης:

$$A = |z| + |z - 1| + |z - i| + |z - 1 - i|$$

9.1059 Να λύσετε την εξίσωση:

$$|z| + |z - 25| + |z - 18 - 24i| + |z + 7 - 24i| = 70$$

9.1060 Αν $a, b, c \in \mathbb{C}$ με $|a| = |b| = |c| = 1$, να αποδείξετε ότι $|a - b|^2 - |b - c|^2 + |c - a|^2 \geq -1$

9.1061 Έστω οι μιγαδικοί z_1, z_2, z_3, z_4 οι οποίοι είναι διαφορετικοί μεταξύ τους ανά δύο και οι εικόνες τους Α, Β, Γ, Δ αντίστοιχα βρίσκονται σε κύκλο κέντρου Ο με ακτίνα $\rho > 0$ και είναι $|z_2 - z_1| = |z_3 - z_4|$. Να αποδείξετε ότι:
α) $|z_1 + z_2| = |z_3 + z_4|$
β) αν $|z_2 - z_3| \neq |z_4 - z_1|$, τότε είναι:

$$|z_1+z_4|+|z_2+z_3|<|z_2-z_1|+|z_4-z_3|$$

9.1062 Αν $a,b,c \in \mathbb{C}$, με $|a|=|b|=|c|=R$, να αποδείξετε ότι:
α) $|a-b|^2+|b-c|^2+|c-a|^2 \leq 9R^2$
β) $|a-b|\cdot|b-c|+|b-c|\cdot|c-a|+|c-a|\cdot|a-b| \leq 9R^2$

9.1063 Θεωρούμε τους μιγαδικούς a,b,c οι οποίοι είναι διαφορετικοί μεταξύ τους ανά δύο και είναι $|a|=|b|=|c|=R$. Να αποδείξετε ότι:

$$\frac{1}{|a-b|\cdot|a-c|}+\frac{1}{|b-c|\cdot|b-a|}+\frac{1}{|c-a|\cdot|c-b|} \geq \frac{1}{R^2}$$

9.1064 Αν οι διανυσματικές ακτίνες των μη μηδενικών μιγαδικών z,w σχηματίζουν γωνία 60^0, να αποδείξετε ότι $|z+w| \leq \sqrt{3}|z-w|$

9.1065 Αν $z,w \in \mathbb{C}$ με $Re(z\overline{w}) \geq 0$, να αποδείξετε ότι $|z+w| \geq |z-w|$

9.1066 Έστω οι μιγαδικοί z_1,z_2,z_3 με $z_2 \neq z_3$ και $|z_1|=|z_2|=|z_3|=\rho>0$. Θεωρούμε τον μιγαδικό $w=\alpha z_2+(1-\alpha)z_3$, με $\alpha \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:
α) οι εικόνες των μιγαδικών w,z_2,z_3 είναι σημεία συνευθειακά
β) $2\rho|w-z_1| \geq |z_1-z_2|\cdot|z_1-z_3|$

9.1067 Έστω Μ σημείο του επιπέδου ενός παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ. Να αποδείξετε ότι:

$$MA\cdot M\Gamma+MB\cdot M\Delta \geq AB\cdot B\Gamma$$

9.1068 Έστω $z_1,z_2,z_3 \in \mathbb{C}$ με μη αρνητικά πραγματικά μέρη και $|z_1|=|z_2|=|z_3|=1$. Να αποδείξετε ότι:

$$|z_1-z_2|\cdot|z_2-z_3|\cdot|z_3-z_1| \leq 4$$

9.1069 Έστω $z_1,z_2,...,z_n \in \mathbb{C}$ και $z_0=\dfrac{z_1+z_2+\cdots+z_n}{n}$. Για κάθε $w \in \mathbb{C}$, να αποδείξετε ότι:

$$|z_0-z_1|^2+|z_0-z_2|^2+\cdots+|z_0-z_n|^2 \leq$$

$$\leq |w-z_1|^2+|w-z_2|^2+\cdots+|w-z_n|^2$$

9.1070 Έστω οι μιγαδικοί $z_1,z_2,...,z_n$ για τους οποίους ισχύουν οι σχέσεις:

$$z_1+z_2+\cdots+z_n=0 \text{ και } |z_1|=|z_2|=\cdots=|z_n|=1$$

Για κάθε $w \in \mathbb{C}$, να αποδείξετε ότι:

$$|w-z_1|+|w-z_2|+\cdots+|w-z_n| \geq n$$

9.1071 Έστω $z_1,z_2,z_3 \in \mathbb{C}^*$ και $w=\overline{z_1}z_2+\overline{z_2}z_3+\overline{z_3}z_1$. Να αποδείξετε ότι:

$$|z_1|^2+|z_2|^2+|z_3|^2 \geq Re(w)+\sqrt{3}Im(w)$$

9.1072 Οι μιγαδικοί a,b,c είναι διαφορετικοί μεταξύ τους ανά δύο και είναι $a|bc|+b|ca|+c|ab|=0$. Να αποδείξετε ότι:

$$|(a-b)(b-c)(c-a)| \geq 3\sqrt{3}|abc|$$

9.1073 Έστω οι μιγαδικοί a,b,c οι οποίοι είναι διαφορετικοί μεταξύ τους ανά δύο και ικανοποιούν τις σχέσεις:

$$|a|=|b|=|c|=1 \text{ και } |a-b|^2+|b-c|^2+|c-a|^2>8$$

Να αποδείξετε ότι $|(a+b)(b+c)(c+a)| \leq 1$

9.1074 α) Οι μιγαδικοί a,b,c είναι διαφορετικοί μεταξύ τους ανά δύο. Να αποδείξετε ότι:

$$\frac{a^2}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^2}{(b-c)(b-a)}+\frac{c^2}{(c-a)(c-b)}=1$$

β) Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{1}{\alpha\beta}+\frac{1}{\beta\gamma}+\frac{1}{\gamma\alpha} \geq \frac{1}{R^2}$$

9.1075 α) Αν $a,b,c \in \mathbb{C}$, να αποδείξετε ότι:

$$|a|^2\cdot|b-c|+|b|^2\cdot|c-a|+|c|^2\cdot|a-b| \geq |a-b|\cdot|b-c|\cdot|c-a|$$

β) Αν Ο είναι τυχαίο σημείο στο επίπεδο ενός τριγώνου ΑΒΓ, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{OA^2}{\beta\gamma}+\frac{OB^2}{\gamma\alpha}+\frac{O\Gamma^2}{\alpha\beta} \geq 1$$

γ) Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{\mu_\alpha^2}{\beta\gamma}+\frac{\mu_\beta^2}{\gamma\alpha}+\frac{\mu_\gamma^2}{\alpha\beta} \geq \frac{9}{4}$$

9.1076 Έστω οι μιγαδικοί a,b,c με $a+b+c=0$ και $|a|=|b|=|c|=1$. Για κάθε $x \in \mathbb{C}$ με $|x| \leq 1$, να αποδείξετε ότι $|x-a|+|x-b|+|x-c| \leq 4$

συνεχίζεται...

επιμέλεια: **zorba the freak**
nicks@freemail.gr
3 Γενάρη, 2014