Η Θεωρία σε 99 Ερωτήσεις

(Ορισμοί, Θεωρήματα)

14.01

ΜΙΓΑΔΙΚΟΙ

1. Πότε δύο μιγαδικοί αριθμοί $\alpha+\beta i$ και $\gamma+\delta i$ με $\alpha,\beta,\gamma,\delta\in R$ είναι ίσοι και πότε ένας μιγαδικός ι-σούται με μηδέν;

Απάντηση σελ 87

Δύο μιγαδικοί αριθμοί $\alpha+\beta i$ και $\gamma+\delta i$ με $\alpha,\beta,\gamma,\delta\in R$ είναι ίσοι, αν και μόνο αν $\alpha=\gamma$ και $\beta=\delta$. Δηλαδή ισχύει: $\alpha+\beta i=\gamma+\delta i \Leftrightarrow \alpha=\gamma$ και $\beta=\delta$.

Επομένως, επειδή $0=0+0i$, έχουμε : $\alpha+\beta i=0 \Leftrightarrow \alpha=0$ και $\beta=0$.

2. Πως ορίζονται οι πράξεις στους μιγαδικούς ;

Απάντηση σελ 88-89

- Για την **πρόσθεση** των $\alpha+\beta i$ και $\gamma+\delta i$, με $\alpha,\beta,\gamma,\delta\in R$ έχουμε: $\boldsymbol{(\alpha+\beta i)+(\gamma+\delta i)=(\alpha+\gamma)+(\beta+\delta)i}$.
- Για την **αφαίρεση** των $\alpha+\beta i$ και $\gamma+\delta i$, με $\alpha,\beta,\gamma,\delta\in R$ έχουμε: $\boldsymbol{(\alpha+\beta i)-(\gamma+\delta i)=(\alpha-\gamma)+(\beta-\delta)i}$.
- Για τον **πολ/σμό** δυο μιγαδικών με $\alpha,\beta,\gamma,\delta\in R$ έχουμε: $\boldsymbol{(\alpha+\beta i)(\gamma+\delta i)=(\alpha\gamma-\beta\delta)+(\alpha\delta+\beta\gamma)i}$
- Για το **πηλίκο** $\frac{\alpha+\beta i}{\gamma+\delta i}$ με $\alpha,\beta,\gamma,\delta\in R$ **και** $\gamma+\delta i\neq 0+0i$ έχουμε: $\boldsymbol{\frac{\alpha+\beta i}{\gamma+\delta i}=\frac{\alpha\gamma+\beta\delta}{\gamma^2+\delta^2}+\frac{\beta\gamma-\alpha\delta}{\gamma^2+\delta^2}i}$

3. Πως ορίζεται η δύναμη μιγαδικού ;

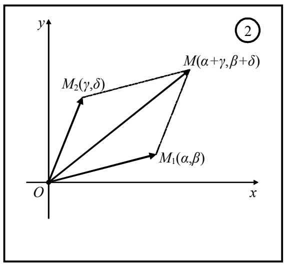
Απάντηση σελ 90

- Ορίζουμε: $z^1=z$, $z^2=z\cdot z,...,$ και γενικά $z^\nu=z^{\nu-1}\cdot z$, για κάθε ακέραιο ν, με $\nu>1$.
- Αν $z\neq 0$, ορίζουμε $z^0=1$, $z^{-\nu}=\frac{1}{z^\nu}$ για κάθε θετικό ακέραιο ν.
- Ισχύει : $\boldsymbol{i^0=1,\quad i^1=i,\quad i^2=-1,\quad i^3=i^2 i=-i}$
- Γενικά : $i^\nu=i^{4\rho+\upsilon}=i^{4\rho}i^\upsilon=(i^4)^\rho i^\upsilon=1^\rho i^\upsilon=i^\upsilon=\begin{cases}1 & , \text{ αν } \upsilon=0\\ i & , \text{ αν } \upsilon=1\\ -1 & , \text{ αν } \upsilon=2\\ -i & , \text{ αν } \upsilon=3\end{cases}$

4. Να δώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία της πρόσθεσης δύο μιγαδικών αριθμών

Απάντηση σελ 88

"Η διανυσματική ακτίνα του αθροίσματος των μιγαδικών $\boldsymbol{\alpha+\beta i}$ και $\boldsymbol{\gamma+\delta i}$ με $\alpha,\beta,\gamma,\delta\in R$ είναι το άθροισμα των διανυσματικών ακτίνων τους".



Αν $M_1(\alpha,\beta)$ και $M_2(\gamma,\delta)$ είναι οι εικόνες των $\alpha+\beta i$ και $\gamma+\delta i$ με $\alpha,\beta,\gamma,\delta\in R$ αντιστοίχως στο μιγαδικό επίπεδο, τότε το άθροισμα

$$(\alpha+\beta i)+(\gamma+\delta i)=(\alpha+\gamma)+(\beta+\delta)i$$

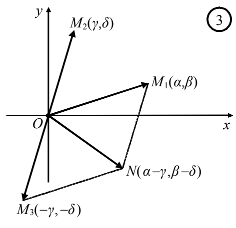
παριστάνεται με το σημείο $M(\alpha+\gamma,\beta+\delta)$.

Επομένως, $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OM_1}+\overrightarrow{OM_2}$

5. Να δώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία της αφαίρεσης δύο μιγαδικών αριθμών

Απάντηση σελ 89

"Η διανυσματική ακτίνα της διαφοράς των μιγαδικών $\boldsymbol{\alpha+\beta i}$ και $\boldsymbol{\gamma+\delta i}$ με $\alpha,\beta,\gamma,\delta\in R$ είναι η διαφορά των δι-ανυσματικών ακτίνων τους".



Επίσης, η διαφορά $(\alpha+\beta i)-(\gamma+\delta i)=(\alpha-\gamma)+(\beta-\delta)i$

παριστάνεται με το σημείο $N(\alpha-\gamma,\beta-\delta)$.

Επομένως, $\overrightarrow{ON}=\overrightarrow{OM_1}-\overrightarrow{OM_2}$

6. Ποιές είναι οι ιδιότητες των συζυγών μιγαδικών ;

Απάντηση ***σελ 91***

Αν $z=\alpha+\beta i$ με $\alpha,\beta\in R$ τότε ισχύουν ότι:

1. $z+\bar{z}=2\alpha=2\operatorname{Re}(z)$ 2. $z-\bar{z}=2\beta i=2\operatorname{Im}(z)i$ 3. $\overline{z_1+z_2}=\bar{z}_1+\bar{z}_2$ 4. $\overline{z_1-z_2}=\bar{z}_1-\bar{z}_2$

5. $\overline{z_1\cdot z_2}=\bar{z}_1\cdot\bar{z}_2$ 6. $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$ 7. $\overline{(z^v)}=(\bar{z})^v$

7. Ποιές είναι οι ρίζες ενός τριωνύμου αν Δ<0 ; Ποιές σχέσεις τις συνδέουν ;

Απάντηση ***σελ 92-93***

Το τριώνυμο $f(z)=\alpha z^2+\beta z+\gamma$ με $\alpha,\beta,\gamma\in R$, $\alpha\neq 0$ με $\Delta<0$ έχει λύσεις λύσεις τις : $z_{1,2}=\frac{-\beta\pm i\sqrt{-\Delta}}{2\alpha}$ και

ισχύει : $z_1+z_2=\frac{-\beta}{\alpha}$ και $z_1z_2=\frac{\gamma}{\alpha}$.

8. Πως ορίζεται το μέτρο μιγαδικού ;

Απάντηση ***σελ 97***

Έστω M(x,y) η εικόνα του μιγαδικού $z=x+y\cdot i$ με $x,y\in R$ στο μιγαδικό επίπεδο. Ορίζουμε ως **μέτρο** του z την απόσταση του M από την αρχή O, δηλαδή $|z|=|\overrightarrow{OM}|=\sqrt{x^2+y^2}$

9. Ποιες είναι οι ιδιότητες του μέτρου ;

Απάντηση ***σελ 97-98***

1. $|z|=|\bar{z}|=|-z|$ 2. $|z|^2=z\cdot\bar{z}$ 3. $|z_1\cdot z_2|=|z_1|\cdot|z_2|$ 4. $\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{|z_1|}{|z_2|}$ 5. $|z^v|=|z|^v$

6 $|z_1\cdot z_2\cdot\ldots\cdot z_v|=|z_1|\cdot|z_2|\cdot\ldots\cdot|z_v|$ 7. $\big||z_1|-|z_2|\big|\leq|z_1+z_2|\leq|z_1|+|z_2|$ (τριγωνική ανισότητα)

7. $(M_1M_2)=|z_1-z_2|$, δηλαδή : το μέτρο της διαφοράς δύο μιγαδικών είναι ίσο με την απόσταση των εικόνων τους ,

10. Τι παριστάνουν γεωμετρικά οι εξισώσεις : $|z-z_o|=\rho>0$ και $|z-z_1|=|z-z_2|$ $|z-z_1|=|z-z_2|$;

Απάντηση ***σελ 99***

Η εξίσωση $|z-z_0|=\rho,\quad \rho>0$ παριστάνει τον **κύκλο** με κέντρο το σημείο $K(z_0)$ και ακτίνα ρ,

ενώ η εξίσωση $|z-z_1|=|z-z_2|$, τη **μεσοκάθετο** του ευθύγραμμου τμήματος με άκρα τα $A(z_1)$ και $B(z_2)$.

ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

11. Τι ονομάζουμε πραγματική συνάρτηση ;

Απάντηση ***σελ 133***

Έστω A ένα υποσύνολο του R. Ονομάζουμε **πραγματική συνάρτηση** με **πεδίο ορισμού το A** μια διαδικασία f, με την οποία κάθε στοιχείο $x\in A$ αντιστοιχίζεται σε ένα μόνο πραγματικό αριθμό y. Το y ονομάζεται **τιμή της f στο x** και συμβολίζεται με $f(x)$.

12. Τι ονομάζουμε σύνολο τιμών μιας συνάρτησης f που είναι ορισμένη σε ένα σύνολο A;

Απάντηση ***σελ 133***

Το σύνολο που έχει για στοιχεία του τις τιμές της f σε όλα τα $x\in A$, λέγεται **σύνολο τιμών** της f και συμβολίζεται με $\boldsymbol{f(A)}$. Είναι δηλαδή: $f(A)=\{\ y\,|\,y=f(x)\ \text{ για κάποιο }\ x\in A\ \}$.

13. Τι ονομάζουμε γραφική παράσταση συνάρτησης;

Απάντηση ***σελ 134***

Έστω f συνάρτηση με πεδίο ορισμού A και Oxy ένα σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο. Το σύνολο των σημείων $M(x,y)$ για τα οποία ισχύει $y=f(x)$, δηλαδή το σύνολο των σημείων $M(x,f(x))$, $x\in A$, λέγεται **γραφική παράσταση** της f και συμβολίζεται με $\boldsymbol{C_f}$.

14. Πότε δυο συναρτήσεις λέγονται ίσες

Απάντηση ***σελ 141***

Δύο συναρτήσεις f και g λέγονται **ίσες** όταν:

- έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού A και
- για κάθε $x\in A$ ισχύει $f(x)=g(x)$.

15. Πως ορίζονται οι πράξεις μεταξύ συναρτήσεων ;

Απάντηση σελ 142

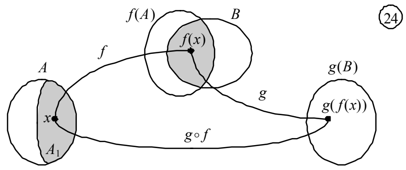
Ορίζουμε ως άθροισμα, διαφορά, γινόμενο και πηλίκο, αντίστοιχα , δύο συναρτήσεων f, g τις συναρτήσεις με τύπους : $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$, $(f-g)(x)=f(x)-g(x)$, $(fg)(x)=f(x)g(x)$, $\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$. Το πεδίο ορισμού των $f+g$, $f-g$ και fg είναι η τομή $A\cap B$ των πεδίων ορισμού A και B των συναρτήσεων f και g αντιστοίχως, ενώ το πεδίο ορισμού της $\frac{f}{g}$ είναι το σύνολο $\{x\,|\,x\in A$ και $x\in B$, με $g(x)\neq 0\}$.

16. Τι ονομάζουμε σύνθεση των συναρτήσεων f και g;

Απάντηση σελ 143

Αν f , g είναι δύο συναρτήσεις με πεδίο ορισμού A, B αντιστοίχως, τότε ονομάζουμε **σύνθεση της** f **με την** g , και τη συμβολίζουμε με gof , τη συνάρτηση με τύπο

$$(gof)(x)=g(f(x))$$



Το πεδίο ορισμού της gof αποτελείται από όλα τα στοιχεία x του πεδίου ορισμού της f για τα οποία το f(x) ανήκει στο πεδίο ορισμού της g. Δηλαδή είναι το σύνολο

$$A_1=\{x\in A\,|\,f(x)\in B\}.$$

Είναι φανερό ότι η gof ορίζεται αν $A_1\neq\varnothing$, δηλαδή αν $f(A)\cap B\neq\varnothing$.

17. Πότε μια συνάρτηση λέγεται γνησίως αύξουσα και πότε γνησίως φθίνουσα σ' ένα διάστημα Δ ;

Απάντηση σελ 149

Μια συνάρτηση f λέγεται :

- **γνησίως αύξουσα** σ' ένα *διάστημα Δ* του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε $x_1,x_2\in\Delta$ με $x_1<x_2$ ισχύει: $f(x_1)<f(x_2)$
- **γνησίως φθίνουσα** σ' ένα *διάστημα Δ* του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε $x_1,x_2\in\Delta$ με $x_1<x_2$ ισχύει: $f(x_1)>f(x_2)$

18. Πότε μια συνάρτηση παρουσιάζει μέγιστο και πότε ελάχιστο ;

Απάντηση σελ 150

Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A θα λέμε ότι:

- Παρουσιάζει στο $x_0\in A$ (ολικό) **μέγιστο**, το $f(x_0)$, όταν $f(x)\leq f(x_0)$ για κάθε $x\in A$.
- Παρουσιάζει στο $x_0\in A$ (ολικό) **ελάχιστο**, το $f(x_0)$, όταν $f(x)\geq f(x_0)$ για κάθε $x\in A$.

19. Πότε μια συνάρτηση λέγεται $1-1$;

Απάντηση σελ 151

- Μια συνάρτηση $f:A\to R$ λέγεται **συνάρτηση** $1-1$, όταν για οποιαδήποτε $x_1,x_2\in A$ ισχύει η συνεπαγωγή: αν $x_1\neq x_2$, τότε $f(x_1)\neq f(x_2)$.

20. Τι ονομάζουμε αντίστροφη συνάρτηση;

Απάντηση σελ 153 -154

Έστω μια $1-1$ συνάρτηση $f:A\to R$. Τότε για κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών, $f(A)$, της f υπάρχει μοναδικό στοιχείο x του πεδίου ορισμού της A για το οποίο ισχύει $f(x)=y$. Επομένως ορίζεται μια συνάρτηση $g:f(A)\to R$ με την οποία κάθε $y\in f(A)$ αντιστοιχίζεται στο μοναδικό $x\in A$ για το οποίο ισχύει $f(x)=y$. Η g λέγεται **αντίστροφη συνάρτηση** της f και συμβολίζεται με $\boldsymbol{f^{-1}}$. Επομένως έχουμε $f(x)=y\Leftrightarrow f^{-1}(y)=x$. Οι γραφικές παραστάσεις των f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y=x$

ΟΡΙΑ

21. Ποιες ανισότητες ισχύουν στα όρια ; (όριο και διάταξη)

Απάντηση *σελ 165-166*

- Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)>0$, τότε $f(x)>0$ κοντά στο x_0 ενώ αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)<0$, τότε $f(x)<0$, κοντά στο x_0
- Αν οι συναρτήσεις f,g έχουν όριο στο x_0 και ισχύει $f(x)\le g(x)$ κοντά στο x_0, τότε $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\le \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$

22. Ποιες είναι οι ιδιότητες των ορίων αν το χ τείνει στο χ₀ ;

Απάντηση *σελ 166*

Αν υπάρχουν τα όρια των συναρτήσεων f και g στο x_0, τότε:

1. $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)+g(x))=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)+\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$
2. $\lim\limits_{x\to x_0}(\kappa f(x))=\kappa\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, για κάθε $\kappa\in R$
3. $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)\cdot g(x))=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\cdot\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$
4. $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}$, εφόσον $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)\neq 0$
5. $\lim\limits_{x\to x_0}|f(x)|=\left|\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\right|$
6. $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt[k]{f(x)}=\sqrt[k]{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}$, $f(x)\ge 0$ κοντά στο x_0
7. $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)]^\nu=\left[\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\right]^\nu$, $\nu\in N^*$

23. Να διατυπώσετε το κριτήριο παρεμβολής .

Απάντηση *σελ 169*

Έστω οι συναρτήσεις f,g,h.

Αν $h(x)\le f(x)\le g(x)$ κοντά στο x_0 και $\lim\limits_{x\to x_0} h(x)=\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\ell$, τότε $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\ell$.

24. Ποια είναι τα βασικά τριγωνομετρικά όρια ;

Απάντηση *σελ 170*

α) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu x}{x}=1$ β) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sigma\upsilon\nu x-1}{x}=0$ ενώ ισχύει $|\eta\mu x|\le|x|$ με την ισότητα να ισχύει μόνο στο μηδέν

25. Πως υπολογίζουμε το όριο σύνθετης συνάρτησης ;

Απάντηση *σελ 173*

Για να υπολογίσουμε το $\lim\limits_{x\to x_0} f(g(x))$, της σύνθετης συνάρτησης $f\circ g$ στο σημείο x_0 εργαζόμαστε ως εξής

Θέτουμε $u=g(x)$ και υπολογίζουμε το $u_0=\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ και το $\ell=\lim\limits_{u\to u_0} f(u)$ (αν υπάρχουν) . Αποδεικνύεται ότι, αν $g(x)\neq u_0$ κοντά στο x_0, τότε το ζητούμενο όριο είναι ίσο με ℓ, δηλαδή ισχύει: $\lim\limits_{x\to x_0} f(g(x))=\lim\limits_{u\to u_0} f(u)$.

26. Ποια είναι τα όρια των εκθετικών και λογαριθμικών συναρτήσεων

Απάντηση *σελ 185*

- Αν $\alpha>1$ τότε $\lim\limits_{x\to-\infty}\alpha^x=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\alpha^x=+\infty$, $\lim\limits_{x\to 0}\log_\alpha x=-\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\log_\alpha x=+\infty$
- Αν $0<\alpha<1$ τότε $\lim\limits_{x\to-\infty}\alpha^x=+\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\alpha^x=0$, $\lim\limits_{x\to 0}\log_\alpha x=+\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\log_\alpha x=-\infty$

27. Ποιος είναι ο ορισμός της ακολουθίας;

Απάντηση *σελ 186*

Ακολουθία ονομάζεται κάθε πραγματική συνάρτηση $\alpha: N^*\to R$.

28. Πότε θα λέμε ότι μια ακολουθία έχει όριο το $\ell\in R$

Απάντηση *σελ 186*

Θα λέμε ότι η ακολουθία (α_ν) έχει όριο το $\ell\in R$ και θα γράφουμε $\lim\limits_{\nu\to\infty}\alpha_\nu=\ell$, όταν για κάθε $\varepsilon>0$, υπάρχει $\nu_0\in N^*$ τέτοιο, ώστε για κάθε $\nu>\nu_0$ να ισχύει $|\alpha_\nu-\ell|<\varepsilon$

29. Πότε μια συνάρτηση f λέγεται συνεχής στο x_0 του πεδίου ορισμού της;

Απάντηση *σελ 188*

Έστω μια συνάρτηση f και x_0 ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της. Θα λέμε ότι η f είναι **συνεχής στο** x_0, όταν: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$

30. Πότε μια συνάρτηση f λέγεται συνεχής στο πεδίο ορισμού της ;

Απάντηση *σελ 189*

Όταν η f είναι συνεχής σε όλα τα σημεία του πεδίου ορισμού της

31. *Πότε μια συνάρτηση f λέγεται συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα (α,β);*

Απάντηση ***σελ 191***

Μια συνάρτηση f θα λέμε ότι είναι **συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα** (α,β), όταν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του (α,β).

32. *Πότε μια συνάρτηση f λέγεται συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$;*

Απάντηση ***σελ 191***

Μια συνάρτηση f θα λέμε ότι είναι **συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα** $[\alpha,\beta]$, όταν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του (α,β) και επιπλέον : $\lim_{x\to\alpha^+} f(x)=f(\alpha)$ και $\lim_{x\to\beta^-} f(x)=f(\beta)$

33. *Τι γνωρίζετε για τις πράξεις μεταξύ συνεχών συναρτήσεων;*

Απάντηση ***σελ 190***

- Αν οι συναρτήσεις f και *g* είναι συνεχείς στο x_0, τότε είναι συνεχείς στο x_0 και οι συναρτήσεις: $f+g$, $c\cdot f$, όπου $c\in R$, $f\cdot g$, $\frac{f}{g}$, $|f|$ και $\sqrt[\nu]{f}$, με την προϋπόθεση ότι ορίζονται σε διάστημα που περιέχει το x_0
- Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0 και η συνάρτηση *g* είναι συνεχής στο $f(x_0)$, τότε η σύνθεσή τους gof είναι συνεχής στο x_0.

34. *Να διατυπώσετε το θεώρημα Bolzano*

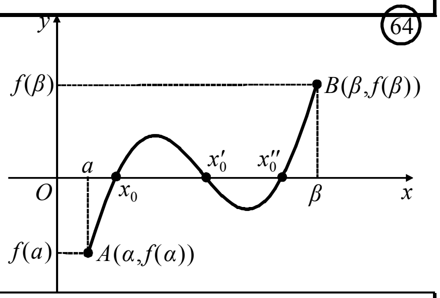
Απάντηση ***σελ 194***

Έστω μια συνάρτηση f, ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$. Αν η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και, επιπλέον, ισχύει $f(\alpha)\cdot f(\beta)<0$, τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0)=0$.

35. *Να δώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία του θεωρήματος Bolzano*

Απάντηση ***σελ 194***

Στο διπλανό σχήμα έχουμε τη γραφική παράσταση μιας συνεχούς συνάρτησης f στο $[\alpha,\beta]$.
Επειδή τα σημεία $A(\alpha,f(\alpha))$ και $B(\beta,f(\beta))$ βρίσκονται εκατέρωθεν του άξονα $x'x$, η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα σε ένα τουλάχιστον σημείο.



36. *Πως σχετίζεται η συνέχεια με τα διαστήματα ;*

Απάντηση ***σελ 194***

Η εικόνα $f(\Delta)$ ενός διαστήματος *Δ* μέσω ***μιας συνεχούς*** και ***μη σταθερής*** συνάρτησης f είναι διάστημα.

37. *Να διατυπώσετε το Θεώρημα Μέγιστης - Ελάχιστης τιμής*

Απάντηση ***σελ 195***

Αν f είναι συνεχής συνάρτηση στο $[\alpha,\beta]$, τότε η f παίρνει στο $[\alpha,\beta]$ μια μέγιστη τιμή *M* και μια ελάχιστη τιμή *m*. Δηλαδή, υπάρχουν $x_1,x_2\in[\alpha,\beta]$ τέτοια, ώστε, αν $m=f(x_1)$ και $M=f(x_2)$, να ισχύει
$m\le f(x)\le M$, **για κάθε** $x\in[\alpha,\beta]$.

38. *Ποιο είναι το σύνολο τιμών μιας συνεχούς συνάρτησης ορισμένης σε διάστημα ;*

Απάντηση ***σελ 196***

- Αν μια συνάρτηση f είναι **γνησίως αύξουσα** και **συνεχής** σε ένα ανοικτό διάστημα (α,β), τότε το σύνολο τιμών της στο διάστημα αυτό είναι το διάστημα (A,B), όπου $A=\lim_{x\to\alpha^+} f(x)$ και $B=\lim_{x\to\beta^-} f(x)$.
- Αν, όμως, η f είναι **γνησίως φθίνουσα** και **συνεχής** στο (α,β), τότε το σύνολο τιμών της στο διάστημα αυτό είναι το διάστημα (B,A)
- Ανάλογα συμπεράσματα έχουμε και όταν μια συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως μονότονη σε διαστήματα της μορφής $[\alpha,\beta]$, $[\alpha,\beta)$ και $(\alpha,\beta]$.

ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ

39. *Πως ορίζεται η εφαπτομένη στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$ της C_f ;*

Απάντηση σελ 212

Έστω f μια συνάρτηση και $A(x_0, f(x_0))$ ένα σημείο της C_f. Αν υπάρχει το $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ και είναι ένας πραγματικός αριθμός λ , τότε ορίζουμε ως εφαπτομένη της C_f στο σημείο της Α, την ευθεία ε που διέρχεται από το Α και έχει συντελεστή διεύθυνσης λ

Επομένως, η εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$ είναι $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$

40. *Πότε μια συνάρτηση λέγεται παραγωγίσιμη στο χ_0 και τι ονομάζουμε παράγωγο της f στο x_0 ;*

Απάντηση σελ 213

Μια συνάρτηση f λέμε ότι είναι **παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο** x_0 του πεδίου ορισμού της, αν υπάρχει το

$\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ και είναι πραγματικός αριθμός.

Το όριο αυτό ονομάζεται **παράγωγος της** f **στο** x_0 και συμβολίζεται με $f'(x_0)$. Δηλαδή: $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.

41. *Ποια είναι η γεωμετρική ερμηνεία του παράγωγου αριθμού σε ένα σημείου (χ_0,$f(\chi_0)$) της γραφικής παράστασης μια συνάρτησης*

Απάντηση σελ 214

Ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης μιας παραγωγίσιμης συνάρτησης f στο σημείο *(χ_0,$f(\chi_0)$) είναι η παράγωγος της* συνάρτησης f στο σημείο χ_0

42. *Τι ονονάζουμε κλίση της γραφικής παράστασης μιας παραγωγίσιμης συνάρτησης σε ένα σημείο της $A(\chi_0,f(\chi_0))$*

Απάντηση σελ 214

Την κλίση της εφαπτομένης στο $A(x_0,f(x_0))$ μιας παραγωγίσιμης συνάρτησης θα τη λέμε κλίση της γραφικής παράστασης της f στο Α ή κλίση της f στο *Α*

43. *Πότε μια συνάρτηση f λέγεται παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της ;*

Απάντηση σελ 222

- Έστω f μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού ένα σύνολο *Α*. Θα λέμε ότι:
  Η f είναι παραγωγίσιμη στο *Α* ή, απλά, **παραγωγίσιμη**, όταν είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο $x_0 \in A$.

44. *Πότε μια συνάρτηση f λέγεται παραγωγίσιμη σε ένα ανοικτό διάστημα (α, β)* *του πεδίου ορισμού της **;***

Απάντηση σελ 222

Η f είναι **παραγωγίσιμη σε ένα ανοικτό διάστημα (α, β)** του πεδίου ορισμού της, όταν είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο $x_0 \in (\alpha, \beta)$.

45. *Πότε μια συνάρτηση f λέγεται παραγωγίσιμη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$;*

Απάντηση σελ 222

— Η f είναι **παραγωγίσιμη σε ένα κλειστό διάστημα** $[\alpha,\beta]$ του πεδίου ορισμού της, όταν είναι παραγωγίσιμη στο (α,β) και επιπλέον ισχύει $\lim\limits_{x \to \alpha^+} \frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha} \in R$ και $\lim\limits_{x \to \beta^-} \frac{f(x)-f(\beta)}{x-\beta} \in R$.

46. *Τι είναι η παράγωγος συνάρτηση ;*

Απάντηση σελ 222

Έστω f μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού *Α* και A_1 το σύνολο των σημείων του *Α* στα οποία αυτή είναι παραγωγίσιμη. Αντιστοιχίζοντας κάθε $x \in A_1$ στο $f'(x)$, ορίζουμε τη συνάρτηση

$f' : A_1 \to R$, ωστε : $x \to f'(x)$ η οποία ονομάζεται **παράγωγος της *f***.

47. *Αν δύο μεταβλητά μεγέθη x, y συνδέονται με τη σχέση y=f(x), τι ονομάζουμε ρυθμό μεταβολής του y ως προς το x στο σημείο x_0;*

Απάντηση σελ 241

Αν δύο μεταβλητά μεγέθη x, y συνδέονται με τη σχέση $y = f(x)$, όταν f είναι μια συνάρτηση παραγωγίσιμη στο x_0, τότε ονομάζουμε **ρυθμό μεταβολής του y ως προς το x στο σημείο x_0** την παράγωγο $f'(x_0)$

48. Πως παραγωγίζεται μια σύνθετη συνάρτηση ;

Απάντηση ***σελ 234***

Αν η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και η f είναι παραγωγίσιμη στο $g(x_0)$, τότε η συνάρτηση $f \circ g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει $(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$

49. Να διατυπώσετε το Θεώρημα Rolle

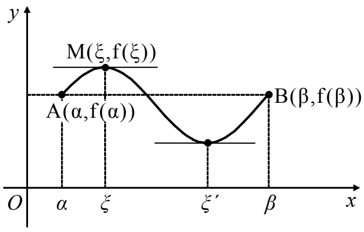
Απάντηση ***σελ 246***

Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$, παραγωγίσιμη στο ανοικτό (α, β) και $f(\alpha) = f(\beta)$ τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε: $f'(\xi) = 0$

50. Να ερμηνεύσετε γεωμετρικά το Θεώρημα Rolle

Απάντηση ***σελ 246***

Το Θ. Rolle γεωμετρικά, σημαίνει ότι υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της C_f στο $M(\xi, f(\xi))$ να είναι παράλληλη στον άξονα των x.



51. Να διατυπώσετε το Θεώρημα Μέσης Τιμής Διαφορικού Λογισμού (Θ.Μ.Τ.)

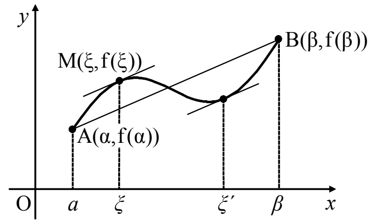
Απάντηση ***σελ 246***

Αν μια συνάρτηση f είναι: συνεχής στο κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (α, β) τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε: $f'(\xi) = \dfrac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}$

52. Να ερμηνεύσετε γεωμετρικά το Θεώρημα Μέσης Τιμής

Απάντηση ***σελ 247***

Γεωμετρικά, το ΘΜΤ σημαίνει ότι υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M(\xi, f(\xi))$ να είναι παράλληλη της ευθείας AB.



53. Τι ονομάζουμε τοπικό μέγιστο και τι τοπικό ελάχιστο της f *;*

Απάντηση ***σελ 258-259***

- Μια συνάρτηση f, με πεδίο ορισμού A, θα λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ τοπικό μέγιστο, όταν υπάρχει $\delta > 0$, τέτοιο ώστε : $f(x) \le f(x_0)$ για κάθε $x \in A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

  Το x_0 λέγεται θέση ή σημείο τοπικού μεγίστου, ενώ το $f(x_0)$ τοπικό μέγιστο της *f*.
- Μία συνάρτηση f, με πεδίο ορισμού A, θα λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ τοπικό ελάχιστο, όταν υπάρχει $\delta > 0$, τέτοιο ώστε : $f(x) \ge f(x_0)$, για κάθε $x \in A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

  Το x_0 λέγεται θέση ή σημείο τοπικού ελαχίστου, ενώ το $f(x_0)$ τοπικό ελάχιστο της *f*.

54. Να διατυπώσετε το Θεώρημα Fermat

Απάντηση ***σελ 260***

Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα διάστημα *Δ* και x_0 ένα **εσωτερικό** σημείο του *Δ*. Αν η f παρουσιάζει **τοπικό ακρότατο** στο x_0 και είναι **παραγωγίσιμη** στο σημείο αυτό, τότε: $f'(x_0) = 0$

55. Ποιες είναι οι πιθανές θέσεις των τοπικών ακροτάτων μιας συνάρτησης f *ορισμένης σε ένα διάστημα Δ;*

Απάντηση ***σελ 261***

Τα εσωτερικά σημεία του *Δ* στα οποία η παράγωγος της f μηδενίζεται.
Τα εσωτερικά σημεία του *Δ* στα οποία η f δεν παραγωγίζεται.
Τα άκρα του *Δ* (αν ανήκουν στο πεδίο ορισμού της).

56. *Ποιες είναι τα κρίσιμα σημεία μιας συνάρτησης* f *ορισμένης σε ένα διάστημα Δ;*

Απάντηση ***σελ 261***

Τα εσωτερικά σημεία του *Δ* στα οποία η f δεν παραγωγίζεται ή η παράγωγός της είναι ίση με το μηδέν, λέγονται κρίσιμα σημεία της f στο διάστημα *Δ*.

57. *Πότε μια συνάρτηση ονομάζεται κυρτή ή κοίλη ;*

Απάντηση ***σελ 273***

Έστω μία συνάρτηση f συνεχής σ' ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ. Θα λέμε ότι:

- Η συνάρτηση f στρέφει τα **κοίλα προς τα άνω** ή είναι **κυρτή** στο Δ, αν η f' είναι γνησίως αύξουσα στο εσωτερικό του Δ.
- Η συνάρτηση f στρέφει τα **κοίλα προς τα κάτω** ή είναι **κοίλη** στο Δ, αν η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο εσωτερικό του Δ.

58. *Τι ονομάζουμε σημείο καμπής της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης ;*

Απάντηση ***σελ 275***

Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α,β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0. Αν η f είναι κυρτή στο (α,x_0) και κοίλη στο (x_0,β), ή αντιστρόφως, και η C_f έχει εφαπτομένη στο σημείο $A(x_0,f(x_0))$, τότε το σημείο $A(x_0,f(x_0))$ ονομάζεται **σημείο καμπής** της γραφικής παράστασης της f.

59. *Πότε η ευθεία* $x=x_o$ *λέγεται κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της* f

Απάντηση ***σελ 279***

Αν ένα τουλάχιστον από τα όρια $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$ είναι $+\infty$ ή $-\infty$, τότε η ευθεία $x=x_0$ λέγεται **κατακόρυφη ασύμπτωτη** της γραφικής παράστασης της *f*.

60. *Πότε η ευθεία* $y=\ell$ *λέγεται οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της* f *στο* $+\infty$ *(αντίστοιχα στο* $-\infty$*)*

Απάντηση ***σελ 280***

Αν $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\ell$ (αντιστοίχως $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\ell$), τότε η ευθεία $y=\ell$ λέγεται **οριζόντια ασύμπτωτη** της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$ (αντιστοίχως στο $-\infty$).

61. *Πότε η ευθεία* $y=\lambda x+\beta$ *λέγεται ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της* f *στο* $+\infty$ *(αντίστοιχα στο* $-\infty$*)*

Απάντηση ***σελ 280***

Η ευθεία $y=\lambda x+\beta$ λέγεται **ασύμπτωτη** της γραφικής παράστασης της f*f* στο $+\infty$, αν $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(\lambda x+\beta)]=0$ και στο $-\infty$ αν $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-(\lambda x+\beta)]=0$.

62. *Να διατυπώσετε τους κανόνες de l'Hospital*

Απάντηση ***σελ 282-283***

- Αν $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=0$, $x_0\in R\cup\{-\infty,\ +\infty\}$ και υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ (πεπερασμένο ή άπειρο), τότε: $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$.
- Αν $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=+\infty$, $x_0\in R\cup\{-\infty,\ +\infty\}$ και υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ (πεπερασμένο ή άπειρο), τότε: $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$.

ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ

63. Έστω f μια ορισμένη συνάρτηση σε ένα διάστημα Δ. τι ονομάζεται αρχική συνάρτηση ή παράγουσα της f στο Δ.

Απάντηση ***σελ 303***

Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα *Δ*. **Αρχική συνάρτηση** ή **παράγουσα της f στο *Δ*[(1)]** ονομάζεται κάθε συνάρτηση *F* που είναι παραγωγίσιμη στο *Δ* και ισχύει $F'(x)=f(x)$, για κάθε $x\in\Delta$.

64. Τι ονομάζουμε ορισμένο ολοκλήρωμα της f στο [α,β] ;

Απάντηση ***σελ 330***

Αν η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ τότε ορίζουμε : $\int_\alpha^\beta f(x)dx=\lim\limits_{\nu\to\infty}\left(\sum\limits_{\kappa=1}^{\nu} f(\xi_\kappa)\Delta x\right)$.

Επίσης ορίζουμε : $\int_\beta^\alpha f(x)dx=-\int_\alpha^\beta f(x)dx$ και $\int_\alpha^\alpha f(x)dx=0$

65. Ποιες είναι οι ιδιότητες του ορισμένου ολοκληρώματος ;

Απάντηση ***σελ 332***

Έστω f,g συνεχείς συναρτήσεις στο $[\alpha,\beta]$ και $\lambda,\mu\in R$. Τότε ισχύουν 1) $\int_\alpha^\beta \lambda f(x)dx=\lambda\int_\alpha^\beta f(x)dx$

2) $\int_\alpha^\beta [f(x)+g(x)]dx=\int_\alpha^\beta f(x)dx+\int_\alpha^\beta g(x)dx$ 3) $\int_\alpha^\beta [\lambda f(x)+\mu g(x)]dx=\lambda\int_\alpha^\beta f(x)dx+\mu\int_\alpha^\beta g(x)dx$

4) Αν η f είναι συνεχής σε διάστημα *Δ* και $\alpha,\beta,\gamma\in\Delta$, τότε ισχύει : $\int_\alpha^\beta f(x)dx=\int_\alpha^\gamma f(x)dx+\int_\gamma^\beta f(x)dx$

5) Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα $[\alpha,\beta]$. Αν $f(x)\ge 0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$ και η συνάρτηση f δεν είναι παντού μηδέν στο διάστημα αυτό, τότε $\int_\alpha^\beta f(x)dx>0$. (ΠΡΟΣΟΧΗ!!! α<β)

66. Ποιος είναι ο τύπος της Ολοκλήρωσης κατά παράγοντες στα ορισμένα ολοκληρώματα;

Απάντηση : ***σελ 336***

$\int_\alpha^\beta f(x)g'(x)dx=[f(x)g(x)]_\alpha^\beta-\int_\alpha^\beta f'(x)g(x)dx$ όπου f',g' είναι συνεχείς συναρτήσεις

67. Ποιος είναι ο τύπος της Ολοκλήρωσης με αντικατάσταση στα ορισμένα ολοκληρώματα;

Απάντηση: ***σελ 337***

Ισχύει : $\int_\alpha^\beta f(g(x))g'(x)dx=\int_{u_1}^{u_2} f(u)du$, όπου f,g' είναι συνεχείς συναρτήσεις, $u=g(x)$, $du=g'(x)dx$ και $u_1=g(\alpha)$, $u_2=g(\beta)$.

Θεωρήματα με αποδείξεις

68. Αν $z_1 = \alpha + \beta i$ και $z_2 = \gamma + \delta i$ με $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in R$ είναι δυο μιγαδικοί αριθμοί, τότε: $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z}_1 + \overline{z}_2$

Απόδειξη ***σελ 91***

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{(\alpha + \beta i) + (\gamma + \delta i)} = \overline{(\alpha + \gamma) + (\beta + \delta) i} = (\alpha + \gamma) - (\beta + \delta) i = (\alpha - \beta i) + (\gamma - \delta i) = \overline{z}_1 + \overline{z}_2 .$$

69. Να αποδείξετε ότι $\dfrac{\alpha + \beta i}{\gamma + \delta i} = \dfrac{\alpha\gamma + \beta\delta}{\gamma^2 + \delta^2} + \dfrac{\beta\gamma - \alpha\delta}{\gamma^2 + \delta^2} i$, όπου $\gamma + \delta i \neq 0$,

Απόδειξη ***σελ 89***

Πολλαπλασιάζουμε τους όρους του κλάσματος με το συζυγή του παρονομαστή και έχουμε:

$\dfrac{\alpha + \beta i}{\gamma + \delta i} = \dfrac{(\alpha + \beta i)(\gamma - \delta i)}{(\gamma + \delta i)(\gamma - \delta i)} = \dfrac{(\alpha\gamma + \beta\delta) + (\beta\gamma - \alpha\delta) i}{\gamma^2 + \delta^2} = \dfrac{\alpha\gamma + \beta\delta}{\gamma^2 + \delta^2} + \dfrac{\beta\gamma - \alpha\delta}{\gamma^2 + \delta^2} i$. Δηλαδή, $\boldsymbol{\dfrac{\alpha + \beta i}{\gamma + \delta i} = \dfrac{\alpha\gamma + \beta\delta}{\gamma^2 + \delta^2} + \dfrac{\beta\gamma - \alpha\delta}{\gamma^2 + \delta^2} i}$.

70. Να αποδείξετε ότι $i^\nu = i^\upsilon$ όπου ν θετικός ακέραιος και υ το υπόλοιπο της ευκλείδειας διαίρεσης του ν με το 4

Απόδειξη ***σελ 90***

Για να υπολογίσουμε συγκεκριμένη δύναμη του i, γράφουμε τον εκθέτη ν στη μορφή $\nu = 4\rho + \upsilon$, όπου ρ το πηλίκο και υ το υπόλοιπο της ευκλείδειας διαίρεσης του ν με το 4, οπότε έχουμε:

$$i^\nu = i^{4\rho+\upsilon} = i^{4\rho} i^\upsilon = (i^4)^\rho i^\upsilon = 1^\rho i^\upsilon = i^\upsilon = \begin{cases} 1 & , \text{ αν } \upsilon = 0 \\ i & , \text{ αν } \upsilon = 1 \\ -1 & , \text{ αν } \upsilon = 2 \\ -i & , \text{ αν } \upsilon = 3 \end{cases}$$

71. Αν z_1, z_2 είναι μιγαδικοί αριθμοί, τότε να αποδείξετε ότι $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$

Απόδειξη ***σελ 98***

Πράγματι, έχουμε: $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2| \Leftrightarrow |z_1 \cdot z_2|^2 = |z_1|^2 \cdot |z_2|^2$

$$\Leftrightarrow (z_1 \cdot z_2)\overline{(z_1 \cdot z_2)} = z_1 \cdot \overline{z}_1 \cdot z_2 \cdot \overline{z}_2 \quad \Leftrightarrow z_1 \cdot z_2 \cdot \overline{z}_1 \cdot \overline{z}_2 = z_1 \cdot \overline{z}_1 \cdot z_2 \cdot \overline{z}_2$$

και, επειδή η τελευταία ισότητα ισχύει, θα ισχύει και η ισοδύναμη αρχική.

72. Να αποδείξετε ότι κάθε εξίσωση δεύτερου βαθμού με πραγματικούς συντελεστές έχει πάντα λύση στο σύνολο C.

Απόδειξη ***σελ 92***

Πράγματι, έστω η εξίσωση $\alpha z^2 + \beta z + \gamma = 0$, με $\alpha, \beta, \gamma \in R$ και $\alpha \neq 0$.

Εργαζόμαστε όπως στην αντίστοιχη περίπτωση στο R και τη μετασχηματίζουμε, με τη μέθοδο συμπλήρωσης τετραγώνων, στη μορφή: $\left(z + \dfrac{\beta}{2\alpha}\right)^2 = \dfrac{\Delta}{4\alpha^2}$, όπου $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$. Έτσι, έχουμε τις εξής περιπτώσεις:

- $\Delta > 0$ Τότε η εξίσωση έχει δύο πραγματικές λύσεις: $z_{1,2} = \dfrac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$
- $\Delta = 0$ Τότε έχει μια διπλή πραγματική λύση: $z = \dfrac{-\beta}{2\alpha}$
- $\Delta < 0$ Τότε επειδή $\dfrac{\Delta}{4\alpha^2} = \dfrac{(-1)(-\Delta)}{4\alpha^2} = \dfrac{i^2(\sqrt{-\Delta})^2}{(2\alpha)^2} = \left(\dfrac{i\sqrt{-\Delta}}{2\alpha}\right)^2$, η εξίσωση γράφεται: $\left(z + \dfrac{\beta}{2\alpha}\right)^2 = \left(\dfrac{i\sqrt{-\Delta}}{2\alpha}\right)^2$.

Άρα οι λύσεις της είναι: $z_{1,2} = \dfrac{-\beta \pm i\sqrt{-\Delta}}{2\alpha}$, (1) οι οποίες είναι συζυγείς μιγαδικοί αριθμοί.

73. Αν $P(x)$ είναι πολυώνυμο τότε να αποδείξετε ότι ότι : $\lim\limits_{x \to x_0} P(x) = P(x_0)$

Απόδειξη ***σελ 167***

Έστω το πολυώνυμο $P(x) = \alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1} x^{\nu-1} + \cdots + \alpha_1 x + \alpha_0$ και $x_0 \in R$.

Σύμφωνα με τις ιδιότητες των ορίων έχουμε:

$$\lim_{x \to x_0} P(x) = \lim_{x \to x_0} (\alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1} x^{\nu-1} + \cdots + \alpha_0) = \lim_{x \to x_0} (\alpha_\nu x^\nu) + \lim_{x \to x_0} (\alpha_{\nu-1} x^{\nu-1}) + \cdots + \lim_{x \to x_0} \alpha_0$$

$$= \alpha_\nu \lim_{x \to x_0} x^\nu + \alpha_{\nu-1} \lim_{x \to x_0} x^{\nu-1} + \cdots + \lim_{x \to x_0} \alpha_0 = \alpha_\nu x_0^\nu + \alpha_{\nu-1} x_0^{\nu-1} + \cdots + \alpha_0 = P(x_0) .$$

74. Αν $P(x)$ και $Q(x)$ είναι πολυώνυμα τότε να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{P(x_0)}{Q(x_0)}$, εφόσον $Q(x_0)\neq 0$

Απόδειξη ***σελ 167***

Έστω η ρητή συνάρτηση $f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$, όπου $P(x)$, $Q(x)$ πολυώνυμα του x και $x_0\in R$ με $Q(x_0)\neq 0$. Τότε,

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\lim_{x\to x_0}\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to x_0}P(x)}{\lim\limits_{x\to x_0}Q(x)}=\frac{P(x_0)}{Q(x_0)}.$$

75. Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to 0}\left(x\eta\mu\frac{1}{x}\right)=0$;

Απόδειξη ***σελ 170***

για $x\neq 0$ έχουμε $\left|x\eta\mu\frac{1}{x}\right|=|x|\cdot\left|\eta\mu\frac{1}{x}\right|\leq|x|$, οπότε $-|x|\leq x\eta\mu\frac{1}{x}\leq|x|$.

Επειδή $\lim\limits_{x\to 0}(-|x|)=\lim\limits_{x\to 0}|x|=0$, σύμφωνα με το κριτήριο παρεμβολής έχουμε: $\lim\limits_{x\to 0}\left(x\eta\mu\frac{1}{x}\right)=0$.

76. Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\eta\mu 3x}{x}=3$

Απόδειξη ***σελ 173-174***

Είναι $\frac{\eta\mu 3x}{x}=3\frac{\eta\mu 3x}{3x}$.

Έτσι, αν θέσουμε $u=3x$, τότε $\lim\limits_{x\to 0}u=\lim\limits_{x\to 0}3x=0$, οπότε $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\eta\mu 3x}{x}=3\lim\limits_{x\to 0}\frac{\eta\mu 3x}{3x}=3\lim\limits_{u\to 0}\frac{\eta\mu u}{u}=3\cdot 1=3$.

77. Έστω μια συνάρτηση *f*, η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$. Αν: η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και $f(\alpha)\neq f(\beta)$ δείξετε ότι, για κάθε αριθμό η μεταξύ των $f(\alpha)$ και $f(\beta)$ υπάρχει ένας, τουλάχιστον $x_0\in(\alpha,\beta)$, ώστε $f(x_0)=\eta$

Απόδειξη ***σελ 194***

Ας υποθέσουμε ότι $f(\alpha)<f(\beta)$. Τότε θα ισχύει $f(\alpha)<\eta<f(\beta)$. Αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση $g(x)=f(x)-\eta$, $x\in[\alpha,\beta]$, παρατηρούμε ότι:

- η *g* είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και
- $g(\alpha)g(\beta)<0$, αφού $g(\alpha)=f(\alpha)-\eta<0$ και $g(\beta)=f(\beta)-\eta>0$.

Επομένως, σύμφωνα με το θ. Bolzano, υπάρχει $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε $g(x_0)=f(x_0)-\eta=0$, οπότε $f(x_0)=\eta$.

78. Να αποδείξετε ότι αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο x_0, τότε είναι και συνεχής σ΄αυτό.

Απόδειξη ***σελ 217***

Για $x\neq x_0$ έχουμε $f(x)-f(x_0)=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot(x-x_0)$,

Οπότε $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)-f(x_0)]=\lim\limits_{x\to x_0}\left[\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot(x-x_0)\right]=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot\lim\limits_{x\to x_0}(x-x_0)=f'(x_0)\cdot 0=0$,

αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0. Αρα , $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$, δηλαδή η f είναι συνεχής στο x_0.

79. Εστω η σταθερή συνάρτηση $f(x)=c$, $c\in R$. Δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο R και ισχύει $f'(x)=0$, δηλαδή (c)΄= 0

Απόδειξη ***σελ 223***

Πράγματι, αν x_0 είναι ένα σημείο του R, τότε για $x\neq x_0$ ισχύει: $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{c-c}{x-x_0}=0$. Επομένως,

$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=0$, δηλαδή $(c)'=0$

80. Έστω η συνάρτηση $f(x)=x$. Δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο R και ισχύει $f'(x)=1$, δηλαδή (x)΄=1 .

Απόδειξη ***σελ 223***

Πράγματι, αν x_0 είναι ένα σημείο του R, τότε για $x \neq x_0$ ισχύει: $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{x-x_0}{x-x_0}=1$. Επομένως,

$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0}1=1$, δηλαδή $(x)'=1$.

81. Έστω η συνάρτηση $f(x)=x^{\nu}$, $\nu\in N-\{0,\ 1\}$. Δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο R και ισχύει $f'(x)=\nu x^{\nu-1}$, δηλαδή $(x^{\nu})'=\nu x^{\nu-1}$

Απόδειξη *σελ 224*

Πράγματι, αν x_0 είναι ένα σημείο του R, τότε για $x \neq x_0$ ισχύει:

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{x^{\nu}-x_0^{\nu}}{x-x_0}=\frac{(x-x_0)(x^{\nu-1}+x^{\nu-2}x_0+\cdots+x_0^{\nu-1})}{x-x_0}=x^{\nu-1}+x^{\nu-2}x_0+\cdots+x_0^{\nu-1},$$ οπότε:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}(x^{\nu-1}+x^{\nu-2}x_0+\cdots+x_0^{\nu-1})=x_0^{\nu-1}+x_0^{\nu-1}+\cdots+x_0^{\nu-1}=\nu x_0^{\nu-1},$$ δηλαδή $(x^{\nu})'=\nu x^{\nu-1}$.

82. Έστω $f(x)=\sqrt{x}$. Δείξετε ότι για κάθε $x\in(0,+\infty)$ ισχύει $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$

Απόδειξη *σελ 224*

Πράγματι, αν x_0 είναι ένα σημείο του $(0,+\infty)$, τότε για $x\neq x_0$ ισχύει:

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x_0}}{x-x_0}=\frac{\left(\sqrt{x}-\sqrt{x_0}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{x_0}\right)}{(x-x_0)\left(\sqrt{x}+\sqrt{x_0}\right)}=\frac{x-x_0}{(x-x_0)\left(\sqrt{x}+\sqrt{x_0}\right)}=\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}},$$

Οπότε $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}}=\frac{1}{2\sqrt{x_0}}$, δηλαδή $\left(\sqrt{x}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$.

83. Αν οι συναρτήσεις f,g είναι παραγωγίσιμες στο x_0, τότε η συνάρτηση $f+g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει: $(f+g)'(x_0)=f'(x_0)+g'(x_0)$

Απόδειξη *σελ 229*

Για $x\neq x_0$, ισχύει: $\frac{(f+g)(x)-(f+g)(x_0)}{x-x_0}=\frac{f(x)+g(x)-f(x_0)-g(x_0)}{x-x_0}=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}+\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}$.

Επειδή οι συναρτήσεις f,g είναι παραγωγίσιμες στο x_0, έχουμε:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{(f+g)(x)-(f+g)(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}+\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)+g'(x_0),$$

Δηλαδή : $(f+g)'(x_0)=f'(x_0)+g'(x_0)$.

84. Να αποδείξετε ότι για τρείς παραγωγίσιμες συναρτήσεις ισχύει ότι:
$\left(f(x)g(x)h(x)\right)'=f'(x)g(x)h(x)+f(x)g'(x)h(x)+f(x)g(x)h'(x)$

Απόδειξη *σελ 230*

Έχουμε: $\left(f(x)g(x)h(x)\right)'=\left(\left[f(x)g(x)\right]h(x)\right)'=\left[f(x)g(x)\right]'h(x)+\left[f(x)g(x)\right]h'(x)=$

$\left[f'(x)g(x)+f(x)g'(x)\right]h(x)+f(x)g(x)h'(x)=f'(x)g(x)h(x)+f(x)g'(x)h(x)+f(x)g(x)h'(x)$

85. Έστω η συνάρτηση $f(x)=x^{-\nu}$, $\nu\in N^*$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο R* και ισχύει $f'(x)=-\nu x^{-\nu-1}$, δηλαδή $(x^{-\nu})'=-\nu x^{-\nu-1}$

Απόδειξη *σελ 231-232*

Πράγματι, για κάθε $x\in R^*$ έχουμε: $(x^{-\nu})'=\left(\frac{1}{x^{\nu}}\right)'=\frac{(1)'x^{\nu}-1(x^{\nu})'}{(x^{\nu})^2}=\frac{-\nu x^{\nu-1}}{x^{2\nu}}=-\nu x^{-\nu-1}$.

Είδαμε, όμως, πιο πριν ότι $(x^{\nu})'=\nu x^{\nu-1}$ για κάθε φυσικό $\nu>1$. Επομένως, αν $\kappa\in N-\{0,1\}$, τότε: $\boldsymbol{(x^{\kappa})'=\kappa x^{\kappa-1}}$.

86. Έστω η συνάρτηση $f(x)=\text{εφ}x$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $D_f=R-\{x \mid \text{συν}x=0\}$ και ισχύει $f'(x)=\frac{1}{\text{συν}^2x}$, δηλαδή : $(\text{εφ}x)'=\frac{1}{\text{συν}^2x}$

Απόδειξη *σελ 232*

$$(\text{εφ}x)'=\left(\frac{\text{ημ}x}{\text{συν}x}\right)'=\frac{(\text{ημ}x)'\text{συν}x-\text{ημ}x(\text{συν}x)'}{\text{συν}^2x}=\frac{\text{συν}x\text{συν}x+\text{ημ}x\text{ημ}x}{\text{συν}^2x}=\frac{\text{συν}^2x+\text{ημ}^2x}{\text{συν}^2x}=\frac{1}{\text{συν}^2x}.$$

87. Η συνάρτηση $f(x)=x^{\alpha}$, $\alpha\in R-Z$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ και ισχύει $f'(x)=\alpha x^{\alpha-1}$, δηλαδή $(x^{\alpha})'=\alpha x^{\alpha-1}$ (1)

Απόδειξη *σελ 234*

Πράγματι, αν $y=x^{\alpha}=e^{\alpha\ln x}$ και θέσουμε $u=\alpha\ln x$, τότε έχουμε $y=e^{u}$. Επομένως,

$$y'=(e^{u})'=e^{u}\cdot u'=e^{\alpha\ln x}\cdot\alpha\cdot\frac{1}{x}=x^{\alpha}\cdot\frac{\alpha}{x}=\alpha x^{\alpha-1}.$$

88. Η συνάρτηση $f(x)=\alpha^{x}$, $\alpha>0$ είναι παραγωγίσιμη στο R και ισχύει $f'(x)=\alpha^{x}\ln\alpha$, δηλαδή : $(\alpha^{x})'=\alpha^{x}\ln\alpha$

Απόδειξη *σελ 234*

Πράγματι, αν $y=\alpha^{x}=e^{x\ln\alpha}$ και θέσουμε $u=x\ln\alpha$, τότε έχουμε $y=e^{u}$. Επομένως,

$$y'=(e^{u})'=e^{u}\cdot u'=e^{x\ln\alpha}\cdot\ln\alpha=\alpha^{x}\ln\alpha.$$

89. Η συνάρτηση $f(x)=\ln|x|$, $x\in R^{*}$ είναι παραγωγίσιμη στο R^{*} και ισχύει $(\ln|x|)'=\frac{1}{x}$

Απόδειξη *σελ 235*

Πράγματι : αν $x>0$, τότε $(\ln|x|)'=(\ln x)'=\frac{1}{x}$, ενώ αν $x<0$, τότε :

$\ln|x|=\ln(-x)$, οπότε, αν θέσουμε $y=\ln(-x)$ και $u=-x$, έχουμε $y=\ln u$. Επομένως,

$$y'=(\ln u)'=\frac{1}{u}\cdot u'=\frac{1}{-x}(-1)=\frac{1}{x} \quad \text{και άρα} \quad (\ln|x|)'=\frac{1}{x}.$$

90. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα *Δ*. Αν η f είναι συνεχής στο *Δ* και $f'(x)=0$ για κάθε *εσωτερικό* σημείο *x* του *Δ*, τότε η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα *Δ*.

Απόδειξη *σελ 251*

Αρκεί να αποδείξουμε ότι για οποιαδήποτε $x_1,x_2\in\Delta$ ισχύει $f(x_1)=f(x_2)$. Πράγματι

- Αν $x_1=x_2$, τότε προφανώς $f(x_1)=f(x_2)$.
- Αν $x_1<x_2$, τότε στο διάστημα $[x_1,x_2]$ η f ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής. Επομένως, υπάρχει $\xi\in(x_1,x_2)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi)=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$ (1) Επειδή το ξ είναι εσωτερικό σημείο του *Δ*, ισχύει $f'(\xi)=0$, οπότε , λόγω της (1), είναι $f(x_1)=f(x_2)$. Αν $x_2<x_1$, τότε ομοίως αποδεικνύεται ότι $f(x_1)=f(x_2)$. Σε όλες, λοιπόν, τις περιπτώσεις είναι $f(x_1)=f(x_2)$.

91. Έστω δυο συναρτήσεις f,g ορισμένες σε ένα διάστημα *Δ*. Αν οι f,g είναι συνεχείς στο *Δ* και $f'(x)=g'(x)$ για κάθε *εσωτερικό* σημείο *x* του *Δ*, τότε υπάρχει σταθερά *c* τέτοια, ώστε για κάθε $x\in\Delta$ να ισχύει: $f(x)=g(x)+c$

Απόδειξη *σελ 251*

Η συνάρτηση $f-g$ είναι συνεχής στο *Δ* και για κάθε εσωτερικό σημείο $x\in\Delta$ ισχύει $(f-g)'(x)=f'(x)-g'(x)=0$. Επομένως, σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα, η συνάρτηση $f-g$ είναι σταθερή στο *Δ*. Άρα, υπάρχει σταθερά *C* τέτοια, ώστε για κάθε $x\in\Delta$ να ισχύει $f(x)-g(x)=c$, οπότε $f(x)=g(x)+c$.

92. Έστω μια συνάρτηση *f*, η οποία είναι *συνεχής* σε ένα διάστημα *Δ*.
Αν $f'(x)>0$ σε κάθε *εσωτερικό* σημείο *x* του *Δ*, τότε η f είναι γν. αύξουσα σε όλο το *Δ*.
Αν $f'(x)<0$ σε κάθε *εσωτερικό* σημείο *x* του *Δ*, τότε η f είναι γν. φθίνουσα σε όλο το *Δ*.

Απόδειξη *σελ 253*

- Αποδεικνύουμε το θεώρημα στην περίπτωση που είναι $f'(x)>0$.

Έστω $x_1,x_2\in\Delta$ με $x_1<x_2$. Θα δείξουμε ότι $f(x_1)<f(x_2)$. Πράγματι, στο διάστημα $[x_1,x_2]$ η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. Επομένως, υπάρχει $\xi\in(x_1,x_2)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi)=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$, οπότε έχουμε

$f(x_2)-f(x_1)=f'(\xi)(x_2-x_1)$

Επειδή $f'(\xi)>0$ και $x_2-x_1>0$, έχουμε $f(x_2)-f(x_1)>0$, οπότε $f(x_1)<f(x_2)$.

- Στην περίπτωση που είναι $f'(x)<0$ εργαζόμαστε αναλόγως.

93. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα διάστημα *Δ* και x_0 εσωτερικό σημείο του *Δ*. Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 και είναι παραγωγίσιμη σ΄ αυτό, τότε: $f'(x_0)=0$

Απόδειξη ***σελ 260-261***

Ας υποθέσουμε ότι η f παρουσιάζει στο x_0 τοπικό μέγιστο. Επειδή το x_0 είναι εσωτερικό σημείο του *Δ* και η f παρουσιάζει σ' αυτό τοπικό μέγιστο, υπάρχει $\delta>0$ τέτοιο, ώστε $(x_0-\delta,x_0+\delta)\subseteq\Delta$ και $f(x)\le f(x_0)$, για κάθε $x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$. (1)

Επειδή, επιπλέον, η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0, ισχύει $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0^-}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$. Επομένως,

— αν $x\in(x_0-\delta,x_0)$, τότε, λόγω της (1), θα είναι $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\ge 0$, οπότε θα έχουμε $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0^-}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\ge 0$ (2)

— αν $x\in(x_0,x_0+\delta)$, τότε, λόγω της (1), θα είναι $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\le 0$, οπότε θα έχουμε

$f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\le 0$. (3) Έτσι, από τις (2) και (3) έχουμε $f'(x_0)=0$.

Η απόδειξη για τοπικό ελάχιστο είναι ανάλογη.

94. Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α,β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0, στο οποίο όμως η f είναι συνεχής.
Αν $f'(x)>0$ στο (α,x_0) και $f'(x)<0$ στο (x_0,β), τότε το $f(x_0)$ είναι τοπικό μέγιστο της f.

Απόδειξη ***σελ 262 - 263***

Επειδή $f'(x)>0$ για κάθε $x\in(\alpha,x_0)$ και η f είναι συνεχής στο x_0, η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(\alpha,x_0]$. Έτσι έχουμε $f(x)\le f(x_0)$, για κάθε $x\in(\alpha,x_0]$. (1)

Επειδή $f'(x)<0$ για κάθε $x\in(x_0,\beta)$ και η f είναι συνεχής στο x_0, η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[x_0,\beta)$. Έτσι έχουμε: $f(x)\le f(x_0)$, για κάθε $x\in[x_0,\beta)$. (2)

Επομένως, λόγω των (1) και (2), ισχύει: $f(x)\le f(x_0)$, για κάθε $x\in(\alpha,\beta)$, που σημαίνει ότι το $f(x_0)$ είναι μέγιστο της f στο (α,β) και άρα τοπικό μέγιστο αυτής.

95. Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α,β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0, στο οποίο όμως η f είναι συνεχής.
Αν $f'(x)<0$ στο (α,x_0) και $f'(x)>0$ στο (x_0,β), τότε το $f(x_0)$ είναι τοπικό ελάχιστο της *f*.

Απόδειξη ***σελ 262 - 263***

Εργαζόμαστε αναλόγως (με το προηγούμενο ερώτημα 94)

96. Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α,β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0, στο οποίο όμως η f είναι συνεχής.
Αν η $f'(x)$ διατηρεί πρόσημο στο $(\alpha,x_0)\cup(x_0,\beta)$, τότε το $f(x_0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο και η f είναι γνησίως μονότονη στο (α,β)

Απόδειξη ***σελ 262 - 263***

Έστω ότι $f'(x)>0$, για κάθε $x\in(\alpha,x_0)\cup(x_0,\beta)$.

Επειδή η f είναι συνεχής στο x_0 θα είναι γνησίως αύξουσα σε κάθε ένα από τα διαστήματα $(\alpha, x_0]$ και $[x_0, \beta)$. Επομένως, για $x_1 < x_0 < x_2$ ισχύει $f(x_1) < f(x_0) < f(x_2)$. Άρα το $f(x_0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο της f. Θα δείξουμε, τώρα, ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο (α, β). Πράγματι, έστω $x_1, x_2 \in (\alpha, \beta)$ με $x_1 < x_2$.

— Αν $x_1, x_2 \in (\alpha, x_0]$, επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(\alpha, x_0]$, θα ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$.

— Αν $x_1, x_2 \in [x_0, \beta)$, επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[x_0, \beta)$, θα ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$.

— Τέλος, αν $x_1 < x_0 < x_2$, τότε όπως είδαμε $f(x_1) < f(x_0) < f(x_2)$.

Επομένως, σε όλες τις περιπτώσεις ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο (α, β).

Ομοίως, αν $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$. ■

97. Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα *Δ*. Αν *F* είναι μια παράγουσα της f στο *Δ*, τότε:

Α) όλες οι συναρτήσεις της μορφής $G(x) = F(x) + c$, $c \in \mathbf{R}$, είναι παράγουσες της f στο *Δ* και

Β) κάθε άλλη παράγουσα G της f στο *Δ* παίρνει τη μορφή $G(x) = F(x) + c$, $c \in \mathbf{R}$.

Απόδειξη ***σελ 304***

Α) κάθε συνάρτηση της μορφής $G(x) = F(x) + c$, όπου $c \in$ R, είναι μια παράγουσα της f στο *Δ*, αφού $G'(x) = (F(x) + c)' = F'(x) = f(x)$, για κάθε $x \in \Delta$.

Β) Έστω *G* είναι μια άλλη παράγουσα της f στο *Δ*. Τότε για κάθε $x \in \Delta$ ισχύουν $F'(x) = f(x)$ και $G'(x) = f(x)$, οπότε $G'(x) = F'(x)$, για κάθε $x \in \Delta$.

Άρα, σύμφωνα με το πόρισμα της § 2.6, υπάρχει σταθερά *c* τέτοια, ώστε $G(x) = F(x) + c$, για κάθε $x \in \Delta$.

98. Αν f είναι μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα *Δ* και *α* είναι ένα σημείο του *Δ*, τότε η συνάρτηση $F(x) = \int_\alpha^x f(t)dt$, $x \in \Delta$, είναι μια παράγουσα της f στο *Δ*. Δηλαδή ισχύει: $\left(\int_\alpha^x f(t)dt\right)' = f(x)$, για κάθε $x \in \Delta$.

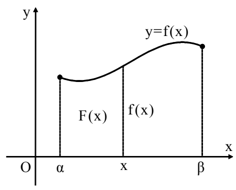
σελ 334

Εποπτικά το συμπέρασμα του παραπάνω θεωρήματος προκύπτει ως εξής:

$F(x+h) - F(x) = \int_x^{x+h} f(t)dt$ = Εμβαδόν του χωρίου *Ω*.

$\approx f(x) \cdot h$, για μικρά $h > 0$. Άρα, για μικρά $h > 0$ είναι

$\dfrac{F(x+h) - F(x)}{h} \approx f(x)$, οπότε $F'(x) = \lim_{h \to 0} \dfrac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(x)$



99. Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σ' ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$. Αν *G* είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha, \beta]$, τότε $\int_\alpha^\beta f(t)dt = G(\beta) - G(\alpha)$

Απόδειξη ***σελ 334-335***

Σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα, η συνάρτηση $F(x) = \int_\alpha^x f(t)dt$ είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha, \beta]$.

Επειδή και η *G* είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha, \beta]$, θα υπάρχει $c \in$ R τέτοιο, ώστε : $G(x) = F(x) + c$ (1)

Από την (1), για $x = \alpha$, έχουμε $G(\alpha) = F(\alpha) + c = \int_\alpha^\alpha f(t)dt + c = c$, οπότε $c = G(\alpha)$.

Επομένως, $G(x) = F(x) + G(\alpha)$,

οπότε, για $x = \beta$, έχουμε $G(\beta) = F(\beta) + G(\alpha) = \int_\alpha^\beta f(t)dt + G(\alpha)$

και άρα $\int_\alpha^\beta f(t)dt = G(\beta) - G(\alpha)$