

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ' ΤΑΞΗΣ
1^ο ΗΜΕΡΗΣΙΟ ΓΕΝΙΚΟ ΛΥΚΕΙΟ ΓΙΑΝΝΙΤΣΩΝ
ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ
ΤΡΙΤΗ, 19 ΑΠΡΙΛΙΟΥ 2016

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ΚΑΙ ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ ΚΑΙ
ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ 1^ο

A. Να αποδείξετε ότι: αν μια συνάρτηση f ορισμένη σε διάστημα Δ είναι συνεχής στο Δ και $f'(x)=0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , τότε η f θα είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ .

(Μονάδες 11)

B. Να αναφέρετε ποια σημεία ονομάζονται κρίσιμα για μια συνάρτηση f ορισμένη σε διάστημα Δ .

(Μονάδες 4)

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα, το οποίο αντιστοιχεί στην κάθε πρόταση.

α. Αν $0 < f(x) < 10$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε η f δεν έχει ακρότατα.

β. Αν σε περιοχή του x_0 ισχύει ότι $h(x) < f(x) < g(x)$ και $\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l$ τότε αναγκαστικά θα ισχύει ότι $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$.

γ. Η εικόνα ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς συνάρτησης f είναι διάστημα.

δ. Αν f συνεχής στο $[a, \beta]$ και η f δεν έχει ρίζα στο $[a, \beta]$ τότε $f(a) f(\beta) > 0$.

ε. Αν f, g συνεχείς στο \mathbb{R} με $f(x) \geq g(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f \neq g$ τότε

$$\int_2^3 f(x) dx > \int_2^3 g(x) dx.$$

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 2^ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x \ln x$ $D_f = (0, +\infty)$,

i) να αποδείξετε ότι η f είναι κυρτή

ii) να βρεθεί η εξίσωση εφαπτομένης της C_f στο σημείο $A(1, 0)$

iii) να δείξετε ότι $\ln x \geq 1 - \frac{1}{x}$ για κάθε $x > 0$

- iv) αν $αβγ=1$ να δείξετε ότι $\frac{1}{α} + \frac{1}{β} + \frac{1}{γ} \geq 3$ με $α, β, γ$ να ανήκουν στο πεδίο ορισμού της f .
- v) να δείξετε ότι $x e^{\frac{2016}{x}} > e, x > 0$.

(Μονάδες 25)

ΘΕΜΑ 3^ο

Έστω συνάρτηση

$$f(x) = \frac{\eta\mu x}{x-1}, \quad x \neq 1.$$

- i) Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα στο σύνολο $\Delta_1 = [0, 1) \cup (1, \pi]$ και να βρεθεί το σύνολο τιμών $f(\Delta_1)$.
- ii) Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (0, \pi)$ τέτοιο ώστε

$$f(\xi) = 1 + \frac{\sigma\upsilon\nu\xi}{\xi-3}$$

- iii) Να βρεθεί η ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$
- iv) Αποδείξτε ότι

$$\int_2^3 \frac{\eta\mu x}{x-1} dx < \ln 2$$

(Μονάδες 7-6-6-6)

ΘΕΜΑ 4^ο

Για τη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει $f(x)f''(x) > (f'(x))^2$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και είναι $f(0)=2$ και $f'(0)=1$.

- i) Να δείξετε ότι $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και η f είναι κυρτή στο \mathbb{R} .

- ii) Να δείξετε ότι

$$f(x) \geq x+2$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

- iii) Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = \ln(f(x))$, $x \in \mathbb{R}$ είναι κυρτή και $f(x) \geq 2e^{x/2}$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

- v) Να βρεθούν οι $α, β \in \mathbb{R}$ ώστε

$$f(α)f(2-β) = 4 \cdot e^{1 + \frac{α-β}{2}}.$$

- vi) Αν $x, y, z \in \mathbb{R}$ και $x+y+z=0$, να δείξετε ότι $f(x)f(y)f(z) \geq 8$.

- vii) Να δείξετε ότι

$$\int_{\sqrt{2m}}^{\sqrt{2n}} f(x^2) f(2 \ln x) dx > 4(e^n - e^m)$$

για κάθε $n, m > 0$ με $m < n$.

(Μονάδες 5+4+4+4+4+4)

ΟΙ ΟΔΗΓΙΕΣ ΠΟΥ ΔΙΝΟΝΤΑΙ ΓΙΑ ΤΟΥΣ ΥΠΟΨΗΦΙΟΥΣ ΕΙΝΑΙ:

- 1) ΣΤΟ ΤΕΤΡΑΔΙΟ ΓΡΑΦΟΝΤΑΙ ΜΟΝΟ ΗΜ/ΝΙΑ, ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ, ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ. ΝΑ ΜΗΝ ΑΝΤΙΓΡΑΨΕΤΕ ΤΑ ΘΕΜΑΤΑ ΣΤΟ ΤΕΤΡΑΔΙΟ.
- 2) ΝΑ ΓΡΑΨΕΤΕ ΤΟ ΟΝ/ΜΟ ΣΑΣ ΣΤΟ ΠΑΝΩ ΜΕΡΟΣ ΤΩΝ ΦΩΤΟΤΥΠΙΩΝ ΠΟΥ ΣΑΣ ΔΟΘΗΚΑΝ. ΝΑ ΜΗ ΣΗΜΕΙΩΘΕΙ ΤΙΠΟΤΕ ΑΛΛΟ.
- 3) ΝΑ ΑΠΑΝΤΗΣΕΤΕ ΣΤΟ ΤΕΤΡΑΔΙΟ ΣΕ ΟΛΑ ΤΑ ΘΕΜΑΤΑ
- 4) ΝΑ ΧΡΗΣΙΜΟΠΟΙΗΤΕ ΜΑΥΡΟ Η' ΜΠΛΕ ΣΤΥΛΟ. ΜΟΛΥΒΙ ΜΠΟΡΕΙΤΕ ΝΑ ΧΡΗΣΙΜΟΠΟΙΗΤΕ ΓΙΑ ΣΧΕΔΙΑ, ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ ΚΑΙ ΠΙΝΑΚΕΣ
- 5) ΚΑΘΕ ΑΠΑΝΤΗΣΗ ΕΠΙΣΤΗΜΟΝΙΚΑ ΤΕΚΜΗΡΙΩΜΕΝΗ ΕΙΝΑΙ ΑΠΟΔΕΚΤΗ
- 6) ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΕΞΕΤΑΣΗΣ 3 ΩΡΕΣ ΜΕΤΑ ΤΗ ΔΙΑΝΟΜΗ ΤΩΝ ΦΩΤΟΑΝΤΙΓΡΑΦΩΝ
- 7) ΧΡΟΝΟΣ ΔΥΝΑΤΗΣ ΑΠΟΧΩΡΗΣΗΣ 1:30' ΜΕΤΑ ΤΗ ΔΙΑΝΟΜΗ ΤΩΝ ΦΩΤΟΑΝΤΙΓΡΑΦΩΝ