

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ' ΤΑΞΗΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΘΕΜΑΤΩΝ 4
ΠΑΡΑΣΚΕΥΗ, 22 ΑΠΡΙΛΙΟΥ 2016
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ΚΑΙ
ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ ΚΑΙ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΕΞΙ (6)

ΘΕΜΑ 1^ο

A1. Πότε λέμε ότι μία συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[α, β]$;

(Μονάδες 4)

A2. Τι ονομάζουμε κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μίας συνάρτησης f ;

(Μονάδες 4)

A3. Έστω μία συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα $(α, β)$, με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0 , στο οποίο όμως η f είναι συνεχής. Αν $f'(x) > 0$ στο $(α, x_0)$ και $f'(x) < 0$ στο $(x_0, β)$, τότε να αποδείξετε ότι το $f(x_0)$ είναι τοπικό μέγιστο της f .

(Μονάδες 7)

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

ΤΕΛΟΣ 1ΗΣ ΑΠΟ 6 ΣΕΛΙΔΕΣ

ΑΡΧΗ 2ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ– Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

α. Αν $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in [a, \beta]$, τότε ισχύει πάντοτε

$$\int_a^\beta f(x) dx \neq 0.$$

β. Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα (a, β) , τότε το σύνολο τιμών της στο διάστημα αυτό είναι το διάστημα (A, B) , όπου:

$$A = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \text{ και } B = \lim_{x \rightarrow \beta^-} f(x).$$

γ. Αν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > 0$, τότε $f(x) > 0$ «κοντά» στο x_0 .

δ. Αν μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ έχει συνεχή πρώτη παράγωγο και $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε η f είναι γνησίως μονότονη στο \mathbb{R} .

ε. Έστω συνάρτηση f η οποία είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ . Στα εσωτερικά σημεία του Δ όπου η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο, η γραφική παράσταση C_f της f έχει οριζόντια εφαπτομένη.

(Μονάδες 5x2=10)

ΘΕΜΑ 2^ο

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση f με:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x + \kappa\eta\mu x}{x - x^2}, & \text{αν } x < 0 \\ \lambda, & x = 0 \\ \sqrt{8x^2 + x + 16} - 3x, & \text{αν } x > 0 \end{cases}$$

ΤΕΛΟΣ 2ΗΣ ΑΠΟ 6 ΣΕΛΙΔΕΣ

ΑΡΧΗ 3ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ– Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

B1. Να δείξετε ότι $\kappa = 2$ και $\lambda = 4$.

(Μονάδες 8)

B2. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

(Μονάδες 5)

B3. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

(Μονάδες 5)

B4. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 2\ln(8x+1)$ έχει μία, τουλάχιστον, ρίζα στο διάστημα $(0, 1)$.

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 3^ο

Έστω μία συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη η οποία ικανοποιεί τις επόμενες συνθήκες:

$$f(1) = 0$$

$$f'(1) = 1$$

$$2f(x) + 4xf'(x) + x^2f''(x) = 2\ln x + 3, \text{ για κάθε } x > 0$$

Δίνεται επίσης η συνάρτηση:

$$g(x) = 2xf'(x) + x^2f''(x) - x(2\ln x + 1), \text{ } x > 0$$

Γ1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g είναι σταθερή στο $(0, +\infty)$.

(Μονάδες 5)

Γ2. Να αποδείξετε ότι $f(x) = \ln x, x > 0$

(Μονάδες 5)

ΑΡΧΗ 4ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ– Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

Γ3. i. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης C_f της f που διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

(Μονάδες 4)

ii. Αν ένα σημείο $M(x(t), y(t))$, όπου t ο χρόνος σε sec και $x(t) > 1$, κινείται πάνω στην καμπύλη της γραφικής παράστασης C_{fof} της fof με σταθερό ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης του και ίσο με 1 cm/sec , να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης του σημείου M τη χρονική στιγμή t_0 , κατά την οποία $x(t_0) = 2 \text{ cm}$.

(Μονάδες 6)

Γ4. Να αποδείξετε ότι:

$$f\left(\frac{a+\beta}{2}\right) < \sqrt{f(a) \cdot f(\beta)}$$

για κάθε $a, \beta \in \left(0, \frac{1}{e}\right]$ με $a < \beta$.

(Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ 4^ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^5 + x^3 + x$, $x \in \mathbb{R}$

Δ1. i) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι αντιστρέψιμη.

(Μονάδες 3)

ii) Να αποδείξετε ότι :

$$e^{5x} + e^{3x+2} + e^{x+4} \geq e^5 \cdot x(x^4 + x^2 + 1), \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

(Μονάδες 4)

ΤΕΛΟΣ 4ΗΣ ΑΠΟ 6 ΣΕΛΙΔΕΣ

ΑΡΧΗ 5ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ– Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

Δ2. i) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=1$ έχει μοναδική ρίζα $x_0 \in (0,1)$.

(Μονάδες 4)

ii) Να λύσετε την ανίσωση:

$$2x^6 + 3x^4 + 6x^2 - 12x \geq 2x_0^6 + 3x_0^4 + 6x_0^2 - 12x_0$$

(Μονάδες 4)

Δ3. Να αποδείξετε ότι:

$$3 < \frac{\int_{\xi_1+1}^{\xi_2+1} f(t)dt}{\xi_2 - \xi_1} < 42$$

(Μονάδες 4)

Δ4. i) Να αποδείξετε ότι:

$$3 \int_0^1 e^{x^2} dx \geq 4$$

(Μονάδες 3)

ii) Να υπολογίσετε, συναρτήσει του x_0 , το ολοκλήρωμα:

$$\int_0^1 |f^{-1}(x)| dx$$

(Μονάδες 3)

ΑΡΧΗ 6ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ– Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

Ο Δ Η Γ Ι Ε Σ (για τους εξεταζόμενους)

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμο σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν . **Δεν επιτρέπεται να γράψετε** καμία άλλη σημείωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα.
4. Να γράψετε τις απαντήσεις σας μόνο με μπλε ή μαύρο στυλό. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε μολύβι μόνο για σχέδια , διαγράμματα και πίνακες.
5. Να μη χρησιμοποιήσετε χαρτί μιλιμετρέ.
6. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
7. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων
8. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 1 ώρα μετά από την διανομή των φωτοαντιγράφων.

ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

Επιστημονική επιμέλεια: Συντακτική ομάδα www.mathp.gr

Συντονιστής: Καραγιάννης Ιωάννης, Σχολικός Σύμβουλος Μαθηματικών