

ΛΥΣΕΙΣ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΘΕΜΑΤΩΝ 3

13/04/2016

ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ΚΑΙ ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ ΚΑΙ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

ΘΕΜΑ 1^ο

A1. Τι ονομάζουμε ρυθμό μεταβολής του $y = f(x)$ ως προς το x στο σημείο x_0 ;

A2. Να διατυπώσετε και να αποδείξετε το Θεμελιώδες Θεώρημα του Ολοκληρωτικού Λογισμού.

A3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A θα λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) ελάχιστο, το $f(x_0)$, όταν $f(x) < f(x_0)$ για κάθε $x \in A$.

Λάθος

β. Ανάμεσα σε δύο ρίζες μιας πολυωνυμικής συνάρτησης, υπάρχει πάντα τουλάχιστον μια ρίζα της παραγώγου της.

Σωστό

γ. Αν η f είναι συνεχής σε διάστημα Δ και $\alpha, \beta, \gamma \in \Delta$, τότε ισχύει:

$$\int_{\beta}^x f(t)dt = \int_{\alpha}^x f(t)dt + c, c \in \mathbb{R}$$

Σωστό

δ. Έστω μια συνάρτηση ορισμένη σ' ένα σύνολο της μορφής $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$ και l ένας πραγματικός αριθμός. Τότε ισχύει η ισοδυναμία:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - l) = 0$$

Σωστό

ε. Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δεν μηδενίζεται σ' αυτό, τότε αυτή είναι θετική για κάθε $x \in \Delta$.

Λάθος

ΘΕΜΑ 2^ο

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \ln(3e^x + 1) - 2$.

B1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .

B2. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.

B3. Να ορίσετε την f^{-1} .

B4. Να λύσετε την ανίσωση:

$$f(x) < f^{-1}(\ln 5 - 2) - 2.$$

ΛΥΣΗ

B1. Για να ορίζεται η f , πρέπει:

$3e^x + 1 > 0$, που αληθεύει για κάθε $x \in \mathbf{R}$. Άρα, το πεδίο ορισμού της είναι $D_f = \mathbf{R}$

B2. Για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$ με $x_1 < x_2$ έχουμε:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow e^{x_1} < e^{x_2} \Rightarrow 3e^{x_1} < 3e^{x_2} \Rightarrow 3e^{x_1} + 1 < 3e^{x_2} + 1 \Rightarrow$$

$$\ln(3e^{x_1} + 1) < \ln(3e^{x_2} + 1) \Rightarrow \ln(3e^{x_1} + 1) - 2 < \ln(3e^{x_2} + 1) - 2 \Rightarrow$$

$$f(x_1) < f(x_2).$$

Οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα, άρα «1-1» οπότε αντιστρέφεται.

Σχόλιο: Θα μπορούσαμε να αποδείξουμε εύκολα ότι $f'(x) = \frac{3e^x}{3e^x + 1} > 0$, $x \in \mathbf{R}$, άρα η f

είναι γνησίως αύξουσα, άρα «1-1» οπότε αντιστρέφεται.

B3. Έχουμε:

$$f(x) = y \Leftrightarrow y + 2 = \ln(3e^x + 1) \Leftrightarrow e^{y+2} = 3e^x + 1 \Leftrightarrow$$

$$e^x = \frac{e^{y+2} - 1}{3}, \frac{e^{y+2} - 1}{3} > 0 \quad \text{οπότε:}$$

$$x = \ln \frac{1}{3}(e^{y+2} - 1), y > -2.$$

Άρα:

$$f^{-1}(x) = \ln \frac{1}{3}(e^{x+2} - 1), x \in (-2, +\infty)$$

B4. Έχουμε:

$$f(x) < f^{-1}(\ln 5 - 2) - 2 \Leftrightarrow \ln(3e^x + 1) - 2 < \ln \frac{1}{3}(e^{\ln 5} - 1) - 2 \Leftrightarrow$$

$$\ln(3e^x + 1) < \ln \frac{4}{3} \Leftrightarrow 3e^x + 1 < \frac{4}{3} \Leftrightarrow 9e^x + 3 < 4 \Leftrightarrow$$

$$e^x < \frac{1}{9} \Leftrightarrow x < \ln \frac{1}{9} \Leftrightarrow x < -\ln 9$$

ΘΕΜΑ 3^ο

Δίνεται συνάρτηση $f(x) = e^x - \ln(x+1) - 1$.

Γ1. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Γ2. i. Να βρείτε το σύνολο τιμών της και να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$.

ii. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f .

Γ3. Αν για τους αριθμούς $a, \beta \in \mathbb{R}$ με $2a + \beta > 0$ και $a + 2\beta - 1 > 0$,

ισχύει:

$$e^{2a+\beta-1} - \ln(2a + \beta) + e^{a+2\beta-2} - \ln(a + 2\beta - 1) \leq 2$$

να υπολογίσετε τους a, β .

Γ4. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f , τους άξονες $x'x$ και $y'y$ και την ευθεία $x=1$.

ΛΥΣΗ

Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το διάστημα $(-1, +\infty)$.

Γ1. Έχουμε:

$$f'(x) = e^x - \frac{1}{x+1} \quad \text{και}$$

$$f''(x) = e^x + \frac{1}{(x+1)^2}.$$

Επειδή $f''(x) > 0$ για κάθε $x > -1$, έπεται ότι η συνάρτηση f' είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-1, +\infty)$.

Επίσης $f'(0) = 0$, άρα

για $-1 < x < 0$ $f' \overset{\text{γν. αύξ.}}{\iff} f'(x) < f'(0) = 0$ και

για $x > 0$ $f' \overset{\text{γν. αύξ.}}{\iff} f'(x) > f'(0) = 0$.

Επιπλέον $f(0) = 0$ και έτσι έχουμε τον παρακάτω πίνακα:

x	-1	0	$+\infty$
f'(x)	-	○	+
f(x)			

Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-1, 0]$ και γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$, οπότε παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x = 0$ το $f(0) = 0$.

Γ2. i. Έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} [e^x - \ln(x+1) - 1] = +\infty, \text{ αφού}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \ln(x+1) \stackrel{u=x+1}{=} \lim_{u \rightarrow 0^+} \ln(u) = -\infty \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow -1^+} [e^x - 1] = \frac{1}{e} - 1.$$

Άρα το σύνολο τιμών της f είναι το $[0, +\infty)$.

Η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει στο πεδίο ορισμού της $(-1, +\infty)$, μοναδική λύση την $x = 0$, αφού:

$$\text{για } x < 0 \stackrel{f \text{ γν. φθί.}}{\iff} f(x) > f(0) = 0 \text{ και}$$

$$\text{για } x > 0 \stackrel{f \text{ γν. αύξ.}}{\iff} f(x) > f(0) = 0.$$

ii. Αναζητούμε τις ασύμπτωτες της

Κατακόρυφες: Επειδή $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} (e^x - \ln(x+1) - 1) = +\infty$, η ευθεία $x = -1$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f .

Οριζόντιες: Η C_f δεν έχει οριζόντια ασύμπτωτη αφού:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - \ln(x+1) - 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x \left(1 - \frac{\ln(x+1)}{e^x} - \frac{1}{e^x} \right) = (+\infty) \cdot 1 = +\infty$$

, διότι είναι:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+1)}{e^x} = \left(\frac{0}{0} - D, L \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{(x+1)e^x} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} = 0$$

Πλάγιες: Επειδή:

$$\lambda = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - \ln(x+1) - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x \left(1 - \frac{\ln(x+1)}{e^x} - \frac{1}{e^x} \right)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{\ln(x+1)}{e^x} - \frac{1}{e^x} \right) = (+\infty) \cdot 1 = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{1} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{\ln(x+1)}{e^x} - \frac{1}{e^x} \right) = 1 - 0 - 0 = 1$$

η C_f δεν έχει πλάγιες ασύμπτωτες

Γ3. Η δοσμένη σχέση γίνεται ισοδύναμα:

$$e^{2\alpha+\beta-1} - \ln(2\alpha + \beta) + e^{\alpha+2\beta-2} - \ln(\alpha + 2\beta - 1) \leq 2 \Leftrightarrow$$

$$e^{2\alpha+\beta-1} - \ln((2\alpha + \beta - 1) + 1) - 1 + e^{\alpha+2\beta-2} - \ln((\alpha + 2\beta - 2) + 1) - 1 \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$f(2\alpha + \beta - 1) + f(\alpha + 2\beta - 2) \leq 0 \quad (1)$$

Από την τελευταία σχέση έπεται ότι:

$$f(2\alpha + \beta - 1) = f(\alpha + 2\beta - 2) = 0, \quad (2)$$

γιατί αν υποθέσουμε ότι π.χ. $f(2\alpha + \beta - 1) \neq 0$ τότε, επειδή $f(x) \geq 0$ για κάθε $x > -1$, θα πρέπει $f(2\alpha + \beta - 1) > 0$ και η (1) μας δίνει:

$f(\alpha + 2\beta - 2) \leq -f(2\alpha + \beta - 1) < 0$ δηλαδή $f(\alpha + 2\beta - 2) < 0$, το οποίο είναι άτοπο. Επομένως

$$f(2\alpha + \beta - 1) = 0$$

οπότε από την (1) και $f(\alpha + 2\beta - 2) = 0$.

Από την (2) και από το ερώτημα iii) έχουμε ότι:

$$\begin{cases} 2\alpha + \beta - 1 = 0 \\ \alpha + 2\beta - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 1 \end{cases}$$

Γ4. Το ζητούμενο εμβαδόν είναι:

$$\begin{aligned} E(\Omega) &= \int_0^1 |f(x)| dx = \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 (e^x - \ln(x+1) - 1) dx = \int_0^1 e^x dx - \int_0^1 \ln(x+1) dx - \int_0^1 1 dx = \\ &= [e^x]_0^1 - [x \ln(x+1)]_0^1 + \int_0^1 \frac{x}{x+1} dx - [x]_0^1 = e - 1 - \ln 2 + I - 1 = e - 2 - \ln 2 + I \\ I &= \int_0^1 \frac{x}{x+1} dx = \int_0^1 \frac{x+1-1}{x+1} dx = \int_0^1 1 dx - \int_0^1 \frac{1}{x+1} dx = [x]_0^1 - [\ln(x+1)]_0^1 = 1 - \ln 2 \end{aligned}$$

Επομένως:

$$E(\Omega) = e - 2 - \ln 2 + 1 - \ln 2 = e - 1 - 2 \ln 2 \text{ τ.μ}$$

ΘΕΜΑ 4^ο

Έστω παραγωγίσιμη συνάρτηση f στο $(1, +\infty)$ με $f(x) \neq 0$ για κάθε

$x > 1$ που ικανοποιεί τη σχέση:

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1+x \ln x}{x \ln x}, \text{ για κάθε } x > 1 \text{ με } f(e) = e^e$$

Δ1. Να αποδείξετε ότι $f(x) = e^x \cdot \ln x$, $x > 1$ καθώς και ότι οι συναρτήσεις $g(x) = e^x$, $h(x) = \ln x$ δεν έχουν κοινό σημείο στο $(1, +\infty)$.

Δ2. i). Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία της και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

ii). Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = \frac{\lambda}{x}$ με $\lambda \in \mathbb{R}$, $x > 1$.

Δ3. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι κυρτή και να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο της $A(e, f(e))$.

Δ4. i. Να αποδείξετε ότι: $\frac{f(x)}{e^{x-1}} \geq (1+e)x - e^2$

ii. Να αποδείξετε ότι: $\int_2^3 f(x) dx \geq \frac{5+5e-4e^2}{4}$

Δ5. Να αποδείξετε ότι:

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \geq \sqrt{f(x_1) \cdot f(x_2)} \quad \text{για κάθε } x_1, x_2 \in (1, +\infty)$$

ΛΥΣΗ

Δ1. Έχουμε διαδοχικά:

$$\begin{aligned} \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1+x \ln x}{x \ln x} &\Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{x \ln x} + 1 \Leftrightarrow \ln|f(x)| = [\ln(\ln x)]' + (x)' \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow [\ln|f(x)|]' = [\ln(\ln x) + x]' \Leftrightarrow \ln|f(x)| = \ln(\ln x) + x + c \end{aligned}$$

Για $x = e$ έχουμε:

$$\ln|f(e)| = \ln(\ln e) + e + c \Rightarrow \ln e^e = e + c \Rightarrow e = e + c \Rightarrow c = 0$$

Επομένως $\ln|f(x)| = \ln(\ln x) + x$ (1).

Επειδή η f είναι συνεχής στο $(1, +\infty)$ (ως παραγωγίσιμη στο $(1, +\infty)$) και δεν έχει ρίζες αφού $f(x) \neq 0$, για κάθε $x \in (1, +\infty)$, η συνάρτηση f θα διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $(1, +\infty)$ και αφού $f(e) = e^e > 0$ θα είναι $f(x) > 0$, για κάθε $x \in (1, +\infty)$.

Άρα από την σχέση (1) έχουμε:

$$\ln f(x) = \ln(\ln x) + x \Leftrightarrow \ln f(x) = \ln(\ln x) + \ln e^x \Leftrightarrow \ln f(x) = \ln(e^x \cdot \ln x) \Leftrightarrow f(x) = e^x \cdot \ln x, x > 1$$

Θα αποδείξουμε τώρα ότι οι συναρτήσεις $g(x) = e^x$, $h(x) = \ln x$ δεν έχουν κοινό σημείο, δηλαδή ότι η εξίσωση:

$$g(x) = h(x) \Leftrightarrow e^x = \ln x \Leftrightarrow e^x - \ln x = 0 \quad \text{δεν έχει ρίζα στο } (1, +\infty)$$

Θεωρούμε την συνάρτηση $K(x) = e^x - \ln x$, $x \geq 1$, η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $[1, +\infty)$

(ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $[1, +\infty)$) με $K'(x) = e^x - \frac{1}{x}$, $x \geq 1$. Η

συνάρτηση $K'(x)$ είναι επίσης παραγωγίσιμη στο $[1, +\infty)$ (ως πράξεις παραγωγίσιμων

συναρτήσεων στο $[1, +\infty)$) με $K''(x) = e^x + \frac{1}{x^2} > 0$, $x \geq 1$. Άρα η $K'(x)$ είναι γνησίως

αύξουσα στο $[1, +\infty)$. Άρα:

$$x > 1 \Rightarrow K'(x) > K'(1) = e - 1 \Rightarrow K'(x) > 0, x > 1$$

Επομένως η συνάρτηση $K(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$. Άρα:

$$x > 1 \Rightarrow K(x) > K(1) = e > 0 \Rightarrow K(x) > 0, x > 1$$

Οπότε η συνάρτηση $K(x)$ δεν έχει ρίζα στο $(1, +\infty)$, δηλαδή ισοδύναμα οι συναρτήσεις $g(x) = e^x$, $h(x) = \ln x$ δεν έχουν κοινό σημείο στο $(1, +\infty)$.

Δ2. i) Η συνάρτηση $f(x) = e^x \cdot \ln x$, $x > 1$ είναι παραγωγίσιμη στο $(1, +\infty)$ (ως γινόμενο παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $(1, +\infty)$) με:

$$f'(x) = e^x \ln x + e^x \cdot \frac{1}{x} > 0, \text{ για κάθε } x > 1$$

Επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα $(1, +\infty)$. Για το σύνολο τιμών της έχουμε:

$$f((1, +\infty)) = \left(\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right), \text{ αφού η } f \text{ είναι γνησίως αύξουσα } (1, +\infty).$$

Είναι:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} (e^x \cdot \ln x) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x \cdot \ln x) = +\infty \end{aligned}$$

$$\text{Άρα } f((1, +\infty)) = (0, +\infty)$$

ii) Έχουμε $f(x) = \frac{\lambda}{x} \Leftrightarrow xf(x) = \lambda \Leftrightarrow \varphi(x) = \lambda$, $x > 1$, όπου $\varphi(x) = xf(x)$, $x > 1$ η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $(1, +\infty)$ (ως γινόμενο παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $(1, +\infty)$) με:

$$\begin{aligned} \varphi'(x) &= f(x) + xf'(x) = e^x \ln x + x \left(e^x \ln x + e^x \cdot \frac{1}{x} \right) = e^x \ln x + xe^x \ln x + e^x = e^x (\ln x + x \ln x + 1) > 0 \\ &, \text{ για κάθε } x \in (1, +\infty) \end{aligned}$$

Άρα η συνάρτηση $\varphi(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(1, +\infty)$ και επομένως το

$$\text{σύνολο τιμών της είναι } \varphi((1, +\infty)) = \left(\lim_{x \rightarrow 1^+} \varphi(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) \right) = (0, +\infty), \text{ αφού:}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^+} \varphi(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} (xf(x)) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (xf(x)) = +\infty \end{aligned}$$

Άρα:

- Αν $\lambda \leq 0$ η εξίσωση $f(x) = \frac{\lambda}{x}$ δεν έχει ρίζα στο $(1, +\infty)$

- Αν $\lambda > 0$ η εξίσωση $f(x) = \frac{\lambda}{x}$ έχει μοναδική ρίζα στο $(1, +\infty)$, αφού είναι «1-1» στο $(1, +\infty)$ (ως γνησίως αύξουσα στο $(1, +\infty)$).

Δ3. Η συνάρτηση $f'(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $(1, +\infty)$ (ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $(1, +\infty)$) με:

$$f''(x) = e^x \ln x + e^x \cdot \frac{1}{x} + e^x \cdot \frac{1}{x} - e^x \frac{1}{x^2} = e^x \ln x + 2e^x \cdot \frac{1}{x} - e^x \frac{1}{x^2} =$$

$$e^x \left(\ln x + 2\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \right) = e^x \left(\frac{x^2 \ln x + 2x - 1}{x^2} \right) > 0, x > 1$$

$$e^x > 0$$

Αφού για κάθε $x \in (1, +\infty)$ είναι : $x^2 > 0$

$$x^2 \ln x + 2x - 1 > 0 \quad (x^2 \ln x > 0, 2x - 1 > 0)$$

Επομένως η συνάρτηση f είναι κυρτή στο $(1, +\infty)$.

Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $A(e, f(e))$ είναι:

$$y - e^e = (e^e + e^{e-1})(x - e) \Leftrightarrow y = (e^e + e^{e-1})x - e^{e+1} - e^e + e^e \Leftrightarrow y = (e^e + e^{e-1})x - e^{e+1}$$

, αφού $f'(e) = e^e + e^{e-1}$

Δ4. i) Αφού η συνάρτηση f είναι κυρτή στο $(1, +\infty)$ η γραφική της παράσταση θα βρίσκεται πάνω από την εφαπτομένη (στο σημείο επαφής A ισχύει η ισότητα). Επομένως θα έχουμε:

$$f(x) \geq (e^e + e^{e-1})x - e^{e+1} \Leftrightarrow f(x) \geq e^{e-1}(e+1)x - e^{e+1} \Leftrightarrow \frac{f(x)}{e^{e-1}} \geq (e+1)x - \frac{e^{e+1}}{e^{e-1}} \Leftrightarrow \frac{f(x)}{e^{e-1}} \geq (e+1)x - e^2$$

, για κάθε $x > 1$

ii) Ολοκληρώνοντας¹ την προηγούμενη ανισοσύτητα έχουμε:

$$\int_2^3 \frac{f(x)}{e^{e-1}} dx \geq \int_2^3 [(e+1)x - e^2] dx \Leftrightarrow \frac{1}{e^{e-1}} \int_2^3 f(x) dx \geq (e+1) \left[\frac{x^2}{2} \right]_2^3 - e^2 [x]_2^3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{e^{e-1}} \int_2^3 f(x) dx \geq (e+1) \left(\frac{9}{2} - \frac{4}{2} \right) - e^2 (3-2) \Leftrightarrow \frac{1}{e^{e-1}} \int_2^3 f(x) dx \geq \frac{5}{2}(e+1) - e^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{e^{e-1}} \int_2^3 f(x) dx \geq \frac{5+5e-2e^2}{2} \Leftrightarrow \int_2^3 f(x) dx \geq e^{e-1} \cdot \frac{5+5e-2e^2}{2}$$

¹ Το βήμα αυτό χρειάζεται απόδειξη: Αν f, g συνεχείς στο $[a, \beta]$ με $f(x) \geq g(x), x \in [a, \beta]$, τότε

$\int_a^\beta f(x) dx \geq \int_a^\beta g(x) dx$. **Απόδειξη:** $f(x) - g(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [a, \beta]$, άρα:

$f(x) - g(x) \geq 0 \Rightarrow \int_a^\beta (f(x) - g(x)) dx \geq 0 \Leftrightarrow \int_a^\beta f(x) dx - \int_a^\beta g(x) dx \geq 0 \Leftrightarrow \int_a^\beta f(x) dx \geq \int_a^\beta g(x) dx$

Δ5. Επειδή η συνάρτηση f είναι κυρτή στο $(1, +\infty)$ (προηγούμενο ερώτημα) η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $(1, +\infty)$. Εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Τ. του διαφορικού λογισμού στα διαστήματα $\left[x_1, \frac{x_1+x_2}{2}\right]$ και $\left[\frac{x_1+x_2}{2}, x_2\right]$, αντίστοιχα, αφού πληρούνται οι προϋποθέσεις (η f είναι παραγωγίσιμη, άρα και συνεχής στα $\left[x_1, \frac{x_1+x_2}{2}\right]$ και $\left[\frac{x_1+x_2}{2}, x_2\right]$).

Επομένως υπάρχουν $\xi_1 \in \left(x_1, \frac{x_1+x_2}{2}\right)$ και $\xi_2 \in \left(\frac{x_1+x_2}{2}, x_2\right)$ τέτοια, ώστε:

$$f'(\xi_1) = 2 \frac{f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

$$f'(\xi_2) = 2 \frac{f(x_2) - f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)}{x_2 - x_1}$$

Από το γεγονός ότι η f' είναι γνησίως αύξουσα έχουμε:

$$\xi_1 < \xi_2 \Rightarrow f'(\xi_1) < f'(\xi_2) \Rightarrow 2 \frac{f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < 2 \frac{f(x_2) - f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)}{x_2 - x_1} \Rightarrow$$

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) - f(x_1) < f(x_2) - f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \Rightarrow f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) < \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$$

Επιμέλεια: Συντακτική Ομάδα www.mathp.gr

Συντονισμός: Καραγιάννης Ιωάννης, Σχολικός Σύμβουλος Μαθηματικών.