<u>ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ -1</u>

ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ Γ΄ ΤΑΞΗΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΙ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β΄)
ΚΥΡΙΑΚΗ 10 ΑΠΡΙΛΙΟΥ 2016
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ & ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ ΚΑΙ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα [α, β]. Αν G είναι μια παράγουσα της f στο [α, β], τότε να αποδείξετε ότι:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt = G(\beta) - G(\alpha)$$ **Μονάδες 7**

Α2. Να δώσετε τον ορισμό της συνέχειας μιας συνάρτησης f στο κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$ **Μονάδες 4**

Α3. Πότε μία συνάρτηση f λέγεται παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της; **Μονάδες 4**

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

i) Μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού Α λέμε ότι παρουσιάζει (ολικό) ελάχιστο στο $x_0 \in A$, όταν $f(x) \geq f(x_0)$ για κάθε $x \in A$

ii) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\sigma\upsilon\nu x}{x} = 0$

iii) Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) > 0$, τότε και $f(x) > 0$ για τα x κοντά στο x_0.

iv) Μια συνεχής συνάρτηση f διατηρεί πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα στα οποία οι διαδοχικές ρίζες της f χωρίζουν το πεδίο ορισμού της.

v) $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_{\alpha}^{\beta} + \int_{\alpha}^{\beta} f'(x)g(x)dx$, όπου f΄,g΄ είναι συνεχείς συναρτήσεις στο [α,β]

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:R \to R$ με $f(0)=0$ και

$$e^{2f(x)}+2xe^{f(x)}=1\,,\ x\in R.$$

Α. Να δείξετε ότι $f(x)=\ln\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$ **Μονάδες 6**

Β. Να βρείτε τα όρια $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ **Μονάδες 6**

Γ. Να δείξετε ότι η εξίσωση $e^{f(x)}-2016=0$ έχει μια τουλάχιστον πραγματική λύση . **Μονάδες 8**

Δ. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(e^{f(x)}-1\right)\sigma\upsilon\nu\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)}{x^4+x^2}$ **Μονάδες 5**

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:(0\,,+\infty)\to R$ με $f(1)=2\ln 2$ και

$$(x+1)f'(x)=f(x)+x+1-\frac{x^2+2x+1}{x}\quad x\in R_+^*.$$

Α. Να δείξετε ότι $f(x)=(x+1)\ln\dfrac{x+1}{x}$ **Μονάδες 5**

Β. Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς την μονοτονία και να βρείτε τις ασύμπτωτες και το σύνολο τιμών της . **Μονάδες 6**

Γ. Να δείξετε ότι η εξίσωση

$x+1=xe^{\frac{2016}{x+1}}$ έχει μια ακριβώς θετική ρίζα . **Μονάδες 5**

Δ. Να δείξετε ότι $\dfrac{f(x)+\ln 4}{2}\geq f\left(\dfrac{x+1}{2}\right)$ **Μονάδες 5**

Ε. Να δείξετε ότι $\displaystyle\int_1^{2016} xf(x)dx>\int_1^{2016} f(x)dx$ **Μονάδες 4**

ΘΕΜΑ Δ

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=2e^{x-1}-\ln x$ με $x>0$

και $g(x)=2x+2\ln\dfrac{2}{1+e^{x-1}}$

Α. Να τις μελετήσετε ως προς τα κυρτά – κοίλα . **Μονάδες 4**

Β. Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των f, g έχουν κοινή εφαπτόμενη

στο $x_0=1$,της οποίας να βρείτε την εξίσωση . **Μονάδες 5**

Γ. Για κάθε $x>0$ να δείξετε ότι $\ln\dfrac{\left(e^{x-1}+1\right)^2}{4x}\geq 2\left(x-e^{x-1}\right)$ **Μονάδες 5**

Δ. Να λύσετε στο R_+^* την εξίσωση $e^{x-1}=x+\ln\dfrac{2\sqrt{x}}{1+e^{x-1}}$ **Μονάδες 5**

Ε. Αν E είναι το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από την C_g ,την

εφαπτόμενη ευθεία ε του Β ερωτήματος και την ευθεία $x=2$,

να δείξετε ότι $E\geq 4\ln\dfrac{1+e}{2}-\dfrac{5}{2}$ **Μονάδες 6**

<u>ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζόμενους)</u>

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, κατεύθυνση, εξεταζόμενο μάθημα). **<u>Να μην αντιγράψετε</u>** τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων, αμέσως μόλις σας παραδοθούν.
   <u>Καμιά άλλη σημείωση δεν επιτρέπεται να γράψετε</u>.
   Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα, τα οποία και θα καταστραφούν μετά το πέρας της εξέτασης.
3. Να απαντήσετε **<u>στο τετράδιό σας σε όλα</u>** τα θέματα.
4. Κάθε λύση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες …………

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

A_1 Θεωρία

A_2 Θεωρία
A_3 Θεωρία
A_3 Σ , Σ , Σ , Σ , Λ

ΘΕΜΑ Β

Α. Έχουμε $e^{2f(x)}+2xe^{f(x)}=1 \overset{+x^2}{\Rightarrow} e^{2f(x)}+2xe^{f(x)}+x^2=1+x^2 \Rightarrow \left(e^{f(x)}+x\right)^2=1+x^2$

$$\Rightarrow \left|e^{f(x)}+x\right|^2=1+x^2 \Rightarrow \left|e^{f(x)}+x\right|=\sqrt{1+x^2} \quad (1)$$

Θέτουμε $g(x)=e^{f(x)}+x$,οπότε η (1) γράφεται $|g(x)|=\sqrt{1+x^2}$ $(1')$

Από την $(1')$ προκύπτει φανερά ότι $g(x)\neq 0$ και επειδή η g είναι συνεχής στο R ,ως πράξεις συνεχών ,θα διατηρεί σταθερό πρόσημο .
Όμως $g(0)=e^{f(0)}+0=e^0=1>0$,οπότε και $g(x)>0$,για κάθε $x\in R$.
Έτσι από την $(1')$ προκύπτει

$g(x)=\sqrt{1+x^2} \Rightarrow e^{f(x)}+x=\sqrt{1+x^2} \Rightarrow e^{f(x)}=\sqrt{1+x^2}-x$,οπότε και
$e^{f(x)}=\sqrt{1+x^2}-x \Rightarrow \ln e^{f(x)}=\ln\left(\sqrt{1+x^2}-x\right) \Rightarrow f(x)=\ln\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$

σχόλιο

Μπορούμε να εργαστούμε και με αντικατάσταση $e^{f(x)}=y$,οπότε με διακρίνουσα στην εξίσωση $y^2+2xy-1=0$ καταλήγουμε στο συμπέρασμα.

Β. για τα όρια έχουμε :

↳ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\ln\left(\sqrt{x^2+1}-x\right) \quad (2)$

Ομως $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)=...=\lim\limits_{x\to-\infty}(-x)\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1\right)=2(+\infty)=+\infty$

Έτσι με αντικατάσταση $\sqrt{x^2+1}-x=u$,το όριο στην (2) γράφεται

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{u\to+\infty}(\ln u)=+\infty$$

↳ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(\sqrt{x^2+1} - x\right) \quad (3)$

Ομως $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}^2 - x^2}{\sqrt{x^2+1}+x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{|x|\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}+x} \overset{\binom{x\to+\infty}{\Rightarrow x>0}}{=}$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}+1} = 0\cdot\frac{1}{2} = 0$$

Έτσι με αντικατάσταση $\sqrt{x^2+1}-x = u > 0$ (θέλει απόδειξη) ,το όριο στην (3) γράφεται

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{u\to 0^+}(\ln u) = -\infty$$

Γ. Η εξίσωση γράφεται ισοδύναμα

$e^{f(x)} - 2016 = 0 \Leftrightarrow e^{f(x)} = 2016 \Leftrightarrow \ln e^{f(x)} = \ln 2016 \Leftrightarrow f(x) = \ln 2016 \Leftrightarrow f(x) - \ln 2016 = 0$

Έτσι θεωρούμε την συνάρτηση

$g(x) = f(x) - \ln 2016$,προφανώς συνεχής στο R (πράξεις συνεχών).

Είναι ακόμη :

↳ $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x) - \ln 2016\right) \overset{(B)}{=} +\infty - \ln 2016 = +\infty$

Κατά συνέπεια θα υπάρχει $\alpha < 0$ (κοντά στο $-\infty$) ώστε $g(\alpha) < 0$.

↳ $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x) - \ln 2016\right) \overset{(B)}{=} -\infty - \ln 2016 = -\infty$

Κατά συνέπεια θα υπάρχει $\beta > 0$ (κοντά στο $+\infty$) ώστε $g(\beta) > 0$

Έτσι έχουμε $g(\alpha)\cdot g(\beta) < 0$,δηλαδή για την g ισχύουν οι προυποθέσεις του θεωρήματος Bolzano στο $[\alpha,\beta] \subseteq R$ και κατά συνέπεια η εξίσωση $g(x) = 0 \Leftrightarrow e^{f(x)} - 2016 = 0$ έχει μια τουλάχιστον πραγματική λύση .

Δ. για το όριο είναι

$$\lim_{x\to 0}\frac{\left(e^{f(x)}-1\right)\sigma\upsilon\nu\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)}{x^4+x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{e^{f(x)}-1}{x^3+x}\cdot\frac{\sigma\upsilon\nu\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)}{x} \quad (4)$$

Όμως :

↳ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{f(x)}-1}{x^3+x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-x-1}{x^3+x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-(x+1)}{x^3+x} \overset{\frac{0}{0}}{=}$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x^2}^2 - (x+1)^2}{x\left(x^2+1\right)\left(\sqrt{1+x^2}+x+1\right)} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-2x}{x\left(x^2+1\right)\left(\sqrt{1+x^2}+x+1\right)} =$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-2}{\left(x^2+1\right)\left(\sqrt{1+x^2}+x+1\right)} = \dfrac{-2}{2} = -1$ και

$$\hookrightarrow \lim_{x\to 0}\frac{\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu x}{x}=1$$

Έτσι από την σχέση (4) το ζητούμενο όριο είναι $(-1)\cdot 1=-1$

ΘΕΜΑ Γ

A. Είναι $(x+1)f'(x)=f(x)+x+1-\dfrac{x^2+2x+1}{x}\Rightarrow$

$$(x+1)f'(x)-(x+1)'' f(x)=x+1-\frac{(x+1)^2}{x}\overset{:(x+1)^2>0}{\Rightarrow}$$

$$(x+1)f'(x)-(x+1)' f(x)=x+1-\frac{(x+1)^2}{x}\overset{:(x+1)^2>0}{\Rightarrow}$$

$$\frac{(x+1)f'(x)-(x+1)'f(x)}{(x+1)^2}=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x}\Rightarrow$$

$\left(\dfrac{f(x)}{x+1}\right)'=\left(\ln(x+1)-\ln x\right)'$,οπότε $\dfrac{f(x)}{x+1}=\ln(x+1)-\ln x+c$ και για $x=1$ παίρνουμε

$\dfrac{f(1)}{1+1}=\ln(1+1)-\ln 1+c\Rightarrow\dfrac{\ln 4}{2}=\ln 2+c\Rightarrow\dfrac{2\ln 2}{2}=\ln 2+c\Rightarrow c=0$,άρα

$\dfrac{f(x)}{x+1}=\ln(x+1)-\ln x\Rightarrow\dfrac{f(x)}{x+1}=\ln\dfrac{x+1}{x}\Rightarrow f(x)=(x+1)\ln\dfrac{x+1}{x}$

B. Είναι $f(x)=(x+1)\ln\dfrac{x+1}{x}\Rightarrow f(x)=(x+1)\left(\ln(x+1)-\ln x\right)$,οπότε

$$f'(x)=(x+1)'\left(\ln(x+1)-\ln x\right)+(x+1)\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x}\right)=\ln\frac{x+1}{x}+1-\frac{x+1}{x},$$

οπότε $f'(x)=\ln\dfrac{x+1}{x}-\dfrac{1}{x}<0\quad(1)$, $x>0$ γιατί :

Α τρόπος

Από την γνωστή ανισότητα $\ln x\le x-1$ με το $=$ να ισχύει μόνο για $x=1$,θέτοντας αντί x το $\dfrac{x+1}{x}$ είναι $0<\dfrac{x+1}{x}\neq 1$ και παίρνουμε $\ln\dfrac{x+1}{x}<\dfrac{x+1}{x}-1\Rightarrow\ln\dfrac{x+1}{x}<\dfrac{1}{x}\Rightarrow\ln\dfrac{x+1}{x}-\dfrac{1}{x}<0$

Β τρόπος

Η σχέση (1) γράφεται $f'(x)=\ln\dfrac{x+1}{x}-\dfrac{1}{x}=\dfrac{\ln(x+1)-\ln x}{(x+1)-x}-\dfrac{1}{x}$ και αυτό βέβαια μας ΄΄παραπέμπει΄΄ σε ΘΜΤ .

Εφαρμόζοντας λοιπόν ΘΜΤ για την συνάρτηση $h(t)=\ln t$ στο $[x,x+1]$ με $x>0$ προκύπτει ότι υπάρχει $\xi \in (x, x+1)$ με $f'(\xi) = \dfrac{\ln(x+1) - \ln x}{(x+1) - x} \Rightarrow \dfrac{1}{\xi} = \dfrac{\ln(x+1) - \ln x}{(x+1) - x}$ (2)

Όμως $x < \xi < x+1 \Rightarrow \dfrac{1}{x} > \dfrac{1}{\xi} > \dfrac{1}{x+1}$ και λόγω (2) έχουμε

$$\frac{1}{x} > \frac{\ln(x+1) - \ln x}{(x+1) - x} \Rightarrow \ln(x+1) - \ln x < \frac{1}{x} \Rightarrow \ln\frac{x+1}{x} - \frac{1}{x} < 0 \Rightarrow f'(x) < 0$$

Κατά συνέπεια η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$

Για τις ασύμπτωτες

↳ $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} (x+1)\ln\dfrac{x+1}{x} = +\infty$,αφού $\lim\limits_{x \to 0^+}(x+1) = 1$ και $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x+1}{x} = \lim\limits_{x \to 0^+}\left(1 + \dfrac{1}{x}\right) = +\infty$

,οπότε $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln\dfrac{x+1}{x} = \lim\limits_{u \to +\infty} \ln u = +\infty$

Άρα η ευθεία $x = 0$ (άξονας $y'y$) είναι κατακόρυφη ασύμπτωτος της C_f

↳ $$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} (x+1)\ln\frac{x+1}{x} \overset{0\cdot(+\infty)}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln\frac{x+1}{x}}{\frac{1}{x+1}} \underset{DH}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{1}{\frac{x+1}{x}}\left(\frac{x+1}{x}\right)'}{-\frac{1}{(x+1)^2}} =$$

$$\ldots = \lim_{x \to +\infty} \frac{(x+1)^2}{x(x+1)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x+1}{x} = 1, \text{οπότε}$$

η ευθεία $y = 1$ είναι οριζόντια ασύμπτωτος της C_f

Για το σύνολο τιμών

Η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$,οπότε έχουμε :

$$f(A) = \left(\lim_{x \to +\infty} f(x), \lim_{x \to 0^+} f(x)\right) = (1, +\infty)$$

Γ. για την εξίσωση έχουμε :

$$x + 1 = xe^{\frac{2016}{x+1}} \Leftrightarrow \ln(x+1) = \ln x + \ln e^{\frac{2016}{x+1}} \Leftrightarrow \ln(x+1) = \ln x + \frac{2016}{x+1} \Leftrightarrow$$

$$\ln(x+1) - \ln x = \frac{2016}{x+1} \Leftrightarrow (x+1)\big(\ln(x+1) - \ln x\big) = 2016 \Leftrightarrow (x+1)\ln\frac{x+1}{x} = 2016$$

$$(x+1)\ln\frac{x+1}{x} = 2016 \Leftrightarrow f(x) = 2016$$

Όμως η f είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$ και το $2016 \in f(A) = (1, +\infty)$,οπότε

υπάρχει $x_0 \in (0, +\infty)$ ώστε $f(x_0) = 2016$

Δ. Η προς απόδειξη ανισότητα γράφεται

$$\frac{f(x)+\ln 4}{2}\ge f\left(\frac{x+1}{2}\right)\Leftrightarrow f(x)+2\ln 2\ge 2f\left(\frac{x+1}{2}\right)\Leftrightarrow$$

$$f(x)-f\left(\frac{x+1}{2}\right)\ge f\left(\frac{x+1}{2}\right)-2\ln 2\Leftrightarrow f(x)-f\left(\frac{x+1}{2}\right)\ge f\left(\frac{x+1}{2}\right)-f(1)$$

Το παραπάνω μας οδηγεί σε εφαρμογή του ΘΜΤ .

Έτσι λοιπόν εφαρμόζοντας το γνωστό θεώρημα στα διαστήματα $\left[1,\frac{x+1}{2}\right]$ και $\left[\frac{x+1}{2},x\right]$ (…) υπάρχουν $\xi_1\in\left(1,\frac{x+1}{2}\right)$ και $\xi_2\in\left(\frac{x+1}{2},x\right)$ ώστε

$$f'(\xi_1)=\frac{f\left(\frac{x+1}{2}\right)-f(1)}{\frac{x+1}{2}-1}\text{ και } f'(\xi_2)=\frac{f(x)-f\left(\frac{x+1}{2}\right)}{x-\frac{x+1}{2}}$$

Όμως :

↳ $f''(x)=\frac{1}{\frac{x+1}{x}}\left(\frac{x+1}{x}\right)'+\frac{1}{x^2}=\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x(x+1)}=\frac{1}{x^2(x+1)}>0$ για τα $x\in(0,+\infty)$.

Κατά συνέπεια η f' είναι γν. αύξουσα στο $(0,+\infty)$.

↳ $\frac{x+1}{2}-1=x-\frac{x+1}{2}=\frac{d(1,x)}{2}$

Όμως $\xi_2>\xi_1\overset{f'\uparrow}{\Rightarrow}f'(\xi_2)>f'(\xi_1)\Rightarrow\frac{f(x)-f\left(\frac{x+1}{2}\right)}{x-\frac{x+1}{2}}>\frac{f\left(\frac{x+1}{2}\right)-f(1)}{\frac{x+1}{2}-1}\Rightarrow$

$$\frac{f(x)-f\left(\frac{x+1}{2}\right)}{\frac{d}{2}}>\frac{f\left(\frac{x+1}{2}\right)-f(1)}{\frac{d}{2}}\Rightarrow f(x)-f\left(\frac{x+1}{2}\right)>f\left(\frac{x+1}{2}\right)-f(1)$$

οπότε και $\frac{f(x)+\ln 4}{2}\ge f\left(\frac{x+1}{2}\right)$

Ε. Είναι $xf(x)-f(x)=(x-1)f(x)$ και θεωρούμε την διαφορά

$$\Delta(x)=(x-1)f(x)=(x-1)(x+1)\ln\frac{x+1}{x}$$

Όμως $x\in[1,2016]$ οπότε :

↳ $x\ge 1\Rightarrow x-1\ge 0$ και

↳ $(x+1)\ln\frac{x+1}{x}=(x+1)\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)>0$, οπότε με πολ/σμό προκύπτει ότι

$\Delta(x)\ge 0$ και αφού έχει μια τουλάχιστο μη μηδενιζόμενη τιμή (πχ $\Delta(2)\ne 0$) θα είναι

$$\int_1^{2016}\Delta(x)dx>0\Rightarrow\int_1^{2016}(xf(x)-f(x))dx>0\Rightarrow\int_1^{2016}xf(x)dx-\int_1^{2016}f(x)dx>0$$

οπότε και $\int_1^{2016}xf(x)dx>\int_1^{2016}f(x)dx$

ΘΕΜΑ Δ

Α. ▪ για την f

Είναι $f(x)=2e^{x-1}-\ln x$ οπότε

$$f'(x)=2e^{x-1}-\frac{1}{x} \text{ και } f''(x)=2e^{x-1}+\frac{1}{x^2}>0 \text{ για κάθε } x>0,$$

δηλαδή η f είναι κυρτή στο $(0,+\infty)$.

▪για την g

Είναι $g(x)=2x+2\ln\dfrac{2}{1+e^{x-1}} \Rightarrow g(x)=2x+\ln 4-2\ln\left(1+e^{x-1}\right)$ οπότε

$$g'(x)=2-2\frac{1}{1+e^{x-1}}\left(1+e^{x-1}\right)'=2\left(1-\frac{e^{x-1}}{1+e^{x-1}}\right)=\frac{2}{1+e^{x-1}} \text{ και}$$

$$g''(x)=\left(\frac{2}{1+e^{x-1}}\right)'=-\frac{2\left(1+e^{x-1}\right)'}{\left(1+e^{x-1}\right)^2}=-\frac{2e^{x-1}}{\left(1+e^{x-1}\right)^2}<0$$

δηλαδή η g είναι κοίλη στο $(0,+\infty)$.

Β. Είναι :

↳ $f(1)=2e^0-\ln 1=2$ και $g(1)=2\cdot 1+\ln 4-2\ln\left(e^0+1\right)=2+\ln 4-\ln 4=2$ και

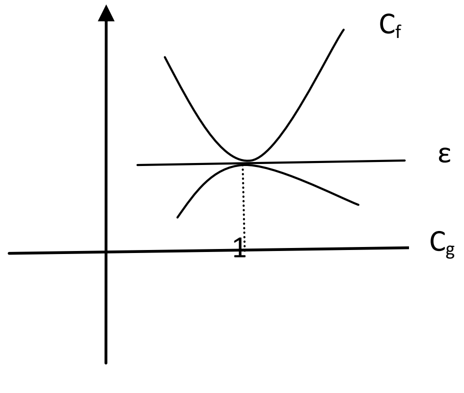
έτσι έχουμε $f(1)=g(1) \quad (1)$

↳ $f'(1)=\dfrac{2\cdot 1\cdot e^0-1}{1}=1$ και $g'(1)=\dfrac{2}{1+e^0}=1$ και

έτσι έχουμε $f'(1)=g'(1) \quad (2)$

Από τις σχέσεις $(1),(2)$ συμπεραίνουμε ότι οι γραφικές παραστάσεις των f,g έχουν κοινή εφαπτόμενη στο $x_0=1$ για την οποία εύκολα βρίσκουμε ότι έχει εξίσωση $y=x+1$

Γ.



Από το ερώτημα Α και το σχήμα εύκολα προκύπτει ότι

$$f(x)\ge y(x)\ge g(x) \quad (3)$$

άρα και

$$f(x)\ge g(x)$$

οπότε και

$$2e^{x-1}-\ln x\ge 2x+\ln 4-2\ln\left(e^{x-1}+1\right)\Rightarrow 2\ln\left(e^{x-1}+1\right)-\ln x\ge \ln 4+2x-2e^{x-1}\Rightarrow$$

$$\ln\frac{\left(e^{x-1}+1\right)^2}{x}-\ln 4\geq 2\left(x-e^{x-1}\right)\Rightarrow \ln\frac{\left(e^{x-1}+1\right)^2}{4x}\geq 2\left(x-e^{x-1}\right)$$

Δ. Η εξίσωση $e^{x-1}=x+\ln\frac{2\sqrt{x}}{1+e^{x-1}}$ γράφεται ισοδύναμα

$$e^{x-1}=x+\ln\frac{2\sqrt{x}}{1+e^{x-1}}\Leftrightarrow e^{x-1}=x+\ln\left(2\sqrt{x}\right)-\ln\left(1+e^{x-1}\right)\Leftrightarrow e^{x-1}=x+\ln 2+\frac{1}{2}\ln x-\ln\left(1+e^{x-1}\right)\Leftrightarrow$$

$$2e^{x-1}=2x+2\ln 2-2\ln\left(1+e^{x-1}\right)\Leftrightarrow 2e^{x-1}-\ln x=2x+2\left(\ln 2-\ln\left(1+e^{x-1}\right)\right)\Leftrightarrow 2e^{x-1}-\ln x=2x+2\ln\frac{2}{1+e^{x-1}}$$

$\Leftrightarrow f\left(x\right)=g\left(x\right)$ όπου από το σχήμα εύκολα προκύπτει ότι $x=1$

Ε. Για το εμβαδό έχουμε ότι $E=\int_1^2\left|y\left(x\right)-g\left(x\right)\right|dx\overset{(3)}{=}\int_1^2\left(y\left(x\right)-g\left(x\right)\right)dx=$

$$\int_1^2\left(x+1-2x-2\ln\frac{2}{1+e^{x-1}}\right)dx=\int_1^2\left(x+1-2x-2\ln\frac{2}{1+e^{x-1}}\right)dx \quad (4)$$

Όμως από την γνωστή ανισότητα $\ln x\leq x-1$,θέτοντας αντί x το $\frac{2}{1+e^{x-1}}>0$ παίρνουμε

$$\ln\frac{2}{1+e^{x-1}}\leq\frac{2}{1+e^{x-1}}-1\Rightarrow\ln\frac{2}{1+e^{x-1}}\leq\frac{1-e^{x-1}}{1+e^{x-1}}\overset{\cdot(-2)}{\Rightarrow}-2\ln\frac{2}{1+e^{x-1}}\geq-2\frac{1-e^{x-1}}{1+e^{x-1}}\Rightarrow$$

$$1-x-2\ln\frac{2}{1+e^{x-1}}\geq 1-x-2\frac{1-e^{x-1}}{1+e^{x-1}}\Rightarrow\ldots\Rightarrow$$

$$\int_1^2\left(x+1-2x-2\ln\frac{2}{1+e^{x-1}}\right)dx\geq\int_1^2\left(1-x-2\frac{1-e^{x-1}}{1+e^{x-1}}\right)dx \text{ ,άρα και}$$

$$E\geq\int_1^2\left(1-x-2\frac{1-e^{x-1}}{1+e^{x-1}}\right)dx \quad (4)$$

Αλλά

↳ $\int_1^2\left(1-x\right)dx=\left[x-\frac{x^2}{2}\right]_1^2=-\frac{1}{2}$ και

↳ για το ολοκλήρωμα $\int_1^2\frac{1-e^{x-1}}{1+e^{x-1}}dx$ έχουμε

- Θέτουμε $1+e^{x-1}=u\Rightarrow e^{x-1}=u-1$
- $d\left(1+e^{x-1}\right)=du\Rightarrow e^{x-1}dx=du\Rightarrow dx=\frac{1}{e^{x-1}}du\Rightarrow dx=\frac{1}{u-1}du$
- τα νέα άκρα ολοκλήρωσης είναι

$u_1=1+e^{x-1}\Big|_{x=1}=2$ και $u_2=1+e^{x-1}\Big|_{x=2}=1+e$,οπότε

$$\int_1^2\frac{1-e^{x-1}}{1+e^{x-1}}dx=\int_2^{1+e}\frac{1-\left(u-1\right)}{u}\cdot\frac{1}{u-1}du=\int_2^{1+e}\frac{2-u}{u\left(u-1\right)}du \quad (5)$$

Για το ολοκλήρωμα (5) χρησιμοποιούμε την μέθοδο ολοκλήρωσης ρητής συνάρτησης και έτσι :

$\frac{2-u}{u(u-1)}=\frac{A}{u}+\frac{B}{u-1}=\frac{A(u-1)+Bu}{u(u-1)}$,οπότε και $A(u-1)+Bu=2-u$ και με αντικατάσταση τιμών παίρνουμε $A=-2$ και $B=1$

Έτσι το ολοκλήρωμα (5) γράφεται

$$\int_2^{1+e}\left(\frac{-2}{u}+\frac{1}{u-1}\right)du=-2\left[\ln|u|\right]_2^{1+e}+\left[\ln|u-1|\right]_2^{1+e}=-2\left(\ln(1+e)-\ln 2\right)+\left(\ln e-\ln 1\right)=$$

$-2\ln\frac{1+e}{2}+1$ και έτσι από την (4) παίρνουμε

$$E\geq -\frac{1}{2}-2\left(-2\ln\frac{1+e}{2}+1\right)\Rightarrow E\geq -\frac{1}{2}+4\ln\frac{1+e}{2}-2\Rightarrow E\geq 4\ln\frac{1+e}{2}-\frac{5}{2}$$

ΣΧΟΛΙΑ

Το ΄΄πνεύμα΄΄ του ερωτήματος Ε είναι βέβαια η παραπάνω λύση με χρήση ανισοτήτων ,μεθόδων ολοκλήρωσης κλπ.

Υπήρξε αναφορά από συνάδελφο ότι ο αριθμός $4\ln\frac{1+e}{2}-\frac{5}{2}$ είναι αρνητικός .

Σε αυτή την περίπτωση βέβαια που **υπάρξει αλγεβρική απόδειξη**

ότι $4\ln\frac{1+e}{2}-\frac{5}{2}<0$

τότε η ζητούμενη ανισότητα

$E\geq 4\ln\frac{1+e}{2}-\frac{5}{2}$ είναι προφανής !!! , αφού :

↳ $E=\int_1^2|y(x)-g(x)|dx>0$ και

↳ $4\ln\frac{1+e}{2}-\frac{5}{2}<0$

και η αλγεβρική απόδειξη αποτελεί $2^{η}$ λύση