ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ

ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ Γ΄ ΤΑΞΗΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΙ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β΄)
ΤΕΤΑΡΤΗ 13 ΑΠΡΙΛΙΟΥ 2016
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ & ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ ΚΑΙ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ Α

Α1 Να αποδείξετε το θεώρημα:
Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$. Αν η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και $f(\alpha) \neq f(\beta)$ τότε, για κάθε αριθμό η μεταξύ των $f(\alpha)$ και $f(\beta)$ υπάρχει ένας, τουλάχιστον $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιος ώστε: $f(x_0) = \eta$. **Μονάδες 7**

Α2. Πότε η ευθεία $y = \lambda x + \beta$ λέγεται πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f ; **Μονάδες 4**

Α3. Να διατυπώσετε το Θεώρημα του Rolle και να δώσετε την γεωμετρική του ερμηνεία **Μονάδες 4**

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

i) Μια συνάρτηση $f: A \to R$ είναι 1-1 όταν για κάθε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή: $f(x_1) = f(x_2)$ τότε $x_1 = x_2$.

ii) Αν υπάρχει το $\lim\limits_{x \to x_0} |f(x)| = 0$, τότε υπάρχει το όριο της $f(x)$ στο x_0 και είναι $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$

iii) Αν η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ τότε η f έχει υποχρεωτικά ολικά ακρότατα τα $f(\alpha)$ και $f(\beta)$.

iv) Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $[\alpha, \beta]$ και $f(\beta)$ μέγιστη τιμή της συνάρτησης, τότε κατ' ανάγκη θα είναι $f'(\beta) = 0$.

v) Αν $\lim\limits_{x \to \alpha} f(x) > 0$ για κάθε $\alpha \in \Delta$ τότε $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \Delta$, όπου Δ διάστημα **Μονάδες 10**

ΘΕΜΑ Β

Έστω η γνησίως φθίνουσα συνάρτηση $f : R \to R$ με $\lim_{x\to 2} \frac{f(x)+x^2}{x^2-4} = 8$

Β1. Να εξετάσετε πότε η συνάρτηση f είναι συνεχής και πότε όχι, στο $x_0 = 2$.

Μονάδες 6

Β2. Αν δίνεται ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο R, τότε

i) να υπολογίσετε το $f(2)$ και το όριο $\lim_{x\to\infty} \frac{(f(3)+4)x^3+x-2}{(f(1)+4)x^2-3x+5}$

Μονάδες 6

ii) να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x\to 2} \frac{xf(x)-2f(2)}{\sqrt{x+7}-3}$ **Μονάδες 6**

iii) να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = -4$ έχει μοναδική λύση στο διάστημα $(1,3)$ **Μονάδες 7**

ΘΕΜΑ Γ

Θεωρούμε την συνάρτηση $f : (-\infty, 0) \to R$ με $f(-1) = 0$

και $xf(x) + x^2 f'(x) = \frac{x^2}{e^{xf(x)}} + 1$ για κάθε $x < 0$.

Α. Να δείξετε ότι $f(x) = \frac{2\ln(-x)}{x}$ για κάθε $x < 0$. **Μονάδες 5**

Β. Μελετήστε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα **Μονάδες 6**

Γ. Να βρείτε τα $\alpha, \beta \in R$ ώστε η ευθεία $y = (e^{\alpha} - \alpha - 1)x + \beta - 2$ να είναι πλάγια ασύμπτωτος της C_f στο $-\infty$. **Μονάδες 7**

Δ. Έστω $E(\lambda)$ το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από την C_f, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = -1$ και $x = \lambda$, όπου $-1 < \lambda < 0$. Να βρείτε το όριο $\lim_{\lambda\to 0^-} \frac{E(\lambda)}{\frac{1}{\lambda} - 1}$

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Δ

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, για την οποία ισχύουν :

$$f'(x)f(-x)=x \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}, \text{η } f' \text{ είναι συνεχής και } f(0)=1.$$

Α. Να δείξετε ότι $e^{f(x)}>1$ **Μονάδες 4**

Β. Να δείξετε ότι $f(x)=\sqrt{x^2+1}$ **Μονάδες 5**

Γ. Να λύσετε στο $\mathbb{R}$ την εξίσωση $f(x)+f(2015x)=f(2x)+f(2016x)$

Μονάδες 5

Δ. Να δείξετε ότι για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει ότι

$$f(x^2+1)+f(x^2+2)<f(x^2)+f(x^2+3)$$ **Μονάδες 6**

Ε. Να βρείτε το όριο $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\int_0^1\left(e^{f^2(x)}-x^2-1\right)dx\right)x^3+7x^2-x+2}{\left(\int_0^1\left(2\ln f(x)-x^2\right)dx\right)x^2+2x+5}$ **Μονάδες 5**

<u>ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζόμενους)</u>

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, κατεύθυνση, εξεταζόμενο μάθημα). **<u>Να μην αντιγράψετε</u>** τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων, αμέσως μόλις σας παραδοθούν.
   <u>Καμιά άλλη σημείωση δεν επιτρέπεται να γράψετε</u>.
   Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα, τα οποία και θα καταστραφούν μετά το πέρας της εξέτασης.
3. Να απαντήσετε **<u>στο τετράδιό σας σε όλα</u>** τα θέματα.
4. Κάθε λύση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες …………

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1 Θεωρία

Α2 Θεωρία

Α3 Θεωρία

Α4 Σ - Σ - Λ - Λ - Σ

ΘΕΜΑ Β

B_1 Έστω $g(x)=\dfrac{f(x)+x^2}{x^2-4}$ τότε $\begin{cases} f(x)=(x^2-4)g(x)-x^2 \ \text{ με } x\neq \pm 2 \\ \lim\limits_{x\to 2} g(x)=8 \end{cases}$ (2)

Είναι $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=\lim\limits_{x\to 2}(x^2-4)g(x)-\lim\limits_{x\to 2}x^2=(2^2-4)\cdot 8-2^2=-4$

Άρα $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=-4$ οπότε διακρίνουμε τις περιπτώσεις

- Αν $f(2)\neq -4$ τότε $(2)\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 2} f(x)\neq f(2)$ και κατά συνέπεια η f δεν είναι συνεχής στο $\chi_0=2$
- Αν $f(2)=-4$ τότε $(2)\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 2} f(x)=f(2)$ και κατά συνέπεια η f είναι συνεχής στο $x_0=2$

B_2 Αφού η f είναι συνεχής $x_0=2$, τότε :

i) $f(2)=\lim\limits_{x\to 2} f(x)=-4$ (3)

Είναι $1<2<3$ και επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα προκύπτει :

$$f(1)>f(2)>f(3)\Leftrightarrow f(1)>-4>f(3)\Leftrightarrow \begin{cases} f(1)+4>0 \\ f(3)+4<0 \end{cases} \text{ άρα και } \frac{f(3)+4}{f(1)+4}<0,$$

οπότε

$$:\lim_{x\to\infty}\frac{\left(f(3)+4\right)x^3+x-2}{\left(f(1)+4\right)x^2-3x+5}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(f(3)+4\right)x^3}{\left(f(1)+4\right)x^2}=\frac{f(3)+4}{f(1)+4}\lim_{x\to\infty}x=\frac{f(3)+4}{f(1)+4}(-\infty)=+\infty$$

ii) Είναι :

$$\lim_{x\to 2}\frac{xf(x)-2f(2)}{\sqrt{x+7}-3}\overset{(2),(\alpha)}{=}\lim_{x\to 2}\frac{x[(x^2-4)g(x)-x^2]-2(-4)}{\sqrt{x+7}-3}\overset{0/0}{=}$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{\left[x(x-2)(x+2)g(x)-(x-2)(x^2+2x+4)\right]\left(\sqrt{x+7}+3\right)}{\left(\sqrt{x+7}-3\right)\left(\sqrt{x+7}+3\right)}=$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)\left[x(x+2)g(x)-(x^2+2x+4)\right]\left(\sqrt{x+6}+3\right)}{x-2}=$$

$$2(2+2)\cdot 8-(2^2+2\cdot 2+4)(3+3)=-8$$

iii) Είναι $f\left(x\right)=-4 \Leftrightarrow f\left(x\right)=f\left(2\right) \Leftrightarrow x=2$ και λόγω μονοτονίας η λύση είναι μοναδική

.

σχόλιο

Μπορούμε να εργαστούμε επίσης με Θ Bolzano ή με σύνολο τιμών

ΘΕΜΑ Γ

Α. Πολλαπλασιάζουμε την δοσμένη σχέση με $e^{xf(x)}$ και έχουμε

$$xf\left(x\right)e^{xf(x)}+x^2f'\left(x\right)e^{xf(x)}=x^2+e^{xf(x)} \overset{:x\neq 0}{\Rightarrow} f(x)e^{xf(x)}+xf'(x)e^{xf(x)}=x+\frac{e^{xf(x)}}{x}$$

$$\Rightarrow \ (e^{xf(x)})'=x+\frac{e^{xf(x)}}{x} \quad (1)$$

Θέτουμε $e^{xf(x)}=g\left(x\right)$ και η σχέση $\left(1\right)$ γράφεται

$$g'(x)=x+(\frac{1}{x})g(x) \Rightarrow xg'(x)-g(x)=x^2 \Rightarrow (\frac{g(x)}{x})'=(x)' \Rightarrow \frac{g(x)}{x}=x+c \quad \left(2\right)$$

Απο την $\left(2\right)$ για $x=-1$παίρνουμε

$\dfrac{g(-1)}{-1}=-1+c \Rightarrow -e^{-f(-1)}=c-1 \Rightarrow -e^0=c-1 \Rightarrow c=0$ και απο την $\left(2\right)$παίρνουμε

$$g(x)=x^2 \Rightarrow e^{xf(x)}=x^2 \Rightarrow xf(x)=\ln(x^2) \Rightarrow f(x)=\frac{\ln x^2}{x} \Rightarrow f\left(x\right)=\frac{2\ln\left(-x\right)}{x}$$

$,x<0$.

Β. Η παράγωγος είναι $f'(x)=\dfrac{2(1-\ln(-x))}{x^2}$,οπότε

$f'(x)=0 \Leftrightarrow 1-\ln(-x)=0 \Leftrightarrow \ln(-x)=1 \Leftrightarrow n(-x)=\ln e \Leftrightarrow -x=e \Leftrightarrow x=-e$

και για το πρόσημο της $f'(x)$ λύνουμε την ανίσωση

$f'(x)>0 \Leftrightarrow 1-\ln(-x)>0 \Leftrightarrow \ln(-x)<\ln e \Leftrightarrow -x<e \Leftrightarrow x>-e$

x	**-∞**		**-e**		0
f ΄(x)		–		+	
f(x)		↘	**οε**	↗	

και η μονοτονία της είναι $f \downarrow$ στο $(-\infty,-e]$και $\uparrow$ στο $\left[-e,0\right)$.

Έχει δε ολικό ελάχιστο στο $x=-e$ το $f(-e)=-2/e$

Γ. Θα πρέπει

$$e^{\alpha}-\alpha-1=\lim_{x\to-\infty}\frac{f\left(x\right)}{x} \text{ και } \beta-2=\lim_{x\to-\infty}\left[f\left(x\right)-\left(e^{\alpha}-\alpha-1\right)x\right]$$

Όμως

$$\hookrightarrow e^{\alpha}-\alpha-1=\lim_{x\to-\infty}\frac{f\left(x\right)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{2\ln\left(-x\right)}{x}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2\ln\left(-x\right)}{x^2}\underset{DH}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}}\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{2}{x}}{2x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^2}=0$$

και

$$\hookrightarrow \beta-2=\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-\left(e^{\alpha}-\alpha-1\right)x\right]=\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{2\ln(-x)}{x}\underset{DH}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}}\lim_{x\to-\infty}\frac{2}{x}=0$$

και έτσι παίρνουμε

$$\begin{cases} e^{\alpha}-\alpha-1=0 \\ \beta-2=0 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} e^{\alpha}=\alpha+1 \\ \beta=2 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} \alpha=0 \\ \beta=2 \end{cases}$$

αφού ως γνωστόν (θέλει απόδειξη) η εξίσωση $e^{x}=x+1$ έχει μοναδική λύση την $x=0$

Δ. Για το εμβαδό έχουμε : $E=\int_{-1}^{\lambda}|f(x)|dx$

Όμως $-e<-1\le x\le\lambda<0$ και από Α. ερώτημα η f είναι $\uparrow$ στο $[-e,0]$, οπότε :

$$x\ge-1\overset{f\uparrow}{\Rightarrow}f(x)\ge f(-1)\Rightarrow f(x)\ge0 \text{ και έτσι παίρνουμε:}$$

$$E=\int_{-1}^{\lambda}f(x)dx=\int_{-1}^{\lambda}\frac{2\ln(-x)}{x}dx=2\int_{-1}^{\lambda}\frac{1}{x}\cdot\ln(-x)dx=2\int_{-1}^{\lambda}\left(\ln(-x)\right)'\cdot\ln(-x)dx=$$

$$\left[\ln^2(-x)\right]_{-1}^{\lambda}=\ln^2(-\lambda)-\ln^2 1=\ln^2(-\lambda).$$

Δηλαδή το εμβαδό είναι συνάρτηση του λ και έτσι έχουμε

$$E(\lambda)=\ln^2(-\lambda) \quad \text{και}$$

$$\lim_{\lambda\to0^-}\frac{E(\lambda)}{\frac{1}{\lambda}-1}=\lim_{\lambda\to0^-}\frac{\ln^2(-\lambda)}{\frac{1}{\lambda}-1}\underset{DLH}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}}\lim_{\lambda\to0^-}\frac{2\ln(-\lambda)(-1)}{-\frac{1}{\lambda^2}}=2\lim_{\lambda\to0^-}\frac{\ln(-\lambda)}{\frac{1}{\lambda^2}}\underset{DLH}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}}2\lim_{\lambda\to0^-}\frac{\frac{1}{-\lambda}(-1)}{\frac{-2\lambda}{\lambda^4}}=$$

$$-2\lim_{\lambda\to0^-}\frac{\lambda^3}{2\lambda}=-\lim_{\lambda\to0^-}\lambda^2=0$$

ΘΕΜΑ Δ

Α. Είναι $e^{f(x)}>1\Leftrightarrow e^{f(x)}>e^{0}\overset{e^{x}\uparrow}{\Leftrightarrow}f(x)>0$.

Η f είναι συνεχής ,οπότε θα εξετάσουμε αν είναι μη μηδενιζόμενη.

Θέτουμε στην δοσμένη σχέση όπου x το $-x$ και παίρνουμε $f'(-x)\cdot f(x)=-x \quad (1)$

Έστω υπάρχει $x_0\ne0$ με $f(x_0)=0$ (Είναι $x_0\ne0$ αφού $f(0)=1\ne0$)

Τότε από την (1) για $x=x_0$ παίρνουμε

$f'(-x_0)\cdot f(x_0)=-x_0\Rightarrow-x_0=0\Rightarrow x_0=0$ αδύνατο.

Άρα $f(x)\ne0\ \forall x\in R^*$ κι επειδή $f(0)=1\ne0$ είναι $f(x)\ne0\ \forall x\in R$.

Αφού όμως η f είναι παραγωγίσιμη στο R θα είναι και συνεχής με $f(x)\ne0\ \forall x\in R$, άρα διατηρεί σταθερό πρόσημο. Όμως $f(0)=1>0$, άρα

$$f(x)>0\ \forall x\in R$$

Β. Ισχύει από υπόθεση $f'(x)\cdot f(-x)=x$ και από την (1) έχουμε $f'(-x)\cdot f(x)=-x$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις παραπάνω έχουμε:

$$f'(x)\cdot f(-x)+f'(-x)\cdot f(x)=0 \Leftrightarrow f'(x)\cdot f(-x)-\left(-f(-x)\right)'\cdot f(x)=0 \underset{f(-x)\neq 0}{\overset{:f^2(-x)}{\Leftrightarrow}}$$

$$\frac{f'(x)\cdot f(-x)-\left(-f(-x)\right)'\cdot f(x)}{f^2(x)} \Leftrightarrow \left(\frac{f(x)}{f(-x)}\right)'=0 \Leftrightarrow \frac{f(x)}{f(-x)}=c \overset{f(0)=1}{\Leftrightarrow} c=1$$

Άρα $\dfrac{f(x)}{f(-x)}=1 \Leftrightarrow f(x)=f(-x)$ και με αντικατάσταση στην δοσμένη σχέση έχουμε:

$f'(x)\cdot f(x)=x \overset{\cdot 2}{\Leftrightarrow} 2f'(x)\cdot f(x)=2x \Leftrightarrow \left(f^2(x)\right)'=\left(x^2\right)' \Leftrightarrow f^2(x)=x^2+c$ και αφού $f(0)=1$ τότε c=1

$$\text{Άρα } f^2(x)=x^2+1 \Leftrightarrow \left|f(x)\right|^2=x^2+1 \Leftrightarrow \left|f(x)\right|=\sqrt{x^2+1} \overset{f(x)>0}{\Leftrightarrow} f(x)=\sqrt{x^2+1}$$

Γ. Είναι

$$f(x)+f(2015x)=f(2x)+f(2016x) \Leftrightarrow f(x)-f(2x)+f(2015x)-f(2016x)=0 \quad (1)$$

Η (1) επαληθεύεται για $x=0$ και κατά συνέπεια η $x=0$ είναι λύση .

Εξετάζουμε αν υπάρχουν κι άλλες λύσεις διαφορετικές του μηδενός.

Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο R ως σύνθεση των συνεχών και παραγωγίσιμων συναρτήσεων

x^2+1 και $\sqrt{x}$ με $f'(x)=\left(\sqrt{x^2+1}\right)'=\dfrac{1}{2\sqrt{x^2+1}}\cdot 2x=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

και πίνακα μονοτονίας:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$		$+$
$f(x)$	□		□

Οπότε

↳ για $x<0$ είναι :

$$\left.\begin{array}{l} 1<2 \Leftrightarrow x>2x \overset{f\downarrow}{\Leftrightarrow} f(x)<f(2x) \Leftrightarrow f(x)-f(2x)<0 \\ 2015<2016 \Leftrightarrow 2015x>2016x \overset{f\downarrow}{\Leftrightarrow} f(2015x)<f(2016x) \Leftrightarrow f(2015x)-f(2016x)<0 \end{array}\right\}$$

$$\overset{(+)}{\Rightarrow} f(x)-f(2x)+f(2015x)-f(2016x)<0$$

↳ Ενώ για $x>0$ είναι :

$$\left.\begin{array}{l} 1<2 \Leftrightarrow x<2x \overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow} f(x)<f(2x) \Leftrightarrow f(x)-f(2x)<0 \\ 2015<2016 \Leftrightarrow 2015x<2016x \overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow} f(2015x)<f(2016x) \Leftrightarrow f(2015x)-f(2016x)<0 \end{array}\right\}$$

$$\overset{(+)}{\Rightarrow} f(x)-f(2x)+f(2015x)-f(2016x)<0$$

Άρα για κάθε $x \neq 0$ έχουμε $f(x) - f(2x) + f(2015x) - f(2016x) < 0$.

Επομένως η δοσμένη εξίσωση έχει για μοναδική λύση την $x = 0$.

σχόλιο

Μπορούμε να εργαστούμε επίσης με ΘΜΤ

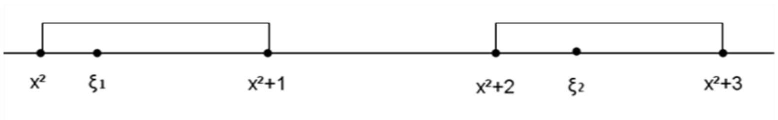
Δ. Η προς απόδειξη ανισότητα γράφεται :

$$f\left(x^2+1\right)+f\left(x^2+2\right)<f\left(x^2\right)+f\left(x^2+3\right) \Leftrightarrow f\left(x^2+1\right)-f\left(x^2\right)<f\left(x^2+3\right)-f\left(x^2+2\right) \quad (1)$$

Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο R άρα και σε καθένα από τα υποδιαστήματα:

$\left[x^2,\ x^2+1\right]$ και

$\left[x^2+2,\ x^2+3\right]$.



↳ Από Θ.Μ.Τ. στο $\left[x^2,\ x^2+1\right]$ υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi_1 \in \left(x^2,\ x^2+1\right)$ τέτοιο ώστε:

$$f'(\xi_1)=\frac{f\left(x^2+1\right)-f\left(x^2\right)}{x^2+1-x^2}=f\left(x^2+1\right)-f\left(x^2\right) \qquad (2)$$

↳ Από Θ.Μ.Τ. στο $\left[x^2+2,\ x^2+3\right]$ υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi_2 \in \left(x^2+2,\ x^2+3\right)$ τέτοιο ώστε:

$$f'(\xi_2)=\frac{f\left(x^2+3\right)-f\left(x^2+2\right)}{x^2+3-\left(x^2+2\right)}=f\left(x^2+3\right)-f\left(x^2+2\right) \quad (3)$$

Όμως η f' είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο R ως σύνθεση και πηλίκο συνεχών και παραγωγίσιμων συναρτήσεων με:

$$f''(x)=\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 1}}\right)'=\frac{x'\cdot\sqrt{x^2+1}-x\cdot\left(\sqrt{x^2+1}\right)'}{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2}=\frac{\sqrt{x^2+1}-x\cdot\dfrac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}=\frac{\sqrt{x^2+1}-\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}$$

$$=\frac{x^2+1-x^2}{x^2+1}=\frac{1}{x^2+1}>0 \quad \forall x \in R.$$

Οπότε η f' είναι γνησίως αύξουσα στο R. Είναι:

$$\left.\begin{array}{l} x^2<\xi_1<x^2+1 \\ x^2+2<\xi_2<x^2+3 \end{array}\right\} \Rightarrow \xi_1<\xi_2 \overset{f'\uparrow}{\Leftrightarrow} f'(\xi_1)<f'(\xi_2) \overset{(2),(3)}{\Rightarrow} f\left(x^2+1\right)-f\left(x^2\right)<f\left(x^2+3\right)-f\left(x^2+2\right)$$

Ε. Στο ζητούμενο όριο ,δεν μπορούμε αρχικά να χρησιμοποιήσουμε όριο πηλίκου ,αφού δεν γνωρίζουμε

αν οι παραστάσεις ολοκληρωμάτων μέσα στις παρενθέσεις είναι μη μηδενικές .

Έτσι λοιπόν :

↳ Για το ολοκλήρωμα του αριθμητή είναι:

$$e^{f^2(x)}-x^2-1=e^{\sqrt{x^2+1}^2}-x^2-1=e^{x^2+1}-x^2-1=e^{x^2+1}-\left(x^2+1\right)$$

Α τρόπος

Έστω η συνεχής και παραγωγίσιμη στο R συνάρτηση $\varphi_1(x) = e^x - x$ με

$\varphi_1'(x) = e^x - 1$

και πίνακα μονοτονίας:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\varphi_1'(x)$	$-$	0	$+$
$\varphi_1(x)$	□		□

Είναι $x^2 \ge 0 \Leftrightarrow x^2 + 1 \ge 1 > 0 \underset{(0,\,+\infty)}{\overset{\varphi_1\uparrow}{\Leftrightarrow}} \varphi_1(x^2+1) > \varphi_1(1) \Leftrightarrow e^{x^2+1} - (x^2+1) > e - 1 > 0$ άρα και

$$\int_0^1 \left(e^{f^2(x)} - x^2 - 1\right)dx > 0 \qquad (1)$$

Β τρόπος

Από την γνωστή ανισότητα $e^x \ge x + 1$ για κάθε $x \in R$ (θέλει απόδειξη) με αντικατάσταση αντί για x

το $x^2 + 1$ παίρνουμε

$e^{x^2+1} \ge (x^2+1) + 1 > x^2 + 1 \Rightarrow e^{x^2+1} - (x^2+1) > 0$,οπότε και $\int_0^1 \left(e^{f^2(x)} - x^2 - 1\right)dx > 0$

↳ Για το ολοκλήρωμα του παρονομαστή είναι:

Α τρόπος

$2\ln f(x) - x^2 = \ln f^2(x) - x^2 = \ln(x^2+1) - x^2 = \ln(x^2+1) - x^2 - 1 + 1 = \ln(x^2+1) - (x^2+1) + 1$

Έστω η συνεχής και παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ συνάρτηση $\varphi_2(x) = \ln x - x + 1$ με

$\varphi_2'(x) = (\ln x - x)' = \dfrac{1-x}{x}$ και πίνακα μονοτονίας:

x	0	1	$+\infty$
$\varphi_2'(x)$	$+$	0	$-$
$\varphi_2(x)$	□		□

Είναι

$x^2 + 1 \ge 1 \underset{(1,\,+\infty)}{\overset{\varphi_2\downarrow}{\Leftrightarrow}} \varphi_2(x^2+1) \le \varphi_2(1) \Leftrightarrow \ln(x^2+1) - (x^2+1) \le -1 \Leftrightarrow \ln(x^2+1) - (x^2+1) + 1 \le 0$

Αφού δε η παραπάνω δεν είναι παντού μηδενιζόμενη ,θα είναι και

$\int_0^1 \left(2\ln f(x) - x^2\right)dx < 0 \quad (2)$

Β τρόπος

Από την γνωστή ανισότητα (εφαρμογή Σχολικού Βιβλίου) $\ln x \le x-1$ για κάθε $x \in R_{+}^{*}$ με αντικατάσταση αντί για x το $x^2+1>0$ παίρνουμε

$$\ln\left(x^2+1\right) \le x^2+1-1 = x^2 \Rightarrow \ln\left(x^2+1\right)-x^2 \le 0$$

Αφού δε η παραπάνω δεν είναι παντού μηδενιζόμενη ,θα είναι και

$$\int_0^1\left(2\ln f(x)-x^2\right)dx<0$$

Έτσι έχουμε

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\int_0^1\left(e^{f^2(x)}-x^2-1\right)dx\right)\cdot x^3+7x^2-x+2}{\left(\int_0^1\left(2\ln f(x)-x^2\right)dx\right)\cdot x^2+2x+5} \overset{(\rho\eta\tau\acute{\eta})}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{\left(\int_0^1\left(e^{f^2(x)}-x^2-1\right)dx\right)\cdot x^3}{\left(\int_0^1\left(2\ln f(x)-x^2\right)dx\right)\cdot x^2}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\int_0^1\left(e^{f^2(x)}-x^2-1\right)dx\right)}{\left(\int_0^1\left(2\ln f(x)-x^2\right)dx\right)}\cdot x = \frac{\int_0^1\left(e^{f^2(x)}-x^2-1\right)dx}{\int_0^1\left(2\ln f(x)-x^2\right)dx}\lim_{x\to\infty} x = -\infty$$

αφού οι όροι του κλάσματος είναι ετερόσημοι και δίνουν πηλίκο αρνητικό

σχόλιο

Οι αρχικές πληκτρολογήσεις στο Δ Θέμα έγιναν από την συνάδελφο

Έλενα Γαλανοπούλου ,την οποία και ευχαριστώ.